



4. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen





4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 040921:

In einer Abteilung eines Werkes soll ein neues, zeisparendes Arbeitsverfahren eingeführt werden. Wenn 4 Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten, erhöht sich die Produktion um 20 Prozent. Wenn 60 Prozent der Arbeiter der Abteilung dieses Verfahren anwenden, kann die Produktion auf das Zweieinhalbfache gesteigert werden.

- Wieviel Arbeiter hat die Abteilung?
- Auf wieviel Prozent würde sich die Produktion erhöhen, wenn alle Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten würden? (Alle Arbeiter der Abteilung führen die gleiche Tätigkeit aus.)

Aufgabe 040922:

Der ungarische Rechenkünstler Pataki berechnet das Produkt $95 \cdot 97$ auf folgende Weise:

- Er addiert die Faktoren. $95 + 97 = 192$
- Er streicht die erste Stelle der Summe. 92
- Er bildet die Differenz jedes der beiden Faktoren und der Zahl 100 und multipliziert diese beiden Zahlen miteinander. $5 \cdot 3 = 15$
- Er schreibt das Ergebnis von (3) hinter das Ergebnis von (2) und erhält 9215.

Untersuchen Sie, ob dieses Verfahren für alle Faktoren zwischen 90 und 100 gültig ist!

Aufgabe 040923:

Gegeben sind drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Um jeden dieser Punkte ist ein Kreis so zu konstruieren, daß sich diese Kreise paarweise außen berühren.

Aufgabe 040924:

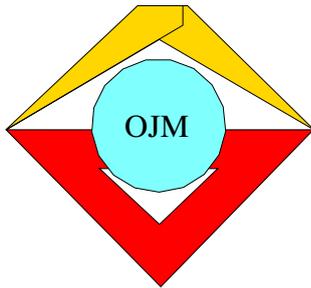
Jutta, Günter und Klaus nehmen an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teil.

- Sie arbeiten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) in den Räumen 48, 49, 50.
- Jutta und Günter sind gleichaltrig, Klaus ist ein Jahr älter als Jutta.
- Ihre drei Mathematiklehrer, Herr Adler, Herr Bär und Herr Drossel, führen in diesen drei Räumen während der Arbeit Aufsicht, keiner jedoch in dem Raum, in dem sein Schüler arbeitet.
- Herr Bär hat den gleichen Vornamen wie sein Schüler.



-
- (5) Die Nummer des Raumes, in dem Herr Drossel Aufsicht führt, entspricht dem Eineinhalbfachen seines Alters.
 - (6) Günters Raum hat eine höhere Nummer als der von Klaus.
 - (7) Die drei Schüler sind zusammen gerade so alt, wie die Nummer des Raumes angibt, in dem Jutta arbeitet.
 - (8) Jutta kennt Herrn Drossel nicht.

Welchen Vornamen hat Herr Bär? In welchem Raum führt er Aufsicht? (Bei der Altersangabe sind nur die vollen Jahre berücksichtigt worden.)



4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 040921:

a) Gegeben sind folgende Steigerungen:

4 Arbeiter \Rightarrow 20% Steigerung
60% der Arbeiter \Rightarrow 150% Steigerung

Gesucht ist die Anzahl a der Arbeiter der Abteilung. Dabei sei die Steigerung s genannt

Dann gilt

2 Arbeiter \Rightarrow 10% Steigerung
30 Arbeiter \Rightarrow 150% Steigerung
30 Arbeiter = 60% der Arbeiter \Rightarrow 100% = 50 Arbeiter

Die Abteilung hat 50 Arbeiter

b) 2 Arbeiter \Rightarrow 10% Steigerung
50 Arbeiter \Rightarrow 250% Steigerung

Also wäre die Produktion auf 350 Prozent erhöht.

Aufgeschrieben und gelöst von Christoph Schaller

Lösung 040922:

Es seien a die erste und b die zweite Zahl. Ferner gilt $90 < (a, b) < 100$.

Dann kann man auch schreiben: $a = 100 - x$, $b = 100 - y$ mit $x, y \in \mathbb{N}$ und $0 < (x, y) < 10$. Hiermit kann man die einzelnen Schritte wie folgt schreiben:

(1) $a + b = 100 - x + 100 - y$

(2) Wenn man nun die erste Stelle streicht hat das die Wirkung als würde man Einhundert abziehen, da zwei Zahlen zwischen 90 und 100 addiert immer eine Zahl zwischen 182 und 198 ergeben ($91+91$ und $99+99$) $\Rightarrow 100 - x - y$

(3) $(100 - a) \cdot (100 - b) = xy$

(4) $100 \cdot (100 - x - y) + x \cdot y =$ Darstellung, daß 2) vor 3) geschrieben wird; $x \cdot y$ sind auch tatsächlich nur die letzten beiden Ziffern, da beide Zahlen kleiner als 10 sein müssen und somit ihr Produkt kleiner als 100 ist.



$$a \cdot b = 10\,000 - 100x - 100y + xy \text{ nach Patakis Prinzip}$$
$$a \cdot b = (100 - x) \cdot (100 - y) = 10\,000 - 100x - 100y + xy$$

⇒ Patakis Prinzip gilt für alle Zahlen zwischen 90 und 100.

Aufgeschrieben und gelöst von Christoph Schaller

Lösung 040923:

Man bezeichnet die drei Punkte mit A , B und C und faßt sie als die Ecken eines Dreiecks mit den Seiten a , b , c auf. Die Radien der drei Kreise um A , B und C seien (in dieser Reihenfolge) x , y und z . Dann gilt:

$$x + y = c$$

$$y + z = a$$

$$z + x = b$$

Daraus folgen:

$$x = \frac{-a + b + c}{2}; \quad y = \frac{a - b + c}{2}; \quad z = \frac{a + b - c}{2}.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 040924:

Aus den Angaben (1) bis (8) folgt:

- (9) Herr Drossel führt Aufsicht in Raum 48. (wegen (1) und (5))
- (10) Jutta arbeitet in Raum 49. (wegen (1), (2) und (7))
- (11) Günter arbeitet in Raum 50, Klaus in 48. (wegen (1), (10) und (6))
- (12) Günter ist Schüler von Herrn Drossel. (wegen (8), (9) und (11))
- (13) Klaus ist Schüler von Herrn Bär. (wegen (12) und (4))
- (14) Jutta ist Schülerin von Herrn Adler. (wegen (12) und (13))
- (15) Herr Adler führt Aufsicht in Raum 50. (wegen (3), (9), (10), (14))
- (16) Herr Bär heißt Klaus und führt Aufsicht in Raum 49. (wegen (4), (13) und (9) und (15)).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)



Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission