4. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 041031:

Ein Fußgänger geht (mit konstanter Geschwindigkeit) um 9.00 Uhr von A nach dem $12,75$ km entfernten B. Auf der gleichen Straße fährt um 9.26 Uhr ein Straßenbahnzug von A nach B ab. Er überholt den Fußgänger um 9.36 Uhr und fährt nach 4 Minuten Aufenthalt in B wieder zurück. Dabei begegnet er dem Fußgänger um 10.30 Uhr.

a) Wieviel Kilometer legen der Fußgänger und der Straßenbahnzug durchschnittlich in der Stunde zurück?

b) In welcher Entfernung von A überholt der Straßenbahnzug den Fußgänger, und wo begegnet er ihm bei der Rückfahrt?

Aufgabe 041032:

Eine ganze Zahl schreibt sich im Dezimalsystem mit 300 Einsen und einer Anzahl von Nullen am Ende der Zahl.

Kann diese Zahl eine Quadratzahl sein?

Aufgabe 041033:

Gegeben sind Strecken von den Längen $a = 5$, $b = 4$ und $c = 1$.

Konstruieren Sie mit Zirkel und Lineal den algebraischen Ausdruck

$$x = \frac{a^2 + b^2}{3c}!$$

Aufgabe 041034:

Von sechs Schülern einer Schule, die an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teilnahmen, erreichten zwei die volle Punktzahl. Die Schüler seien zur Abkürzung mit A, B, C, D, E und F bezeichnet.

Auf die Frage, welche beiden Schüler die volle Punktzahl erreicht haben, wurden die folgenden fünf verschiedenen Antworten gegeben:

(1) A und C,

(2) B und F,

(3) F und A,

(4) B und E,

(5) D und A.

Nun wissen wir, daß in genau einer Antwort beide Angaben falsch sind, während in den übrigen vier Antworten jeweils genau eine Angabe zutrifft.

Welche beiden Schüler erreichten die volle Punktzahl?

Aufgabe 041035:

Ist die folgende Aussage richtig?

Für alle ganzen Zahlen a und b gilt: Wenn $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar ist, dann sind auch a und b durch 3 teilbar.

Aufgabe 041036:

Ein regelmäßiges Tetraeder habe die Höhe h. Ein Punkt im Innern des Tetraeders habe von den Seitenflächen die Abstände a, b, c und d.

Man beweise: $a + b + c + d = h$!

4. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 041031:

Sei v_1 die Geschwindigkeit des Fußgängers und v_2 die Geschwindigkeit der Straßenbahn. Sei s_1 die Strecke von A zum ersten Treffpunkt und s_2 die Strecke von B bis zum zweiten Treffpunkt. Dann gilt:

$$v_1 = \frac{s_1}{36} = \frac{12,75 - s_2}{90}$$
$$v_2 = \frac{s_1}{10} = \frac{12,75 + s_2}{60}$$

Die Lösungen für dieses lineare Gleichungssystem sind $s_1 = 3$ und $s_2 = 5,25$.

Damit gilt:

$$v_1 = \frac{3\text{km}}{\frac{3}{5}\text{h}} = 5\frac{\text{km}}{\text{h}}$$
$$v_2 = \frac{12,75\text{km} + 5,25\text{km}}{1\text{h}} = 18\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 041032:

Die Zahl n hat die Quersumme 300. Da 300 durch 3 aber nicht durch 9 teilbar ist, gilt dieses auch für n. Daher kann n keine Quadratzahl sein.

Aufgabe gelöst von TomTom314

2. Lösungsweg:

Nein, kann keine Quadratzahl sein. Ausschlaggebend sind die 300 Einsen.

$$111...111 = \frac{10^{300} - 1}{9}$$

$10^{300} - 1$ müsste eine Quadratzahl ergeben um $\sqrt{\frac{10^{300}-1}{9}}$ ganzzahlig bilden zu können.

Da $10^{300} = (10^{150})^2$ eine Quadratzahl ist, ist um eins verringert dies keine mehr, da der Abstand zu nächsten kleineren Quadratzahl $2 \cdot 10^{150} - 1$ wäre.

Die Anzahl der Nullen wäre gerade und damit eine Potenz von 100. Die Kurzdarstellung der Zahl ist also

$$\frac{(10^{300} - 1) \cdot 100^n}{9}$$

Die Wurzel aus dieser Zahl, wie oben beschrieben, scheitert wegen $10^{300} - 1$.

Im Fall, dass die Anzahl der Nullen nach den 300 Einsen ungerade ist, kann ebenso keine Quadratzahl entstehen.

Liegt 11...10 vor, so ist die Zahl durch 10 aber nicht durch 100 teilbar und kein Quadrat. Liegen mehr als eine Null, aber ungeradzahlig viele vor, so hat die Zahl die Form

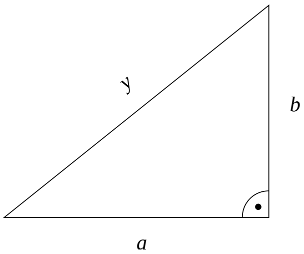
$$11...10 \cdot 10^{2k} \quad ; k \in Z$$

und deren Quadratwurzel die Gestalt $\sqrt{11...10} \cdot 10^k$ und ist damit keine Quadratzahl.

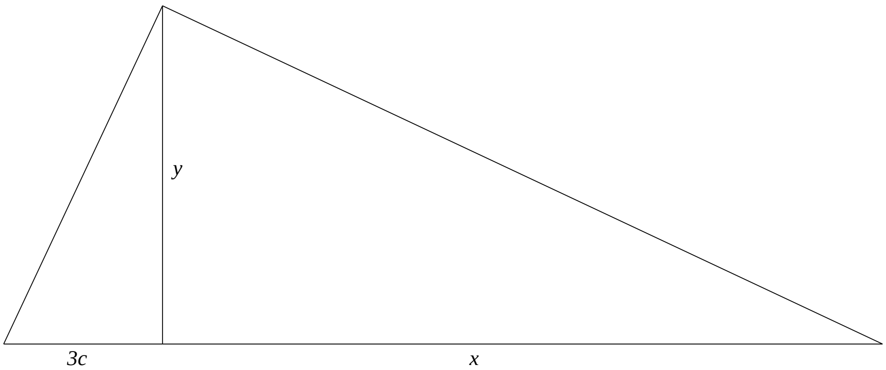
Aufgeschrieben und gelöst von pzktupel

Lösung 041033:

Man setze $a^2 + b^2 = y^2$. Dann ist y mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks konstruierbar.



Aus $x = \frac{y^2}{3c}$ erhält man $x \cdot 3c = y^2$. Dann ist x nach dem Höhensatz konstruierbar.



Aufgeschrieben von Günter Gebhard – Quelle: (2)

Lösung 041034:

Ein Anfang wäre es wohl Kandidat A zu betrachten, da dieser in 3 Aussagen vorkommt. Wenn A nun nicht volle Punktzahl hat, da muss von diesen 3 Aussagen eine mit beiden falschen Aussagen dabei sein.

Wenn nun A und C beide falsch sind, dann müssten also F und D volle Punktzahl erhalten haben. Dann wären aber B und E beide leer ausgegangen, und somit hätten wir bei Aussage (4) wieder 2 verkehrte. Das funktioniert also nicht.

Die gleiche Argumentation klappt auch für den Fall, dass A und F beide falsch sind und dass A und D beide falsch sind. A muss also volle Punktzahl erhalten haben und C, F und D nicht.

Es fehlt dann also noch die Aussage, in der beide Angaben nicht stimmen.

Nach Aussage (2) haben B und F volle Punktzahl erhalten und nach Aussage (4) B und E. B kann somit nicht volle Punktzahl erreicht haben, da in diesem Fall in beiden Aussagen eine Angabe richtig wäre.

Somit hat B nicht volle Punktzahl erreicht. Dann hat E volle Punktzahl erreicht.

Somit haben A und E volle Punktzahl erreicht.

Aufgeschrieben von Steffen Polster – Quelle: (2)

Lösung 041035:

Die Aussage ist richtig. Wir betrachten die Restklasse bei $a \mod 3$, diese sind 0, 1, 2. Betrachtet wird $a \equiv 0 \mod 3$ und $b \equiv 0 \mod 3$.

(1) $(a+0)^2 = a^2 \Rightarrow \mod 3$ Rest 0

(2) $(a+1) = a^2 + 2a + 1 \Rightarrow \mod 3$ Rest 1, da $a(a+2)$ Teiler 3 hat

(3) $(a+2) = a^2 + 4a + 4 \Rightarrow \mod 3$ Rest 1, da $a(a+4)$ Teiler 3 hat

(4) $(b+0)^2 = b^2 \Rightarrow \mod 3$ Rest 0

(5) $(b+1) = b^2 + 2b + 1 \Rightarrow \mod 3$ Rest 1, da $b(b+2)$ Teiler 3 hat

(6) $(b+2) = b^2 + 4b + 4 \Rightarrow \mod 3$ Rest 1, da $b(b+4)$ Teiler 3 hat

Man erkennt, dass nur für $a \equiv 0 \mod 3$ und $b \equiv 0 \mod 3$ die Addition von $a^2 + b^2$ durch 3 teilbar.

Aufgabe gelöst von pzktupel

2. Lösungsweg:

Wenn a nicht durch 3 teilbar ist, hat a die Gestalt $3n + 1$ oder $3n + 2$.

Durch Quadrieren der Gleichungen sehen wir, dass a^2 dann in beiden Fällen die Gestalt $3m + 1$ hat ($m = 9n^2 + 6n$ oder $m = 9n^2 + 12n$).

Wenn a und b beide nicht durch 3 teilbar sind, hat $a^2 + b^2$ die Gestalt $3N + 2$. Wenn a durch 3 teilbar und b nicht durch 3 teilbar ist, hat $a^2 + b^2$ die Gestalt $3N + 1$.

In beiden Fällen ist $a^2 + b^2$ nicht durch 3 teilbar. Also folgt aus "$a^2 + b^2$ durch 3 teilbar" bereits, dass a und b durch 3 teilbar sind.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Lösung 041036:

Das Volumen des Tetraeders ist gegeben durch

$$V = \frac{1}{3} G \cdot h$$

wobei G die Grundfläche bezeichnet. Durch einen Punkt im Inneren zerfällt der Tetraeder in 4 Teiltetraeder mit Grundfläche G und den Höhen a, b, c, d.

Da das ganze Tetraeder regelmäßig ist, haben alle 4 Teiltetraeder ebenfalls die Grundfläche G. Es gilt die Gleichung $V = V_a + V_b + V_c + V_d$, wobei V_* das Volumen des Teiltetraeders mit der entsprechenden Höhe ist. Nach Anwenden der Volumenformel erhalten wir

$$\frac{1}{3} G \cdot h = \frac{1}{3} G \cdot a + \frac{1}{3} G \cdot b + \frac{1}{3} G \cdot c + \frac{1}{3} G \cdot d$$

und nach Kürzen $h = a + b + c + d$.

Aufgeschrieben und gelöst von TomTom314

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Loesungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972