3. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031011:

Eine Spule, deren Leermasse 235 g beträgt, ist mit Kupferdraht von 0,70 mm Durchmesser bewickelt und hat eine Masse von 4 235 g.

Wieviel Meter Draht befinden sich auf der Spule? (Dichte des Kupfers $\varrho = 8{,}93\,\mathrm{g/cm^3}$.)

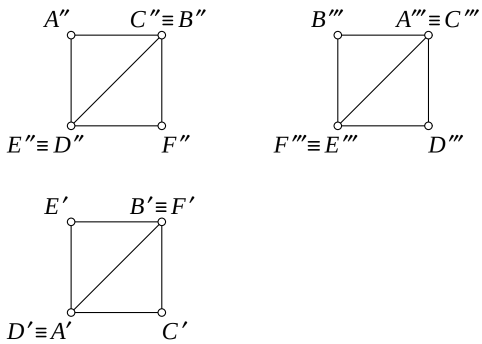
Aufgabe 031012:

Konstruieren Sie ein rechtwinkliges Dreieck ($\gamma = 90°$) aus den Seitenhalbierenden s_a und s_c!

Beschreiben und begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 031013:

Bauen Sie ein Modell des Körpers, den die Abbildung in Grundriß, Aufriß und Seitenriß zeigt ($a = 6$ cm)!



Aufgabe 031014:

Gegeben sei ein Quadrat mit der Seitenlänge a. In dieses Quadrat sollen fünf gleichgroße Kreise so gezeichnet werden, daß ein Kreis in der Mitte liegt und die vier übrigen sowohl diesen Kreis als auch je zwei aneinanderstoßende Quadratseiten berühren.

a) Drücken Sie den Radius dieser Kreise durch a aus!

b) Führen Sie die Konstruktion nur mit Zirkel und Lineal durch (Konstruktionsbeschreibung)!

Aufgabe 031015:

Welcher von den folgenden Brüchen ist größer:

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} \quad \text{oder} \quad \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1}\ ?$$

Begründen Sie Ihre Behauptung!

Aufgabe 031016:

Beim Fußball-Toto ist auf dem Tipschein mit 12 Spielen anzukreuzen, für welche Mannschaft mit einem Sieg gerechnet oder ob das Spiel unentschieden beendet wird. Bei einem Spiel gibt es drei Möglichkeiten: Sieg der Mannschaft A, Sieg der Mannschaft B oder unentschieden.

Wieviel Tipscheine müßte jemand ausfüllen, der auf jeden Fall einen Schein mit 12 richtigen Voraussagen haben möchte? Der Lösungsweg ist zu begründen.

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 031011:
Es gelten folgende Bezeichnungen und Formeln:

m_D Masse Kupferdraht,
V_D Volumen Kupferdraht, der ein Kreiszylinder der Länge l_D mit dem Durchmesser d_D ist
$\varrho_D = 8,93\,\mathrm{g/cm^3}$ Dichte des Kupfers
$m_S = 4\,235$ g Masse Spule inkl. Draht,
$m_L = 235$ g Leermasse der Spule

$$m_D = m_S - m_L$$
$$V_D = \frac{\pi}{4} \cdot d_D^2 l_D$$
$$\varrho_D = \frac{m_D}{V_D} = \frac{4 \cdot (m_S - m_L)}{\pi\, d_D^2\, l_D}$$
$$l_D = \frac{4 \cdot (m_S - m_L)}{\pi\, d_D^2\, \varrho_D} = \frac{4 \cdot (4\,235\,\mathrm{g} - 235\,\mathrm{g})}{\pi \cdot (0{,}070\,\mathrm{cm})^2\, 8{,}93\,\mathrm{g/cm^3}} = 116\,391{,}85\,\mathrm{cm} \approx 1{,}164\,\mathrm{km}$$

Es befinden sich ca. 1,164 km Kupferdraht auf der Spule.

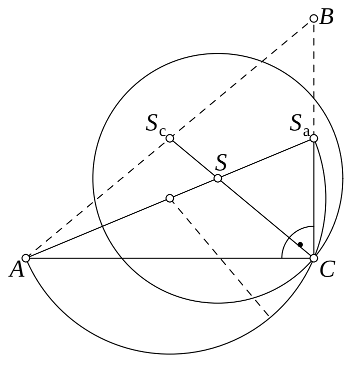
Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 031012:
Analysis:

Da das gesuchte Dreieck ABC rechtwinklig sein soll, muss das Dreieck AS_aC ebenfalls rechtwinklig sein, wenn S_a der Mittelpunkt von BC ist. Damit muss C auf dem THALESkreis über AS_a liegen.

Andererseits müssen sich s_a und s_c gegenseitig im Verhältnis 2 : 1 teilen.

Somit kennt man den Abstand von C zum Schnittpunkt S der beiden Seitenhalbierenden, woraus auch der Rest folgt. Wichtig dabei ist, dass beide Bedingungen für C (Lage auf dem THALESkreis und Abstand zu S) gleichzeitig erfüllbar sein müssen.



Konstruktion:

Man zeichne die Strecke AS_a mit der Länge s_a, über der man einen Halbkreis errichtet. Danach ergibt sich S als Teilpunkt bei der Teilung von AS_a im Verhältnis 2 : 1.

Um S wird ein Kreis mit dem Radius $2s_c/3$ gezogen. Der Schnittpunkt mit dem vorher gezeichneten Halbkreis ist – sofern er existiert – der gesuchte Punkt C.

Damit der Schnittpunkt tatsächlich auftritt, muss

$$\frac{1}{3}s_a < \frac{2}{3}s_c < \frac{2}{3}s_a$$

gelten; andernfalls ist die Konstruktion nicht ausführbar.

Mit Hilfe der Länge s_c erhält man auf der Geraden CS den Punkt S_c. Der Punkt B ist dann der Schnittpunkt von AS_c und CS_a.

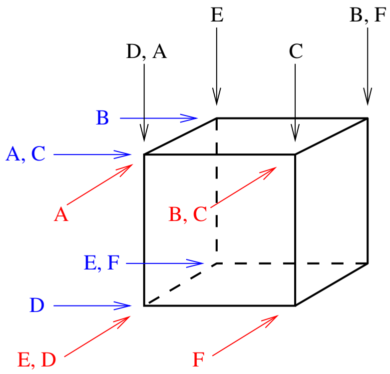
Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

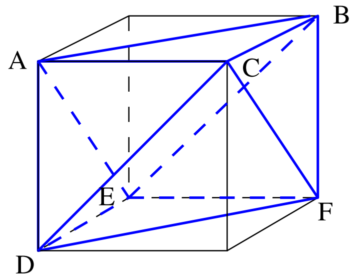
Lösung 031013:

Um die Lösung zu finden, ist es nützlich, sich den Körper einem Würfel einbeschrieben vorzustellen, siehe erste Abbildung

Desweiteren liegen drei in der Projektion auf einer Geraden liegende Punkte im Original in einer Ebene (und wie man sich anhand der Abstände leicht klarmachen kann sogar auf Ecken). Die Flächendiagonalen machen nach erfolgreicher Bestimmung einiger Seitenbelegungen das Problem schnell eindeutig.

Wenn man gedanklich die drei zu einem Buchstaben gehörenden Richtungspfeile verbindet, treffen sie sich immer alle in einem Punkt des Würfels. Dieser wird in der Parallelprojektion entsprechend mit diesem Buchstaben gekennzeichnet. Anhand dieser Punkte werden alle Kanten eingetragen. Es entsteht die blaue Figur aus der 2. Abbildung, die aus 6 paarweise parallelen Dreiecksflächen besteht.



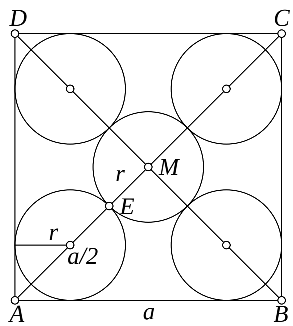


Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Sattler

Lösung 031014:

a) Die Diagonale des Vierecks hat die Länge $a\sqrt{2}$; und sie lässt sich auch in Abhängigkeit von r ausdrücken, und zwar als: $r\sqrt{2} + 4r + r\sqrt{2}$. Gleichsetzen der beiden Terme führt auf $r = \frac{a}{2}(\sqrt{2} - 1)$.

b) Man zeichne das Quadrat $ABCD$ und dessen Diagonalen; deren Schnittpunkt sei M. Von einem der Eckpunkte aus trage man auf der Diagonalen $a/2$ ab und bezeichne den erhaltenen Punkt auf der Diagonalen mit E. Wegen $\frac{a}{2} = r + r\sqrt{2}$ folgt für den gesuchten Radius $r = EM$.



Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (11)

Lösung 031015:

Man bildet die Differenz

$$\frac{100^{100}+1}{100^{90}+1} - \frac{100^{99}+1}{100^{89}+1} = \frac{\left(100^{100}+1\right)\cdot\left(100^{89}+1\right) - \left(100^{99}+1\right)\cdot\left(100^{90}+1\right)}{(100^{90}+1)\cdot(100^{89}+1)}$$

Nach dem Ausmultiplizieren erhält man im Zähler

$$100^{100} + 100^{89} - 100^{90} - 100^{99} = 100^{99}\cdot(100-1) - 100^{89}\cdot(100-1) > 0.$$

Da der Nenner ebenfalls positiv ist, ist die Differenz größer als Null. Also ist der erste Bruch größer.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 031016:

Bei nur einem Spiel bräuchte man drei Tippscheine, einen für jede der Möglichkeiten. Bei zwei Spielen müsste man einen Tippschein für jede denkbare Kombination ausfüllen, also $3 \cdot 3 = 3^2$ Möglichkeiten. Mit jedem weiteren Spiel muss die Zahl mit drei multipliziert werden, bei 12 Spielen führt das auf $3^{12} = 531\,441$ Tippscheine.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Quellenverzeichnis

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag