4. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

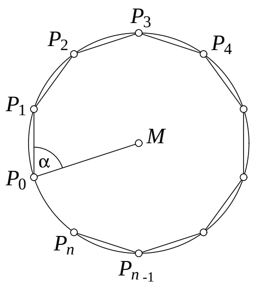
Aufgabe 041111:

Ein Betrieb liefert jährlich an die Betriebe (1) und (2) 600 t und 400 t eines bestimmten Erzeugnisses. Für den Transport stehen die LKW 1 und 2 mit Nutzlasten von 1 Mp bzw. 4 Mp zur Verfügung. Der kleinere Wagen steht jährlich höchstens für 300 Fahrten, der größere für 200 Fahrten zur Verfügung. Die Transportkosten in M betragen je Fahrt für

	LKW 1	LKW 2
zur Fahrt nach Betrieb 1	10	20
zur Fahrt nach Betrieb 2	30	60

Wie viele Fahrten muß jeder Wagen zu jedem der beiden Betriebe im Jahr durchführen, wenn die gesamten Transportkosten möglichst gering sein sollen?

Aufgabe 041112:



In den Schlitz eines zylindrischen Spiegels, der nach innen spiegelt, tritt bei P_0 ein Lichtstrahl ein, der mit dem Radius $\overline{MP_0}$ den Winkel α bildet ($\alpha < \frac{\pi}{2}$). Der Lichtstrahl verläuft in einer auf der Zylinderachse senkrecht stehenden Ebene und wird an den Punkten P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ... reflektiert (s. Abb.).

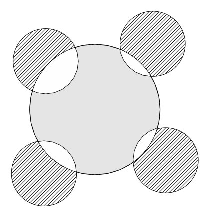
a) Geben Sie eine Formel für die Bogenlänge $\overset{\frown}{P_0P_n}$ an!

b) Wie groß ist α, wenn P_{10} mit P_0 zusammenfällt und der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ sich nicht überschneidet?

c) Es sei $\alpha = 50°$. Wie groß ist n, wenn P_n mit P_0 zusammenfällt? Geben Sie die drei kleinsten Werte für n an! (In diesem Fall kann sich der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ überschneiden.)

Aufgabe 041113:

Ein Kreis wird von vier in derselben Ebene liegenden Kreisen, deren Radius halb so groß wie der Radius des gegebenen Kreises ist, so geschnitten, daß diese kleineren Kreise einander nicht schneiden (s. Abb.).



a) Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt der in der Abb. grauen Teilfläche des großen Kreises gleich der Summe der Flächeninhalte der schraffierten Teilflächen der kleineren Kreise ist.

b) Diese Aussage läßt sich in verschiedener Hinsicht verallgemeinern. Geben Sie eine Verallgemeinerung an!

Aufgabe 041114:
Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $3^{999} - 2^{999}$ (im Dezimalsystem)?

Aufgabe 041115:
Man berechne alle gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 &= 0 \\ 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 &= 0. \end{aligned}$$

(Dabei sollen keine Näherungsverfahren benutzt werden.)

Aufgabe 041116:
Ohne Benutzung einer Tafel oder die Benutzung des Rechenstabes ist zu entscheiden, ob die Zahl

$$z = \sqrt[3]{1\,620 + 12 \cdot \sqrt{17\,457}} + \sqrt[3]{1\,620 - 12 \cdot \sqrt{17\,457}}$$

größer, kleiner oder gleich 18 ist.

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 041111:
Die Anzahl der Fahrten pro Jahr des LKW L_i zum Betrieb B_j wird mit x_{ij} bezeichnet ($i = 1, 2; j = 1, 2$).

Es gilt dann:

$$x_{11} + 4x_{21} \geq 600 \geq x_{11} + 1 + 4(x_{21} - 1) \tag{1}$$
$$x_{12} + 4x_{22} \geq 400 \geq x_{12} + 1 + 4(x_{22} - 1) \tag{2}$$
$$x_{11} + x_{12} \leq 300 \tag{3}$$
$$x_{21} + x_{22} \leq 200 \tag{4}$$
$$x_{ij} \geq 0 \text{ und ganzzahlig.} \tag{5}$$

Bezeichnet man die gesamten Transportkosten mit K, dann gilt

$$K = 10x_{11} + 20x_{21} + 30x_{12} + 60x_{22}. \tag{6}$$

Es ist zu untersuchen, für welche Werte x_{ij} die Kosten unter Berücksichtigung der Beziehungen (1) bis (5) möglichst gering werden. Aus (1) folgt:

$$600 - 4x_{21} \leq x_{11} \leq 603 - 4x_{21} \tag{7}$$

und aus (2)

$$400 - 4x_{22} \leq x_{12} \leq 403 - 4x_{22}. \tag{8}$$

Wegen (7) und (8) folgt aus (6)

$$18000 - 20x_{21} - 60x_{22} \leq K \leq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22}$$

und hieraus wegen (4)

$$14000 - 40x_{22} \leq K \leq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22} \tag{9}$$

Aus (8) folgt

$$x_{22} \leq \frac{403 - x_{12}}{4}$$

und daraus wegen (5)

$$x_{22} \leq 100. \tag{10}$$

Wegen (9) werden die Transportkosten genau dann möglichst gering, wenn x_{22} möglichst groß, wenn also x_{22} wegen (10) gleich 100 ist. Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich daher $x_{12} = 0$. Daher kann K keinen kleineren Wert als 1000 annehmen. Für $K = 1000$ müßte wegen (6)

$$10x_{11} + 20x_{21} = 4000,$$

also

$$x_{11} + 2x_{21} = 400 \qquad (11)$$

sein. Aus (1) und (11) folgt dann weiter $x_{21} \leq 100$ und aus (4) wegen $x_{22} = 100$: $x_{21} \leq 100$. Daher müßte $x_{21} = 100$ und wegen (11) $x_{11} = 200$ sein. Daher kann nur in dem Fall

	L_1	L_2
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_1	200	100
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_2	0	100

$K = 1000$ sein. Wie man leicht nachprüft, ist in diesem Fall auch tatsächlich $K = 1000$, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 041112:
Es gilt

$$|P_0M| = |P_1M| = |P_2M| = ... = r \quad \text{und}$$
$$|\sphericalangle P_1P_0M| = |\sphericalangle MP_1P_0| = |\sphericalangle P_2P_1M| = |\sphericalangle MP_2P_1| = ... = \alpha,$$

da die Größe des Einfallswinkels gleich der Größe des Reflexionswinkels ist, Basiswinkel in jedem gleichschenkligen Dreieck kongruent sind und $|\sphericalangle P_1P_0M| = \alpha$ (Scheitelwinkel) ist.

Daher sind die Dreiecke P_0MP_1, P_1MP_2, P_2MP_3 u.s.w. untereinander kongruent, und es gilt für die Bögen:

$$\overset{\frown}{P_0P_1} \simeq \overset{\frown}{P_1P_2} \simeq \overset{\frown}{P_2P_3} \simeq ...$$

und

$$|\sphericalangle P_0MP_1| = |\sphericalangle P_1MP_2| = |\sphericalangle P_2MP_3| = ... = \pi - 2\alpha.$$

a) Dann ist

$$\begin{aligned} |\overset{\frown}{P_0P_n}| &= |\overset{\frown}{P_0P_1}| + |\overset{\frown}{P_1P_2}| + ... + |\overset{\frown}{P_{n-1}P_n}| \\ &= (\pi - 2\alpha)r + (\pi - 2\alpha)r + ... + (\pi - 2\alpha)r \\ &= n(\pi - 2\alpha)r. \end{aligned}$$

b) Für $n = 10$ gilt in diesem Falle:

$$\begin{aligned} |\overset{\frown}{P_0P_{10}}| &= 10(\pi - 2\alpha)r = 2\pi r, \text{ also} \\ \alpha &= \frac{2}{5}\pi. \end{aligned}$$

c) Fällt P_n mit P_0 zusammen und ist $\alpha = \frac{5}{18}\pi$, so gilt:

$$n\left(\pi - \frac{5}{9}\pi\right) r = k2\pi r \quad (k = 1, 2, 3, ...). \tag{1}$$

(1) ist äquivalent mit

$$n = \frac{9}{2}k. \tag{2}$$

Da n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, wird (2) genau dann erfüllt, wenn $k = 2k'$ mit $k' > 0$ und k' ganzzahlig gilt. Daher ist $n = 9k'$ (k'=1,2,3,...).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 041113:

Der Inhalt p der gerasterten Fläche ist gleich der Differenz aus dem Inhalt πr^2 des Kreises k und dem Inhalt f der in k gelegenen nicht-gerasterten Fläche

$$p = \pi r^2 - f.$$

Der Flächeninhalt s der schraffierten Fläche ist gleich der Differenz aus der Summe der Inhalte der vier Kreisscheiben k_ν und f. Da die genannte Summe gleich

$$4\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi r^2 \qquad \text{ist, ergibt sich}$$
$$s = \pi r^2 - f \qquad \text{und damit}$$
$$s = p.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 041114:

Wir beweisen zunächst folgenden Hilfssatz:

Sind a_i und b_i die vorletzte bzw. die letzte Ziffer der natürlichen Zahl z_i im Dezimalsystem, $i = 1, 2$, so stimmt die vorletzte bzw. die letzte Ziffer von $z_1 \cdot z_2$ mit der entsprechenden Ziffer von $(10a_1 + b_1)(10a_2 + b_2)$ überein.

Beweis:

Auf Grund der Voraussetzungen gibt es zwei natürliche Zahlen c_1 und c_2 derart, daß

$$z_i = 100c_i + 10a_i + b_i, \quad i = 1, 2,$$

gilt. Daraus folgt

$$z_1 \cdot z_2 = 100[100c_1c_2 + (10a_1 + b_1)c_2 + (10a_2 + b_2)c_1] + (10a_1 + b_1)(10a_2 + b_2),$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

Berechnet man die letzten beiden Ziffern der Potenz 3^n für $n = 1, 2, 3, ...20$, so erkennt man die letzten beiden Ziffern von 3^{19} gleich 67 und die von 3^{20} gleich 01 sind.

Wegen $3^{999} = (3^{20})^{49} \cdot 3^{19}$ sind dann die letzten beiden Ziffern von 3^{999} gleich 67. Durch Berechnung der letzten beiden Ziffern von 2^m für $m = 1, 2, 3, ..., 22$ erkennt man, daß die letzten beiden Ziffern von 2^{22} gleich 04 sind. Es gilt:

$$2^{999} = (2^{22})^{45} \cdot 2^9.$$

Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^{45}$ sind also gleich den letzten beiden Ziffern von

$$4^{45} = 2^{90} = (2^{22})^4 \cdot 2^2.$$

Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^4$ sind dieselben wie die von $4^4 = 2^8$, und zwar 56, und die letzten beiden Ziffern von 2^9 lauten 12.

Daher sind die letzten beiden Ziffern von 2^{999} gleich den letzten beiden Ziffern des Produktes $56 \cdot 4 \cdot 12$. Die letzten beiden Ziffern dieses Produktes lauten 88, und damit sind die letzten beiden Ziffern von $3^{999} - 2^{999}$ gleich 79.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 041115:

Zu dieser Aufgabe präsentieren wir zwei sehr unterschiedliche Lösungen, eine mit brachialer Rechengewalt und eine mit etwas mehr Überlegung.

Lösung 1

Die „geradlinigste“ Methode ist, beide Gleichungen zu lösen und nachzusehen, welche Zahlen in beiden Lösungsmengen vorkommen. Das ist machbar, denn für Polynome bis zum Grad 4 gibt es explizite Lösungsformeln. Allerdings macht das keinen Spaß, denn die Formel für Grad 4 ist erheblich unhandlicher als die bekannte „$p-q$-Formel“ für Grad 2. Es ist auch ziemlich sinnlos, das von Hand auszurechnen, denn jedes Computeralgebraprogramm sollte das können. Maple z.B. berechnet als Lösungsmengen

$$\left\{-1,\ -\frac{7}{3},\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\} \qquad \text{bzw.} \qquad \left\{1,\ -\frac{7}{3},\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

(wer sich langweilt, möge das von Hand ausrechnen). Man sieht, dass die Lösung der Aufgabenstellung $\{-\frac{7}{3}\}$ ist.

Bemerkung: Ob diese Lösung als „vollständig“ anerkannt würde, ist fraglich, da die eigentliche Berechnung nicht von Hand erfolgte, aber im Prinzip ist dieser Lösungsweg gangbar.

Lösung 2

Wir definieren Polynome $p_1(x) := 3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7$ und $p_2(x) := 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7$. Sei x eine Lösung der gegebenen Gleichungen, $p_1(x) = p_2(x) = 0$. Dann gilt

$$0 = p_1(x) - p_2(x) = 12x^3 + 28x^2 + 6x + 14 =: p_3(x)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 4p_2(x) - (x-2)p_3(x) = 18x^2 + 42x =: p_4(x)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 3p_3(x) - 2xp_4(x) = 18x + 42 =: p_5(x)$$

Umgekehrt folgt wegen $p_4(x) = xp_5(x)$ aus $p_5(x) = 0$, dass auch $p_3(x) = 0$ ist (denn $p_3(x) = \frac{1}{3}(p_5(x) + 2xp_4(x))$) und ebenso, dass auch $p_1(x)$ und $p_2(x)$ Null sind. Die gesuchten gemeinsamen Lösungen der Gleichungen sind also genau die Nullstellen von p_5, also $\{-\frac{7}{3}\}$.

Bemerkung: was gemacht wurde, ist praktisch die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers der beiden gegebenen Polynome mit dem euklidischen Algorithmus. Dass die gemeinsamen Nullstellen genau die Nullstellen des ggT sind, liegt daran, dass Polynome in einer Variablen über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren zerlegbar sind. Bei mehr als einer Variablen funktioniert das nicht.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Lösung 041116:

Mit den Abkürzungen $a = 1\,620$, $b = 12\sqrt{17\,457}$ ist $z = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$, also

$$\begin{aligned} z^3 &= a + b + 3(a+b)^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}} + 3(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}} + a - b \\ &= 2a + 3\Big((a+b)(a-b)\Big)^{\frac{1}{3}}\Big((a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\Big) \\ &= 2a + 3\sqrt[3]{a^2-b^2}\cdot z \;=\; 3\,240 + 3\sqrt[3]{110\,592}\cdot z \;=\; 3\,240 + 144z \end{aligned}$$

(wegen $110\,592 = 2^{12}\cdot 3^3 = (2^4\cdot 3)^3$ braucht man für $\sqrt[3]{110\,592}$ keinen evtl. ungenauen Taschenrechner (und muss auch keinen Rechenstab aus dem Museum klauen)).

Demnach ist z eine reelle Nullstelle des Polynoms

$$\begin{aligned} p := x^3 - 144x - 3\,240 \;&=\; (x-18)(x^2+18x+180) \\ &=\; (x-18)(x+9+\sqrt{-99})(x+9-\sqrt{-99}). \end{aligned}$$

Da 18 die einzige reelle Nullstelle von p ist, muss z gleich 18 sein.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag