3. Mathematik Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

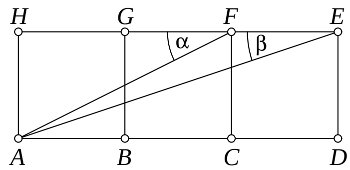
Aufgabe 031041:

Ein Radfahrer fährt mit konstanter Geschwindigkeit über eine Brücke. Als er $\frac{3}{8}$ des Weges zurückgelegt hat, trifft er einen ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkommenden Radfahrer.

Mit welcher Geschwindigkeit fuhren beide, wenn ein mit 80 km/h auf der gleichen Straße fahrendes Auto den einen am Anfang und den anderen am Ende der Brücke traf?

Aufgabe 031042:

Gegeben sei ein aus drei kongruenten Quadraten zusammengesetztes Rechteck lt. Abbildung. Es ist zu beweisen, daß $\alpha + \beta = 45°$ ist!



Aufgabe 031043:

Gegeben seien die Zahlen $Z_1 = \sqrt{7} + \sqrt{10}$ und $Z_2 = \sqrt{3} + \sqrt{19}$.

Stellen Sie ohne Berechnung der Wurzeln fest, welche von beiden Zahlen größer ist!

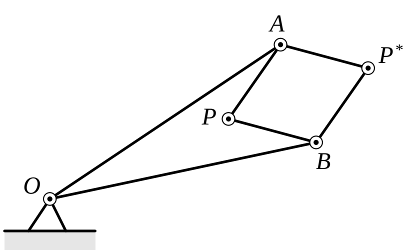
Aufgabe 031044:

Wieviel Endnullen hat das Produkt

$$p_1^1 \cdot (p_1^2 \cdot p_2^1) \cdot (p_1^3 \cdot p_2^2 \cdot p_3^1) \cdots (p_1^{100} \cdot p_2^{99} \cdot p_3^{98} \cdots p_{98}^3 \cdot p_{99}^2 \cdot p_{100}^1)\,?$$

Dabei sind $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{100}$ die ersten hundert Primzahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge.

Aufgabe 031045:



Der „Inversor“ von Peaucellier besteht aus zwei in O gelenkig verbundenen Stäben $\overline{OA}$ und $\overline{OB}$ (mit $\overline{OA} = \overline{OB}$), die in A und B mit einen Gelenkrhombus $APBP^*$ verbunden sind (vgl. Abbildung). Es sei $\overline{OA} > \overline{AP}$.

Man denke sich den Punkt O in der Ebene drehbar fixiert und zeige, daß das Produkt der Entfernungen $\overline{OP} = r$ und $\overline{OP}^* = r^*$ eine von der Stellung des Mechanismus unabhängige Konstante ist.

Aufgabe 031046:

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Wenn in einem Dreieck der Mittelpunkt des Umkreises und der Mittelpunkt des Inkreises zusammenfallen, so ist das Dreieck gleichseitig.

3. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (DDR-Olympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 031041:
Bezeichnungen:

1. Radfahrer: x,
2. Radfahrer: y,
Länge der Brücke b,
Geschwindigkeit der Radfahrer: $v_x = v_y$
und des Autos: v_A,
Weg: s,
Zeit: t

Zum Zeitpunkt t_0 fährt y los und zum Zeitpunkt t_1 x. Zum Zeitpunkt t_2 begegnen sich x und y, d.h.

$$s_{x,t_2} + s_{y,t_2} = b.$$

Da $s_{x,t_2} = (3/8) \cdot b$ ist damit $s_{y,t_2} = (5/8) \cdot b$.

Schließlich erreicht zum Zeitpunkt t_3 y das Ziel, also $s_{y,t_3} = b$ und damit $s_{x,t_3} = (6/8) \cdot b$. x gelangt zum Zeitpunkt t_4 zur anderen Seite der Brücke: $s_{x,t_4} = b$, d.h. $s_{x,t_4-t_3} = (1/4) \cdot b$

Fall 1:

Das Auto fahre in gleicher Richtung wie x, fährt damit bei t_3 los und kommt bei t_4 an, legt eine Strecke von $s_{A,t_4-t_3} = b$ zurück, d.h. es gilt $v_A = s_{A,t_4-t_3}/(t_4 - t_3) = b/(t_4 - t_3)$ und $v_x = s_{x,t_4-t_3}/(t_4 - t_3) = (b/4)/(t_4 - t_3)$. Damit ergibt sich $v_x = v_A/4 = 20km/h$.

Fall 2:

Das Auto fahre in entgegengesetzter Richtung wie x, fährt damit bei t_0 los und kommt bei t_1 an und legt wieder eine Strecke von $s_{A,t_1-t_0} = b$ zurück, d.h. es gilt $v_A = s_{A,t_1-t_0}/(t_1 - t_0) = b/(t_1 - t_0)$ und $v_y = s_{y,t_1-t_0}/(t_1 - t_0) = (b/4)/(t_1 - t_0)$. Damit ergibt sich ebenfalls $v_y = v_x = v_A/4 = 20km/h$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 031042:
Beweis:

Spiegeln wir die drei Quadrate an der unteren Kante, so erkennen wir, dass die rechtwinkligen Dreiecke AHF und EFN kongruent sind (z. B. SSS).

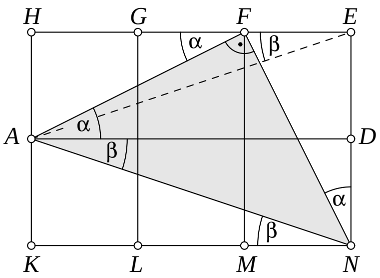
Daher ist ΔAFN gleichschenklig mit den Basiswinkeln

$$\sphericalangle FNA = \sphericalangle FAN = \sphericalangle FAD + \sphericalangle DAN.$$

$\alpha = \sphericalangle HFA = \sphericalangle FAD$ und $\beta = \sphericalangle DAN = \sphericalangle ANK$ sind jeweils Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen, so dass aus obiger Gleichung

$$\sphericalangle FNA = 90° - \alpha - \beta = \sphericalangle FAN = \alpha + \beta$$

folgt. Daraus ergibt sich unmittelbar die Behauptung $\alpha + \beta = 45°$. □



Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 031043:

Es gilt $27 < 20 \cdot 7 = 20\sqrt{49} < 20\sqrt{57}$. Also ist

$$(2\sqrt{70})^2 = 280 = 25 + 27 + 228 < 25 + 20\sqrt{57} + 4 \cdot 57 = (5 + 2\sqrt{3 \cdot 19})^2.$$

Somit ist $2\sqrt{7 \cdot 10} < 5 + 2\sqrt{3 \cdot 19}$ bzw.

$$(\sqrt{7} + \sqrt{10})^2 = 7 + 2\sqrt{7 \cdot 10} + 10 < 3 + 2\sqrt{3 \cdot 19} + 19 = (\sqrt{3} + \sqrt{19})^2.$$

Daraus folgt $\sqrt{7} + \sqrt{10} < \sqrt{3} + \sqrt{19}$ und $Z_1 < Z_2$.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 031044:

Die Anzahl der Endnullen hängt von der Anzahl der Faktoren $p_1 = 2$ und $p_3 = 5$ ab; denn nur das Produkt der beiden Primzahlen 2 und 5 liefert eine Null.

Im angegebenen Produkt kommt die Zahl 2 genau $(1 + 2 + 3 + \cdots + 100)$mal, die Zahl 5 genau $(1 + 2 + 3 + \cdots + 98)$mal als Faktor vor.

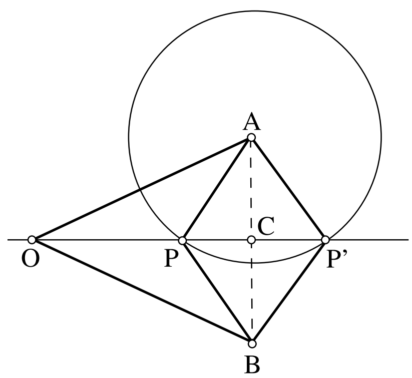
Also hat die Zahl genau $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 = 98 \cdot 99/2 = 4851$ Endnullen.

Aufgeschrieben von Burkhard Thiele – Quelle: (11)

Lösung 031045:

1. Lösung

Man betrachte den Mechanismus in einer fixierten Stellung, bei der $A \neq B$ und $P \neq P'$ ist. Da die beiden Vierecke $AOBP'$ und $APBP'$ Drachenvierecke sind, gilt für ihre Diagonalen $AB \perp OP'$ und $AB \perp PP'$,und demnach liegen O, P und P' auf derselben Geraden. Der Schnittpunkt dieser Geraden mit g_{AB} ist der Schnittpunkt der Diagonalen des Rhomabus $APBP'$ und liegt daher auf AB. Er werde mit C bezeichnet.



Der Punkt O liegt außerhalb der Strecke PP'.

Läge O auf PP', so hätte die Größe eines der beiden Winkel $\sphericalangle AOP$, $\sphericalangle AOP'$ einen Wert, der größer oder gleich 90° ist, da ihre Summe 180° beträgt.

Daher wäre in einem der Dreiecke POA, $P'OA$ de Winkel mit dem Scheitel O der größte im betreffenden Dreieck. Folglich wäre PA oder $P'A$ die längste Seite im Dreieck, was wegen der Voraussetzung $|P'A| = |PA| < |OA|$ nicht möglich ist.

Daher gilt wegen $|PC| = |P'C|$

$$|OP| \cdot |OP'| = (|OC| - |CP|)(|OC| + |CP|) = |OC|^2 - |CP|^2;$$

ferner ist nach dem Satz des PYTHAGORAS

$$\begin{aligned} |OC|^2 &= |OA|^2 - |AC|^2 \text{ und} \\ |CP|^2 &= |PA|^2 - |AC|^2 \text{ woraus sich ergibt, daß} \\ |OP| \cdot |OP'| &= |OA|^2 - |PA|^2 \qquad (1) \end{aligned}$$

gilt, also $|OP| \cdot |OP'|$ nicht von der Stellung des Mechanismus abhängt.

Bemerkung: In den Grenzfällen $A = B$ oder $P = P'$ ist $APBP'$ kein Rhombus. Es gilt aber trotzdem (1); denn im Fall $A = B$ liegen P und P' auf der Geraden g_{OA}, und dann gilt:

$$|OP| \cdot |OP'| = (|OA| - |PA|)(|OA| + |PA|) = |OA|^2 - |PA|^2,$$

und im Fall $P = P'$ ist P Fußpunkt der Höhe auf AB im gleichschenkligen Dreieck AOB, und es folgt aus dem Satz des PYTHAGORAS

$$|OP| \cdot |OP'| = |OP|^2 = |OA|^2 - |PA|^2.$$

2. Lösung

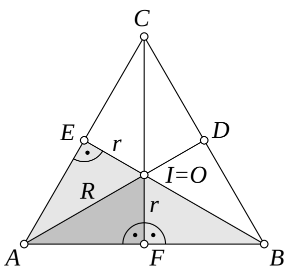
O.B.d.A. kann angenommen werden, daß OA festliegt. O, P und P' liegen auf derselben Geraden (siehe erste Lösung), welche Sekante (im Grenzfall Tangente) des Kreises k mit dem Radius $|PA|$ um A ist. Die Behauptung folgt dann aus dem Sekantentangentensatz:

$$|OP| \cdot |OP'| = |OQ|^2,$$

wenn Q der Berührungspunkt einer Tangente von O an k ist.

Aufgeschrieben von Eckard Specht – Quelle: (11)

Lösung 031046:



Beweis: Seien D, E und F die Fußpunkte der Lote vom Inkreismittelpunkt I des Dreiecks auf den Seiten BC, CA bzw. AB.

Vom Inkreismittelpunkt darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass die Abstände $ID = IE = IF = r$ untereinander gleich sind und dem Inkreisradius r entsprechen. Dann folgt aus dem Kongruenzsatz SSW, dass z. B. die beiden rechtwinkligen Dreiecke AIE und AIF kongruent sind.

Fällt nun nach Voraussetzung der Umkreismittelpunkt O mit I zusammen, gilt auch $IA = IB = R$, da O gleiche Abstände (d. i. der Umkreisradius R) zu den Eckpunkten des Dreiecks hat.

Somit sind nach SSW auch die Dreiecke AIF und BIF kongruent.

Diese Argumentation lässt sich fortführen, bis wir wieder beim Dreieck AIE ankommen und feststellen, dass alle sechs Teildreiecke kongruent sind, und das Dreieck mithin gleichseitig ist. □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag