4. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 041041:
Die 30 Preisträger eines Schülerwettbewerbs sollen mit neu herausgegebenen Fachbüchern prämiert werden. Es stehen drei verschiedene Sorten von Büchern im Wert von 30 MDN, 24 MDN bzw. 18 MDN zur Verfügung. Von jeder Sorte soll mindestens ein Buch gekauft werden.

Welche Möglichkeiten der Zusammenstellung gibt es, wenn für die Prämierung insgesamt 600 MDN zur Verfügung stehen, die ausgegeben werden sollen?

Aufgabe 041042:
Man bestimme alle reellen Zahlen x, die der Ungleichung

$$\frac{x}{p} - \frac{2p}{x} < 2$$

genügen, wobei p eine positive reelle Zahl (Parameter) bedeutet.

Aufgabe 041043:
Beweisen Sie folgende Behauptung!

Ist die Summe dreier natürlicher Zahlen durch 6 teilbar, dann ist auch die Summe der Kuben dieser drei Zahlen durch 6 teilbar.

Aufgabe 041044:
Gegeben seien ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit $\sphericalangle ACB = R$ und ein beliebiger Punkt M auf der Hypotenuse $\overline{AB}$.

Beweisen Sie, daß folgende Relation gilt:

$$\overline{AM}^2 \cdot \overline{BC}^2 + \overline{BM}^2 \cdot \overline{AC}^2 = \overline{CM}^2 \cdot \overline{AB}^2!$$

Aufgabe 041045:
Die Länge der Kanten eines regelmäßigen Tetraeders sei a. Durch den Mittelpunkt einer Kante wird eine Ebene so gelegt, daß sie diese Kante nicht enthält und parallel zu zwei einander nicht schneidenden Kanten verläuft.

Berechnen Sie den Flächeninhalt der Schnittfigur dieser Ebene mit dem Tetraeder!

Aufgabe 041046:

In den Klassen 5 bis 8 einer Schule gibt es 300 Schüler. Von ihnen lesen regelmäßig

120 Schüler die Zeitschrift "Technikus"

90 Schüler die Zeitschrift "Fröhlichsein und Singen"

180 Schüler die Zeitschrift "Die Trommel"

60 Schüler die Zeitschriften "Die Trommel" und "Technikus"

16 Schüler die Zeitschriften "Technikus" und "Fröhlichsein und Singen"

24 Schüler die Zeitschriften "Die Trommel" und "Fröhlichsein und Singen"

6 Schüler alle drei genannten Zeitschriften.

I.
  a) Wieviel Schüler lesen genau eine dieser Zeitschriften regelmäßig?
  b) Wieviel Schüler lesen keine dieser Zeitschriften regelmäßig?

II. Lösen Sie die Aufgabe allgemein, indem Sie die Schülerzahl mit s bezeichnen und die übrigen angegebenen Zahlen der Reihe nach durch die Variablen a bis g ersetzen!

4. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 041041:

Wir nehmen zunächst je ein Buch für 30 M, 24 M und 18 M heraus. Es bleiben noch 27 Bücher für insgesamt $600M - 30M - 24M - 18M = 528M$.

27 Bücher für je 18 M kosten zusammen 486 M, es bleiben also noch $528M - 486M = 42M$ übrig, die dazu verwendet werden können, um statt der 18 M-Bücher teurere Bücher zu kaufen.

Wir unterscheiden nun danach, wie viele Bücher zu 30 M gekauft werden:

a) 4 oder mehr sind nicht möglich, da dies Mehrkosten von mindestens 48 Mark verursacht

b) 3 Bücher kosten 36 Mark zusätzlich, es bleiben noch 6 Mark, mit denen genau ein 18 M Buch durch ein 24 M-Buch ersetzt werden kann.

c) 2 Bücher zu 30 M und drei Bücher zu 24 M

d) 1 Buch zu 30 M und fünf Bücher zu 24 M

e) kein Buch zu 30 M und sieben Bücher zu 24 M

Insgesamt ergeben sich vier Möglichkeiten

30 M	24 M	18 M
4	2	24
3	4	23
2	6	22
1	8	21

Eine Probe bestätigt, dass in allen vier Fällen die Bedingungen der Aufgabe erfüllt sind.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

2. Lösungsweg:

Es seien x, y und z die Anzahl der Bücher, die für 30 M, 24 M bzw. 18 M angeschafft werden. Dann soll gelten:

$$x + y + z = 30, \qquad 30x + 24y + 18z = 600$$

Das ist äquivalent zu

$$x + y + z = 30, \qquad 5x + 4y + 3z = 100$$

Subtrahiert man nun 3 Mal die erste Gleichung von der zweiten, ergibt sich

$$x + y + z = 30, \qquad 2x + y = 10$$

Aus der zweiten Gleichung können nun die Lösungen für x und y unmittelbar abgelesen werden, nämlich:

(1) $x = 4$ und $y = 2$ oder

(2) $x = 3$ und $y = 4$ oder

(3) $x = 2$ und $y = 6$ oder

(4) $x = 1$ und $y = 8$.

(Beachte, dass $x > 0$ und $y > 0$ gelten soll.)

Aus der ersten Gleichung erhalten wir dann die Anzahl z und damit insgesamt vier mögliche Zusammenstellungen, das Geld auf die drei Bücher aufzuteilen:

(1) $x = 4$ und $y = 2$ und $z = 24$ oder

(2) $x = 3$ und $y = 4$ und $z = 23$ oder

(3) $x = 2$ und $y = 6$ und $z = 22$ oder

(4) $x = 1$ und $y = 8$ und $z = 21$.

Probe: Bei (2) ergibt sich $3 \cdot 30 + 4 \cdot 24 + 23 \cdot 18 = 600$. Stimmt!

Aufgeschrieben und gelöst von StrgAltEntf

Lösung 041042:
Wir unterscheiden zwei Fälle.

1. Fall: $x > 0$.

Dann ist die zu betrachtende Ungleichung äquivalent zu

$$x^2 - 2p^2 < 2px \qquad \text{bzw.} \qquad (x^2 - 2px + p^2) < 3p^2$$

also $(x-p)^2 < 3p^2$ und damit

$$-\sqrt{3}p < x - p < \sqrt{3}p \qquad \text{bzw.} \qquad (1-\sqrt{3})p < x < (1+\sqrt{3})p$$

Dabei fallen die Lösungen mit $x \leq 0$ aufgrund der Fallannahme weg, und es bleibt (wegen $p < 0$) die Lösungsmenge

$$\{x | 0 < x < (1+\sqrt{3})p\}$$

für diesen Fall.

2. Fall: Sei nun $x < 0$.

Es ist $x = 0$ nicht Teil des Definitionsbereichs der in der zu betrachtenden Ungleichung auftretenden Terme.

Dann ist die zu betrachtende Ungleichung diesmal äquivalent zu $x^2 - 2p^2 > 2px$, was sich analog äquivalent umformen lässt zu

$$(x-p)^2 > 3p^2 \qquad \text{bzw.} \qquad (x - p < -\sqrt{3}p \quad \text{oder} \qquad x - p > \sqrt{3}p)$$

und damit ($x < (1-\sqrt{3})p$ oder $x > (1+\sqrt{3})p$).

Der zweite Teil entfällt aufgrund der Fallannahme, sodass die Lösungsmenge für diesen Fall

$$\{x | x < (1-\sqrt{3})p\}$$

lautet. Zusammen ergibt sich also in Abhängigkeit vom Parameter $p > 0$ folgende Lösungsmenge:

$$\{x \in \mathbb{R} | x < (1-\sqrt{3})p \vee 0 < x < (1+\sqrt{3})p\}.$$

Aufgeschrieben und gelöst von cyrix

Lösung 041043:

a, b und c seien beliebige ganze (natürliche) Zahlen. Es gilt $(a-1)a(a+1) = a^3 - a$.

Von den drei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen $a-1$, a und $a+1$ ist mindestens eine gerade und mindestens eine durch drei teilbar. Das Produkt ist also durch 6 teilbar.

a und a^3 lassen somit stets den selben Rest bei Division durch 6. Das Gleiche gilt natürlich auch für b und c.

Daher lässt $a^3 + b^3 + c^3$ bei Division durch 6 den selben Rest wie $a + b + c$.

Insbesondere ist $a^3 + b^3 + c^3$ genau dann durch 6 teilbar, wenn $a + b + c$ durch 6 teilbar ist.

Aufgabe gelöst von Kitaktus

2.Lösungsweg:

Es gilt die Identität

$$(a+b+c)^3 - 3(a+b+c)(ab+ac+bc) + 3abc = a^3 + b^3 + c^3$$

Ist $a+b+c$ durch 6 teilbar, so ist dann mindestens eine der Zahlen a, b, c gerade und daher auch $3abc$ durch 6 teilbar, woraus die Behauptung folgt.

Aufgeschrieben und gelöst von weird

Lösung 041044:

Seien $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AM = d$, $BM = e$, $CM = f$, $\angle CMA = \alpha$. Wir wollen

$$a^2d^2 + b^2e^2 = c^2f^2$$

zeigen.

Nach Kosinussatz in den Dreiecken AMC und BMC gilt:

$$b^2 = d^2 + f^2 - 2df\cos\alpha$$

und

$$a^2 = e^2 + f^2 - 2ef\cos(180 - \alpha)$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit ce und die zweite mit cd und addieren die Gleichungen. Durch $-\cos\alpha = \cos(180 - \alpha)$ heben sich die zwei Kosinusterme auf, und es gilt:

$$b^2ce + a^2cd = d^2ce + f^2ce + e^2cd + f^2cd$$

Links setzen wir $c = d + e$ ein, rechts klammern wir ced und cf^2 aus, dadurch gilt:

$$a^2d^2 + b^2e^2 + a^2de + b^2de = cde(d+e) + cf^2(d+e)$$

Das Dreieck ist rechtwinklig, also gilt der Satz des Pythagoras $a^2 + b^2 = c^2$. Rechts ersetzen wir (d+e) durch c, und erhalten schließlich:

$$a^2d^2 + b^2e^2 + c^2de = c^2de + c^2f^2$$

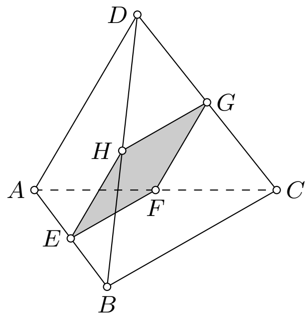
$$a^2d^2 + b^2e^2 = c^2f^2$$

Aufgeschrieben und gelöst von philippw

Lösung 041045:

A, B, C, D seien die Ecken des Tetraeders, und E sei der Mittelpunkt von AB (siehe Abbildung). Dann kann ϵ o.B.d.A. als E enthaltend und parallel zu AD und BC vorausgesetzt werden.

Daher schneidet ϵ weder AD noch BC. Folglich liegen A und D bzw. B und C jeweils auf derselben Seite von ϵ, während A und B auf verschiedenen Seiten von ϵ liegen. Mithin schneidet ϵ die Kanten AC, CD und DB. Die Schnittpunkte seien in dieser Reihenfolge mit $F.G$ und H bezeichnet.



Dann gilt

$$EF \parallel BC \quad \text{und} \quad GH \parallel BC \qquad \text{sowie} FG \parallel AD \quad \text{und} \quad HE \parallel AD$$

Daraus folgt nach dem 2. Strahlensatz

$$|EF| = |FG| = |GH| = |HE| = \frac{a}{2}$$

Die Schnittfigur ist demnach ein Rhombus. Da wegen der Regelmäßigkeit des Tetraeders die Seitenflächen untereinander kongruente regelmäßige Dreiecksflächen sind, sind deren Höhen untereinander kongruent; es gilt also

$$|DE| = |CE| = |DF| = |BF|$$

Da außerdem $|CD| = |BD|$ ist, gilt nach dem Kongruenzsatz (sss) $\Delta CDE \cong \Delta BDF$ und folglich $\angle DCE \cong \angle DBF$.

Wegen $|CG| = |BH| = \frac{1}{2}|CD|$ gilt nach dem Kongruenzsatz (sws) $\Delta CGE \cong \Delta BHF$ und mithin $|GE| = |HF|$. Die Mittelpunkte von GE und HF fallen im Schnittpunkt der Diagonalen im Rhombus zusammen, so das GE und HF Durchmesser desselben Kreises sind.

Damit ist $EFGH$ als Rhombus und Sehnenviereck ein Quadrat und hat den Flächeninhalt

$$I = |EF|^2 = \frac{a^2}{4}$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 041046:
Sei

x_0 die Anzahl der Schüler, die keine dieser Zeitschriften regelmäßig lesen,

x_1 die Anzahl der Schüler, die nur die Zeitschrift "Technikus" regelmäßig lesen,

x_2 die Anzahl der Schüler, die nur die Zeitschrift "Fröhlichsein und Singen" regelmäßig lesen,

x_3 die Anzahl der Schüler die nur die Zeitschrift "Die Trommel" regelmäßig lesen,

x_4 die Anzahl der Schüler, die nur die Zeitschriften "Die Trommel" und "Technikus" regelmäßig lesen,

x_5 die Anzahl der Schüler, die nur die Zeitschriften "Technikus" und "Fröhlichsein und Singen" regelmäßig lesen,

x_6 die Anzahl der Schüler, die nur die Zeitschriften "Die Trommel" und "Fröhlichsein und Singen" regelmäßig lesen und

x_7 die Anzahl der Schüler, die alle drei der genannten Zeitschriften regelmäßig lesen.

I) Aus den genannten Informationen ergeben sich die folgenden Gleichungen:

(1) $\sum_{i=0}^{7} x_i = 300$	(2) $x_1 + x_4 + x_5 + x_7 = 120$	(3) $x_2 + x_5 + x_6 + x_7 = 90$
(4) $x_3 + x_4 + x_6 + x_7 = 180$	(5) $x_4 + x_7 = 60$	(6) $x_5 + x_7 = 16$
(7) $x_6 + x_7 = 24$	(8) $x_7 = 6$	

Aus Gleichung (8) und (7) ergibt sich $x_6 = 18$, aus Gleichung (8) und (6) ergibt sich $x_5 = 10$ und aus Gleichung (8) und (5) ergibt sich $x_4 = 54$. Damit ergibt sich weiter

$$x_3 = 180 - x_4 - x_6 - x_7 = 102 \quad x_2 = 90 - x_5 - x_6 - x_7 = 56$$
$$x_1 = 120 - x_4 - x_5 - x_7 = 50 \quad x_0 = 300 - \sum_{i=1}^{7} x_i = 4$$

Somit lesen $x_1 + x_2 + x_3 = 208$ Schüler genau eine der angegebenen Zeitschriften regelmäßig und $x_0 = 4$ lesen keine dieser Zeitschriften regelmäßig.

II) Sei nun s die Anzahl der Schüler und

a die Anzahl der Schüler, die die Zeitschrift "Technikus" regelmäßig lesen,

b die Anzahl der Schüler, die die Zeitschrift "Fröhlichsein und Singen" regelmäßig lesen,

c die Anzahl der Schüler, die die Zeitschrift "Die Trommel" regelmäßig lesen,

d die Anzahl der Schüler, die die Zeitschriften "Die Trommel" und "Technikus" regelmäßig lesen,

e die Anzahl der Schüler, die die Zeitschriften "Technikus" und "Fröhlichsein und Singen" regelmäßig lesen,

f die Anzahl der Schüler, die die Zeitschriften "Die Trommel" und "Fröhlichsein und Singen" regelmäßig lesen und

g die Anzahl der Schüler, die alle drei genannten Zeitschriften lesen.

Es ergeben sich folgende Gleichungen:

(1) $\sum_{i=0}^{7} x_i = s$	(2) $x_1 + x_4 + x_5 + x_7 = a$	(3) $x_2 + x_5 + x_6 + x_7 = b$
(4) $x_3 + x_4 + x_6 + x_7 = c$	(5) $x_4 + x_7 = d$	(6) $x_5 + x_7 = e$
(7) $x_6 + x_7 = f$	(8) $x_7 = g$	

Aus Gleichung (8) und (7) ergibt sich $x_6 = f - g$, aus Gleichung (8) und (6) ergibt sich $x_5 = e - g$ und aus Gleichung (8) und (5) ergibt sich $x_4 = d - g$. Damit ergibt sich weiter

$$x_3 = c - x_4 - x_6 - x_7 = c - (d - g) - (f - g) - g = c - d - f + g$$
$$x_2 = b - x_5 - x_6 - x_7 = b - (e - g) - (f - g) - g = b - e - f + g$$
$$x_1 = a - x_4 - x_5 - x_7 = a - (d - g) - (e - g) - g = a - d - e + g$$
$$\begin{aligned} x_0 &= s - \sum_{i=1}^{7} x_i \\ &= s - (a - d - e + g) - (b - e - f + g) - (c - d - f + g) - (d - g) - (e - g) - (f - g) - g \\ &= s - a - b - c + d + e + f - g \end{aligned}$$

Somit lesen $x_1 + x_2 + x_3 = a + b + c - 2(d + e + f) + 3g$ genau eine der Zeitschriften regelmäßig und $x_0 = s - a - b - c + d + e + f - g$ lesen keine der Zeitschriften regelmäßig.

2. Lösungsvariante

Alternative Lösung, die auf dem Prinzip der Inklusion und Exklusion beruht:

Wir verwenden die Bezeichnungen wir in der ersten Lösung.

I) Addieren wir die Anzahlen an Schülern, die die Zeitschrift "Technikus" lesen, die, die die Zeitschrift "Fröhlichsein und Singen" lesen und die, die die Zeitschrift "Die Trommel" regelmäßig lesen, so zählen wir diejenigen, die zwei der Zeitschriften regelmäßig lesen, doppelt, und diejenigen, die alle drei der genannten Zeitschriften regelmäßig lesen, dreifach.

   Da wir an der Anzahl an Schülern interessiert sind, die genau eine der Zeitschriften regelmäßig lesen, müssen wir das Doppelte der Anzahlen an Schülern, die zwei der Zeitschriften regelmäßig lesen, subtrahieren.

   Dadurch subtrahieren wir das 6-fache der Anzahl an Schülern, die alle drei Zeitschriften regelmäßig lesen und wir müssen insgesamt das 3-fache Addieren, um schließlich die Anzahl an Schülern, die genau eine der Zeitschriften lesen, zu erhalten; somit lesen

   $$120 + 90 + 180 - 2 \cdot (60 + 16 + 24) + 3 \cdot 6 = 208$$

   genau eine der Zeitschriften regelmäßig.

   Mit einer analogen Begründung ist die Anzahl der Schüler, die genau zwei der Zeitschriften regelmäßig lesen gegeben durch

   $$60 + 16 + 24 - 3 \cdot 6 = 82$$

   Somit ist die Anzahl der Schüler, die keine der Zeitschriften regelmäßig lesen, gegeben durch

   $$300 - 208 - 82 - 6 = 4$$

II) Wie in I) ergibt sich, dass

   $$a + b + c - 2(d + e + f) + 3g$$

   der Schüler genau eine der Zeitschriften regelmäßig lesen und dass

   $$d + e + f - 3g$$

   der Schüler genau zwei der Zeitschriften regelmäßig lesen.

Somit ist die Anzahl der Schüler, die keine der Zeitschriften regelmäßig lesen, gegeben durch

$$s - [a + b + c - 2(d + e + f) + 3g] - (d + e + f - 3g) - g = s - a - b - c + d + e + f - g$$

Aufgeschrieben und gelöst von Conny42

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972