4. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1964/1965

Aufgaben und Lösungen

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040721:

Beweise, daß die Summe von 7 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, von denen die kleinste durch 3 teilbar ist, durch 21 teilbar ist!

Aufgabe 040722:

In einer 7. Klasse erhielt zum Abschluß des letzten Schuljahres im Fach Mathematik kein Schüler die Zensur "5", jeder neunte Schüler erhielt die Zensur "1", jeder dritte die Zensur "2" und jeder sechste die Zensur "4".

Über die Schülerzahl n ist bekannt: $20 < n < 40$.

Wieviel Schüler erhielten die Zensur "3"?

Aufgabe 040723:

In einem Dreieck seien die Maßzahlen der Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.

Berechne den Umfang des Dreiecks!

Aufgabe 040724:

Über den Seiten eines Parallelogramms $ABCD$ werden die gleichseitigen Dreiecke ABE, BCF, CDG und ADH so errichtet, daß die Dreiecksflächen außerhalb des Parallelogramms liegen.

Es ist zu beweisen, daß E, F, G und H die Eckpunkte eines Parallelogramms sind.

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 040721:

Zunächst nehmen wir uns die kleinste der Zahlen, welche durch 3 teilbar ist und bezeichnen sie mit $3n$ ($n \in \mathbb{N}$). Damit ist sichergestellt, daß sie durch 3 teilbar ist.

Dann können wir folgende Formel für die Summe der Zahlen ableiten:

$$\begin{aligned} 3n + 3n + 1 + 3n + 2 + 3n + 3 + 3n + 4 + 3n + 5 + 3n + 6 &= 21\,n + 21 \\ &= 21 \cdot (n+1) \end{aligned}$$

Da die Summe als $21 \cdot (n+1)$ dargestellt werden kann ist sie durch 21 teilbar, denn würde man

$$21 \cdot (n+1) : 21 = n + 1$$

rechnen, ist das Ergebnis eine natürliche Zahl, woraus folgt daß die Summe durch 21 teilbar ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Christoph Schaller

Lösung 040722:

Es gebe n Schüler in der Klasse, dann muß n eine natürliche Zahl sein und laut Aufgabenstellung der Bedingung $20 < n < 40$ genügen.

Jeder neunte Schüler $= \frac{1}{9}n$

Jeder dritte Schüler $= \frac{1}{3}n$

Jeder sechste Schüler $= \frac{1}{6}n$

Es gebe x Schüler mit der Note 3, dann muß x eine natürliche Zahl sein. Es muß ferner gelten:

$$\begin{aligned} n &= \frac{1}{9}n + \frac{1}{3}n + \frac{1}{6}n + x \\ &= \frac{11}{18}n + x \\ x &= \frac{7}{18}n \end{aligned}$$

n muß ein Vielfaches von 18 sein, damit der Term $\frac{11}{18}n$ ebenso ganzzahlig wie die linke Seite der Gleichung wird. Da gelten soll $20 < n < 40$, muß $n = 36$ sein.

Daraus folgt: $x = \frac{7}{18} \cdot 36 = 14$ Schüler haben die Zensur "3" (unter Voraussetzung, daß es zu diesem Zeitpunkt die Note 6 noch nicht gab).

Aufgeschrieben und gelöst von Jue Xiang Wang

Lösung 040723:

Alle Angaben über die Längen der Dreiecksseiten erfolgen auch ohne ausdrückliche Nennung in der Längeneinheit cm.

Gegeben sind $a = 6$ und $b = 4$ sowie für c: $c \in \mathbb{N}$, $2|c$, $c \neq a$ und $c \neq b$.

Gesucht ist der Dreiecksumfang u.

Nach der Dreiecksungleichung muß gelten

$$a + b > c \Rightarrow 6 + 4 > c \qquad (1)$$
$$a + c > b \Rightarrow 6 + c > 4 \qquad (2)$$
$$b + c > a \Rightarrow 4 + c > 6 \qquad (3)$$

Nach (1) muß gelten $c = 2$ oder $c = 8$. Damit ist auch (2) erfüllt; nach (3) muß $c > 2$ sein, woraus folgt: $c = 8$. Damit ergibt sich für den Umfang $u = a + b + c = 4 + 6 + 8 = 18$.

Der Dreiecksumfang beträgt 18 cm.

Aufgeschrieben und gelöst von Jue Xiang Wang

Lösung 040724:

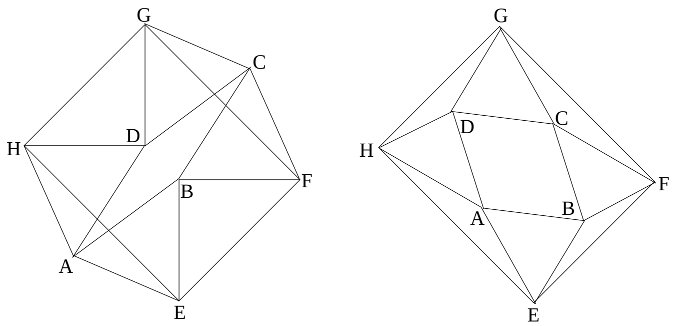
Ein Viereck ist ein Parallelogramm, wenn seine gegenüberliegenden Seiten gleiche Längen besitzen.

1. Möglichkeit

Man kann die Längengleichheit gegenüberliegender Seiten des Vierecks $EFGH$ dadurch beweisen, daß die gesamte Figur bei einer Drehung um den Schnittpunkt der Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ um 180° mit sich zur Deckung kommt.

2. Möglichkeit

Man zeigt die Längengleichheit gegenüberliegender Seiten im Viereck $EFGH$ etwa nach dem Kongruenzsatz SWS, angewendet auf die Dreieckspaare EFB, GHD und CGF, AEH. (Fallunterscheidung nötig!) Die Punkte A und C können auch auf den Seiten $\overline{HE}$ bzw. $\overline{GF}$ liegen.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.