3. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031031:

Man löse die Gleichung $\lg(2x+1) - \lg x = 2$!

Aufgabe 031032:

Zwei Geraden schneiden einander rechtwinklig im Punkt A. Gegeben sei ferner eine Strecke $\overline{XY} = 6$ cm, deren Endpunkte auf je einer der beiden Geraden liegen.

Bestimmen Sie den geometrischen Ort der Schwerpunkte S aller möglichen Dreiecke AXY! (X und Y sind stets von A verschieden.)

Aufgabe 031033:

Zwei Schüler erhalten die Aufgabe, zwei Zahlen a und b miteinander zu multiplizieren ($a > 0$, $b > 0$).

Zur Probe dividieren sie das Produkt durch den kleineren Faktor. Dabei erhält der 1. Schüler 575 Rest 227. Der 2. Schüler erhält 572 Rest 308. Jeder hatte nämlich bei der Addition der Teilprodukte vergessen, eine 1 zu addieren, aber jeder an einer anderen Stelle. Daher hatte der 1. Schüler im Ergebnis 100 zu wenig und der 2. Schüler 1 000 zu wenig erhalten.

Wie heißen die Zahlen a und b?

Aufgabe 031034:

Man zeige, daß für jede natürliche Zahl n der Term $n^3 + 11n$ durch 6 teilbar ist!

Aufgabe 031035:

Einem Kreis sind drei einander berührende Kreise mit dem gleichen Radius r einbeschrieben. Drei kleinere Kreise mit dem Radius x sind so eingezeichnet, daß sie je zwei der Kreise mit r sowie den umhüllenden Kreis berühren.

Es ist x rechnerisch zu bestimmen, wenn r gegeben ist!

Aufgabe 031036:

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Paare (x, y), für die gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad x > 2,\ y > 2\,!$$

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

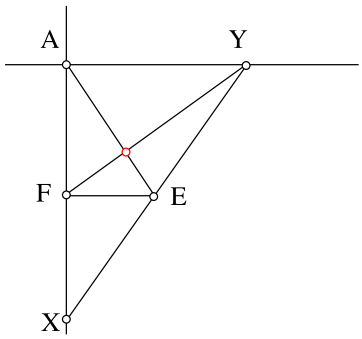
Lösung 031031:

Mit Hilfe der Logarithmengesetze und der Tatsache, dass $\lg x = 2$ nur für x=100 gilt, folgt:

$$\begin{aligned} \lg(2x+1) - \lg x &= 2 \\ \lg \frac{2x+1}{x} &= 2 \\ \frac{2x+1}{x} &= 100 \\ x &= \frac{1}{98} \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuel Naumann

Lösung 031032:



Der Schwerpunkt eines beliebigen Dreiecks ergibt sich aus dem Schnitt seiner Seitenhalbierenden.

Sei ΔAXY ein Dreieck, das die Voraussetzungen erfüllt, E der Punkt, der XY halbiert und F das Lot von E auf AX.

Dann folgt aus dem Strahlensatz die Beziehung $\frac{AX}{FX} = \frac{XY}{EX} = 2$. D.h. $AX = 2FX$. Das Dreieck ΔAXE ist somit gleichschenklig. In allen Dreiecken ΔAXY, gilt also: $AE = EX = 3\,\text{cm}$.

Der Schwerpunkt S eines Dreiecks ΔAXY liegt auf der Strecke AE und teilt diese bekanntermaßen im Verhältnis $2:1$.

Somit liegen alle möglichen Schwerpunkte S auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt A und dem Radius $r = 2\,\text{cm}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuel Naumann

Lösung 031033:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei b die kleinere Zahl. Dann ergibt sich aus den Angaben folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 575b + 227 &= ab - 100 \\ 572b + 308 &= ab - 1000 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem kann man beispielsweise lösen, wenn man die erste Gleichung nach b umstellt. Man erhält $b = -\frac{327}{575-a}$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, führt das nach äquivalenten Umformungen auf die Lösung $a = 576$.

Daraus ergibt sich durch die Beziehung $b = -\frac{327}{575-a} = 327$.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuel Naumann

Lösung 031034:

Da $6 = 2 \cdot 3$ und 2 und 3 teilerfremd sind, ist zu zeigen, dass $3|(n^3 + 11n)$ und $2|(n^3 + 11n)$.

Der Term $n^3 + 11n$ lässt sich aber als $n \cdot (n^2 + 11)$ schreiben. Es ist nun nachzuweisen, dass 2 entweder n oder $n^2 + 11$ teilt und dass 3 entweder n oder $n^2 + 11$ teilt.

Wenn 2 kein Teiler von n ist, dann lässt sich n durch $n = 2p + 1$ darstellen, wobei p eine natürliche Zahl ist. Daraus folgt:

$$n^2 + 11 = 4p^2 + 4p + 12 = 2 \cdot (2p^2 + 2p + 6) \quad \Longrightarrow \quad 2|(n^2 + 11)$$

Wenn 3 kein Teiler von n ist, dann lässt n beim Teilen durch 3 den Rest 1 oder den Rest 2. n lässt sich also darstellen durch $n = 3p + 1$ oder $n = 3p + 2$, wobei p jeweils wieder eine natürliche Zahl ist.

Im ersten Fall gilt:

$$n^2 + 11 = 9p^2 + 6p + 12 = 3 \cdot (3p^2 + 2p + 4) \quad \Longrightarrow \quad 3|(n^2 + 11)$$

Im zweiten Fall gilt:

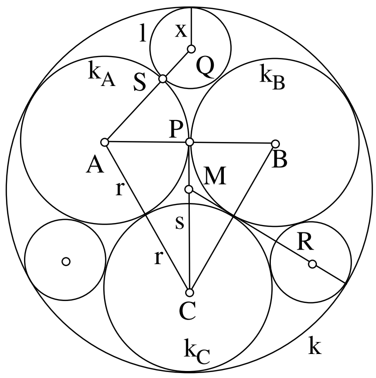
$$n^2 + 11 = 9p^2 + 12p + 15 = 3 \cdot (3p^2 + 4p + 5) \quad \Longrightarrow \quad 3|(n^2 + 11)$$

Das heißt: in jedem Fall ist $n^3 + 11n$ durch 2 und durch 3 und damit durch 6 teilbar.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuel Naumann

Lösung 031035:

Seien A, B bzw. C die Mittelpunkte der Kreise k_A, k_B bzw. k_C mit dem Radius r.



Der Abstand des Mittelpunktes M des Kreises k, in den diese drei Kreise einbeschrieben sind, zu den Punkten A, B und C ist aufgrund der Symmetrie gleich. Damit ist M Schwerpunkt des Dreiecks ΔABC.

Der Radius R des Kreises k ergibt sich nun z.B. durch $R = MA + r$.

Da das Dreieck ΔABC gleichseitig ist und seine Seitenlänge a durch $a = 2r$ bestimmt ist, berechnet sich die Länge s einer Seitenhalbierenden mit Hilfe des Satzes von Phythagoras:

$$s = \sqrt{(2r)^2 - r^2} = \sqrt{3}r.$$

Da M Schwerpunkt von $\triangle ABC$ ist, teilt M bekanntermaßen die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1. Damit hat die Strecke MA eine Länge von $MA = \frac{2}{\sqrt{3}}r$. Deshalb gilt nun für R:

$$R = MA + r = (1 + \frac{2}{\sqrt{3}})r.$$

Andererseits berühren sich k_A und k_B in einem Punkt P. Sei Q der Mittelpunkt des Kreises l mit Radius x, der k_A in einem Punkt S und k_B berührt. Dann ergibt sich der Radius R von k aus $R = MP + PQ + x$. Da $AP = r$ erhält man über den Satz des Phythagoras

$$MP = \sqrt{MA^2 - AP^2} = \frac{r}{\sqrt{3}}.$$

Desweiteren gilt, dass $AQ = r + x$. Daraus folgt wieder mit Hilfe des Satzes des Phythagoras:

$$PQ = \sqrt{AQ^2 - AP^2} = \sqrt{2rx + x^2}.$$

Man findet für R also eine zweite Darstellung durch:

$$R = MP + PQ + x = \frac{r}{\sqrt{3}} + \sqrt{2rx + x^2} + x$$

Es ist nun möglich die beiden gefundenen Darstellungen für R gleichzusetzen und die entstehende Gleichung nach x umzustellen.

$$\begin{aligned}
(1 + \frac{2}{\sqrt{3}})r &= \sqrt{2rx + x^2} + \frac{r}{\sqrt{3}} + x \\
(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})r - x &= \sqrt{2rx + x^2} \\
(4 + \frac{2}{\sqrt{3}})rx &= (\frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}})r^2 \\
x &= \frac{\frac{4}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}}{4 + \frac{2}{\sqrt{3}}} r \\
x &= \left(\frac{3}{11} + \frac{4\sqrt{3}}{33} \right) \cdot r
\end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuel Naumann

Lösung 031036:
Es gilt:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y} > \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{y} > \frac{x-2}{2x} \quad \rightarrow \quad y < \frac{2x}{x-2}$$

In diese letzte Beziehung kann man nun konkrete Werte für x einsetzen. Unter Beachtung der Voraussetzungen, d.h. $x, y > 2$, erhält man für

$$\begin{aligned}
x = 3: &\quad 2 < y < 6 \quad \rightarrow \quad y = 3, y = 4 \text{ oder } y = 5 \\
x = 4: &\quad 2 < y < 4 \quad \rightarrow \quad y = 3 \\
x = 5: &\quad 2 < y < \frac{10}{3} \quad \rightarrow \quad y = 3 \\
x = 6: &\quad 2 < y < 3
\end{aligned}$$

Für $x = 6$ existiert also keine natürliche Zahl y, so dass die Ungleichung erfüllt wird.

Aus $\frac{1}{y} > \frac{1}{2} - \frac{1}{x}$ ist ersichtlich, dass für größer werdendes x, $\frac{1}{y}$ ebenfalls größer und somit y immer kleiner werden muss. Für $x > 5$ können deshalb keine weitere Lösung existieren.

Aufgeschrieben und gelöst von Manuel Naumann