4. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040831:

Vertauscht man die Ziffern einer zweistelligen Zahl n, so entsteht eine Zahl, die $\frac{8}{3}$ mal so groß wie n ist. Die Zahl n ist zu bestimmen.

Aufgabe 040832:

Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, wenn der Radius r des Inkreises und die Länge a einer Kathete gegeben sind, und beschreibe die Konstruktion!

Unter welchen Bedingungen ist die Konstruktion ausführbar?

Aufgabe 040833:

Von den 31 Schülern einer 4. Klasse können 21 schwimmen, 24 radfahren und 19 Schlittschuh laufen. Für einen Wettkampf werden Schüler gebraucht, die

a) schwimmen und radfahren,

b) schwimmen und Schlittschuh laufen,

c) radfahren und Schlittschuh laufen,

d) schwimmen und radfahren und Schlittschuh laufen können.

Wieviel Schüler der Klasse stehen jeweils bei a), b), c) und d) mindestens, wieviel höchstens zur Verfügung?

Aufgabe 040834:

Gegeben seien drei Strecken mit den Längen p_1, p_2 und r mit $p_1 < p_2$. Gesucht ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten die Längen p_1 bzw. p_2 haben und dessen Umkreis den Radius r hat!

a) Untersuche, unter welchen Bedingungen es solche Trapeze gibt, und beschreibe die Konstruktion!

b) Führe die Konstruktion für den Fall $p_1 = 3$ cm, $p_2 = 5$ cm und $r = 4$ cm aus!

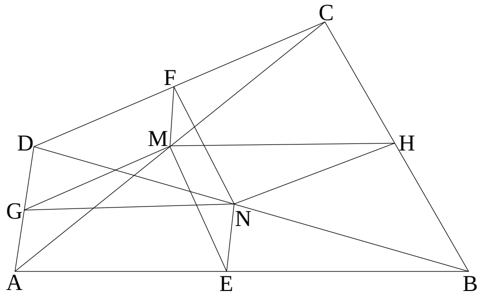
Aufgabe 040835:

Gegeben sind vier aufeinander folgende natürliche Zahlen, die in ihrer Reihenfolge a, b, c und d genannt sind.

a) Welches Produkt ist größer, ac oder bd ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!

b) Welches Produkt ist größer, bc oder ad ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!

Aufgabe 040836:



Es ist folgender Satz zu beweisen:

In einem konvexen Viereck $ABCD$ seien keine zwei Seiten parallel. Dann sind die Mittelpunkte E, F bzw. G, H zweier Gegenseiten und die Mittelpunkte M, N der Diagonalen die Eckpunkte eines Parallelogrammes.

4. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 040831:
Es gilt

$$\frac{8}{3}(10x + y) = 10y + x$$
$$7x = 2y$$

Da x und y natürliche Zahlen kleiner als 10 sind, folgt $x = 2$ und $y = 7$. Die gesuchte Zahl ist demnach 27.

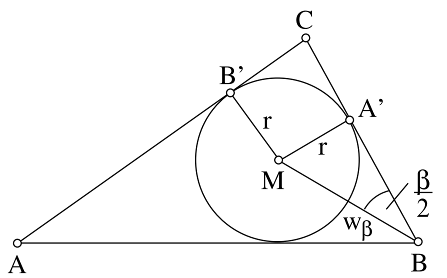
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 040832:
Konstruktionsbeschreibung:

a) Ich zeichne a und erhalte C und B. Um C schlage ich mit r einen Kreisbogen und erhalte A' und auf der Senkrechten zu a in C B'. Um A' und B' schlage ich mit r die Kreisbögen und erhalte M.

   $\overline{MB}$ ist Winkelhalbierende w_β. Ich konstruiere β in B und erhalte A.

b) Die Konstruktion ist nur dann ausführbar, wenn gilt $a > 2r$.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 040833:
Maximal stehen zur Verfügung

a) 21, da es nur 21 Schwimmer gibt,

b) 19, 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt,

c) 19, 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt,

d) 19, 19, da es nur 19 Schlittschuhläufer gibt.

Minimal stehen zur Verfügung

a) 14 wegen 24+21-31=14,

b) 9 wegen 21+19-31=9,

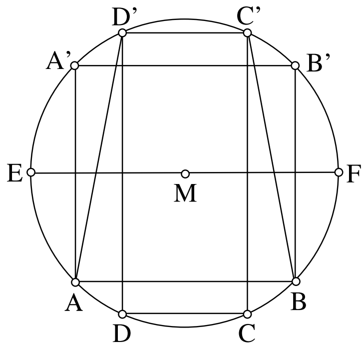
c) 12 wegen 24+19-31=12,

d) 2 wegen 24+21+19-31-31=2.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 040834:

a) Angenommen, $ABCD$ sei eines der gesuchten Trapeze, wobei $\overline{AB} = p_2$ und $\overline{CD} = p_1$ ist. Dann gilt $p_2 \leq 2r$ als Bedingung für die Konstruktion.



b) *Konstruktionsbeschreibung:*

Wir zeichnen um M einen Kreis mit dem Radius r und dem Durchmesser $\overline{EF}$. Auf $\overline{EF}$ konstruieren wir zwei Strecken p_1 bzw. p_2 so, daß M sie halbiert. Durch die Endpunkte dieser Strecken zeichnen wir die Senkrechten zu $\overline{EF}$ und erhalten A und A' bzw. B und B' bzw. C und C' bzw. D und D'.

Die gesuchten Trapeze sind dann $ABCD$, $ABC'D'$, $A'B'CD$, $A'B'C'D'$, von denen je zwei kongruent sind. Für $p_2 = 2r$ entstehen nur zwei kongruente Trapeze.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 040835:

Es seien die vier Zahlen a, b, c, d, dabei gilt $b = a + 1$, $c = a + 2$ und $d = a + 3$

a)
$$ac = a \cdot (a + 2) = a^2 + 2a$$
$$bd = (a + 1) \cdot (a + 3) = a^2 + 4a + 3$$

Daraus folgt $a \cdot c < b \cdot d$, die Differenz beträgt $2a + 3$.

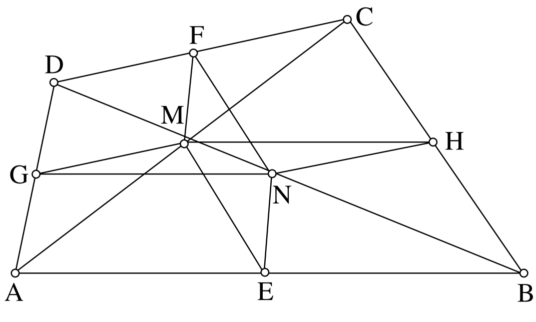
b)
$$bc = (a + 1)(a + 2) = a^2 + 3a + 2$$
$$ad = a \cdot (a + 3) = a^2 + 3a$$

Daraus folgt $b \cdot c > a \cdot d$, die Differenz beträgt 2.

Aufgeschrieben und gelöst von Jue Xiang Wang

Lösung 040836:

Der Beweis stützt sich auf den Satz: "In einem Dreieck verläuft die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte zweier Seiten parallel zur dritten Dreiecksseite."



Behauptung: $\overline{GN} \parallel \overline{MH}$ und $\overline{GM} \parallel \overline{NH}$

Voraussetzung: E, F, G und H sind die Mittelpunkte der 4 Seiten des Vierecks. M und N sind die Mittelpunkte der beiden Diagonalen.

Beweis:

$\overline{GN} \parallel \overline{AB}$ im Dreieck ABD; $\overline{MH} \parallel \overline{AB}$ im im Dreieck ABC; folglich: $\overline{GN} \parallel \overline{MH}$

$\overline{GM} \parallel \overline{DC}$ im Dreieck ADC; $\overline{NH} \parallel \overline{DC}$ im im Dreieck BDC; folglich: $\overline{GM} \parallel \overline{NH}$

Da im Viereck $GNHM$ die Gegenseiten zueinander parallel sind, handelt es sich um ein Parallelogramm. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.