4. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

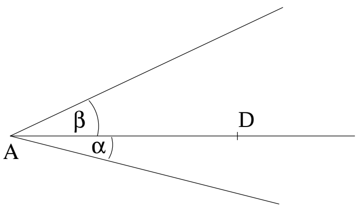
Aufgabe 040821:

Ein beliebiges Trapez $ABCD$ ist in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln (Konstruktion!).

Aufgabe 040822:

Bilde aus einer beliebigen dreistelligen Zahl die Zahl mit der umgekehrten Ziffernfolge, und beweise, daß die Differenz beider Zahlen durch 99 teilbar ist!

Aufgabe 040823:



Gegeben sind die beiden anliegenden Winkel α und β mit dem Scheitelpunkt A und Punkt D auf dem gemeinsamen Schenkel (s. Abb.).

a) Konstruiere aus dieser Figur das Dreieck ABC derart, daß $\overline{AD}$ Seitenhalbierende ist!

b) Unter welcher Bedingung wird das Dreieck ABC gleichseitig?

Aufgabe 040824:

Peter ist im Ferienlager. Er will für seine Gruppe Brause zu 21 Pf je Flasche einkaufen und nimmt dazu leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (30 Pf für jede der leeren Flaschen) möchte er möglichst viele Flaschen Brause kaufen. Für jede Flasche müssen erneut 30 Pf Pfand hinterlegt werden. Es stellt sich heraus, daß er 6 Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Wieviel leere Flaschen hatte Peter mitgenommen? (Es gibt nicht nur eine Lösung.)

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 040821:

Man konstruiert das Rechteck aus der Mittellinie und der Höhe des Trapezes.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 040822:

Eine beliebige dreistellige Zahl x und die durch umgekehrte Ziffernfolge entstehende nicht notwendigerweise dreistellige Zahl y lassen sich wie folgt darstellen:

$$x = 100a + 10b + c$$
$$y = 100c + 10b + a$$

mit $0 < a \leq 9$, $0 \leq b \leq 9$ und $0 \leq c \leq 9$, damit x dreistellig ist.

Die Differenz der beiden Zahlen soll durch 99 teilbar sein. Also:

$$\begin{aligned} x - y &= (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) \\ x - y &= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a \\ x - y &= 99a - 99c \\ x - y &= 99 \cdot (a - c) \end{aligned}$$

Somit ist 99 Teiler von $x - y$.

Anmerkung: Über den Fall, ob auch negative Zahlen erlaubt sind, mag man streiten können. Ein Beweis in dem Falle wäre analog zu führen.

Aufgeschrieben und gelöst von Thomas Kugel

Lösung 040823:

a) Man verlängert $\overline{AD}$ über D hinaus um sich selbst und erhält dadurch Punkt E. Dann konstruiert man das Parallelogramm $ABEC$

b) Genau dann, wenn $\alpha = \beta$ gilt, ist $ABEC$ ein Rhombus und damit ΔABC gleichschenklig. Das Dreieck ABC ist daher genau dann gleichseitig, wenn $\alpha = \beta = 30°$ gilt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 040824:

Peter muß den Inhalt der gekauften Flaschen von dem Erlös der 6 nicht zurückerhaltenen Flaschen bezahlen. Wegen $180 : 21 = 8\frac{12}{21}$ kann er höchstens 8 Flaschen gekauft haben.

1. Lösung: Peter hatte 14 Flaschen mit und erhält 12 Pf zurück.

2. Lösung: Peter hatte 13 Flaschen mit und erhält 33 Pf zurück.

Hätte Peter 12 Flaschen mitgehabt, so hätte er 7 Flaschen kaufen können, also $(n - 5)$ statt nur $(n - 6)$, was der Aufgabe widerspricht.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.