3. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Saison 1963/1964

Aufgaben und Lösungen

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030831:
Welches ist die kleinste achtstellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und durch 36 teilbar ist? Begründe, daß es die kleinste derartige Zahl ist!

Aufgabe 030832:
Beweise folgende Behauptung:

Wenn a und b entweder beide positive reelle oder beide negative reelle Zahlen sind, dann ist stets

$$5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0.$$

Aufgabe 030833:
Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und seine Seitenhalbierenden! Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sei S. Er ist gleichzeitig gemeinsamer Eckpunkt für die sechs Dreiecke, in die das Dreieck ABC durch die Seitenhalbierenden zerlegt wird.

Beweise, daß diese sechs Dreiecke sämtlich untereinander flächengleich sind!

Aufgabe 030834:
In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{rccccc} & \text{f} & \text{o} & \text{r} & \text{t} & \text{y} \\ + & & & \text{t} & \text{e} & \text{n} \\ + & & & \text{t} & \text{e} & \text{n} \\ \hline & \text{s} & \text{i} & \text{x} & \text{t} & \text{y} \end{array}$$

Aufgabe 030835:
Gegeben sind die Strecken

$$s - a = 3\,\text{cm}, \qquad s - b = 2\,\text{cm}, \qquad s - c = 1\,\text{cm},$$

wobei $2s = a + b + c$ der Umfang des Dreiecks ist.

a) Konstruiere das Dreieck!

b) Begründe die Konstruktion!

Aufgabe 030836:
Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.

a) Konstruiere das Trapez!

b) Begründe die Konstruktion!

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 030831:

Eine Zahl ist durch 36 teilbar, wenn sie durch 9 und 4 teilbar ist. Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn die Quersumme der Zahl durch 9 teilbar ist. Eine Zahl ist durch 4 teilbar, wenn die Zahl der letzten 2 Ziffern durch 4 teilbar ist.

Zunächst muss die erste Bedingung abgeglichen werden. Die Zahl soll aus 8 verschiedenen Ziffern bestehen, 10 Ziffern (0-9) gibt es. Es müssen also 2 Ziffern weggelassen werden, so dass die Summe der restlichen Ziffern durch 9 teilbar ist. Dafür kommen nur die Zahlenpaare (0;9), (1;8), (2;7), (3;6) und (4;5) in Frage. Damit gibt es folgende minimal mögliche Zahlen:

$$\begin{gathered}(0;9) - 12\,345\,678\\(1;8) - 20\,345\,679\\(2;7) - 10\,345\,689\\(3;6) - 10\,245\,789\\(4;5) - 10\,236\,789\end{gathered}$$

Das Paar (4;5) ermöglich die kleinste Zahl und ist damit die erste Wahl bei der Bestimmung der eigentlichen Zahl.

Jetzt muss es nur noch gelingen, die Zahlen so anzuordnen, dass die Zahl durch 4 teilbar ist. Damit die Zahl möglichst klein ist, sollte die größeren Ziffern weiter hinten stehen. Die durch 4 teilbare Zahl aus den größtmöglichen 2 Ziffern ist dann 96. Es müssen also nur noch die letzten 4 Ziffern umsortiert werden.

Dies ergibt dann die Zahl 10 237 896.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

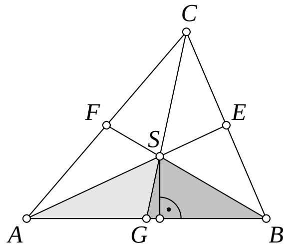
Lösung 030832:

Es gilt $5a^2 - 6ab + 5b^2 = 5(a-b)^2 + 4ab$. Der Summand $5(a-b)^2$ ist stets eine nichtnegative reelle Zahl, während $4ab$ unter den angegebenen Bedingungen eine positive reelle Zahl ist.

Also gilt $5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0$. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 030833:



Beweis: (Bild) Zuerst wird gezeigt, dass je zwei kleine Dreiecke, die an einer Seite des großen Dreiecks anliegen, den gleichen Flächeninhalt haben. Dazu betrachte man z. B. AB: Die Dreiecke AGS und GBS (im Bild gekennzeichnet) haben eine Höhe gemeinsam, nämlich das Lot von S auf die Strecke AB. Außerdem gilt $AG = GB$ (nach Konstruktion der Seitenhalbierenden), d. h., dass die zur gemeinsamen Höhe gehörenden Grundseiten gleich lang sind. Es folgt: $[AGS] = [GBS]$. Gleichermaßen lässt sich $[BES] = [ECS]$ und $[CFS] = [FAS]$ beweisen.

Nun muss gezeigt werden, dass $[GBS] = [BES]$ und die dazu analogen Beziehungen gelten. Dazu kann man wie folgt vorgehen: Aus der Konstruktion folgt $[ABE] = [AEC]$. Das ist jedoch gleich bedeutend mit $[AGS] + [GBS] + [BES] = [FAS] + [CFS] + [ECS]$. Setzt man das im ersten Teil erhaltene Resultat ein, erhält man $2[AGS] + [BES] = 2[FAS] + [BES]$, womit $[AGS] = [FAS]$ klar wird. Jetzt kann man aus $[GCA] = [BCG]$ auch $[FAS] = [BES]$ beweisen, so dass tatsächlich alle sechs Dreiecke untereinander flächengleich sind. □

Anmerkung: Der zweite Teil kann auch unter Verwendung der Tatsache, dass S die Seitenhalbierenden im Verhältnis 2 : 1 teilt, durchgeführt werden. Dann bekommt man als Zwischenschritt $[ABS] = 2[BES]$. Umgekehrt ist es möglich, die Gültigkeit der 2 : 1-Teilung aus der Flächengleichheit herzuleiten.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (15)

Lösung 030834:

Die Lösung lautet:

$$\begin{array}{rccccc} & 2 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ + & & & 8 & 5 & 0 \\ + & & & 8 & 5 & 0 \\ \hline & 3 & 1 & 4 & 8 & 6 \end{array}$$

Zuerst erkennt man, dass n=0 ist, da die letzte Spalte addiert y ohne Übertrag ergibt. Dann ist klar, dass e=5 ist, da die vorletzte Spalte addiert t ergibt. In diesem Falle ergibt sich aber ein Übertrag von 1.

In der zweiten Spalte muss es einen Übertrag geben, damit sich die erste Spalte ändert. Die Addition in der zweite Spalte erfolgt nur mit dem Übertrag aus der dritten Spalte, der 1 oder 2 sein kann. Da 0 bereits vergeben ist, muss i damit 1 sein. Somit ist o dann 9, und es gab einen Übertrag von 2.

Jetzt müssen noch die Gleichungen $f + 1 = s$ (aus der 1. Spalte) und $r + 2 \cdot t + 1 = 20 + x$ (aus der 3. Spalte + Überträge) erfüllt werden. Gleicht man alle möglichen Zahlenkombinationen ab, bleibt nur eine mögliche übrig: f=2, s=3, r=7, t=8 und x=4.

Für y bleibt nur noch die 6 übrig.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 030835:

Es gilt:

$$\begin{aligned} a &= a + b + c - (b + c) = 2s - b - c = (s - b) + (s - c) \\ b &= a + b + c - (a + c) = 2s - a - c = (s - a) + (s - c) \\ c &= a + b + c - (a + b) = 2s - a - b = (s - a) + (s - b) \end{aligned}$$

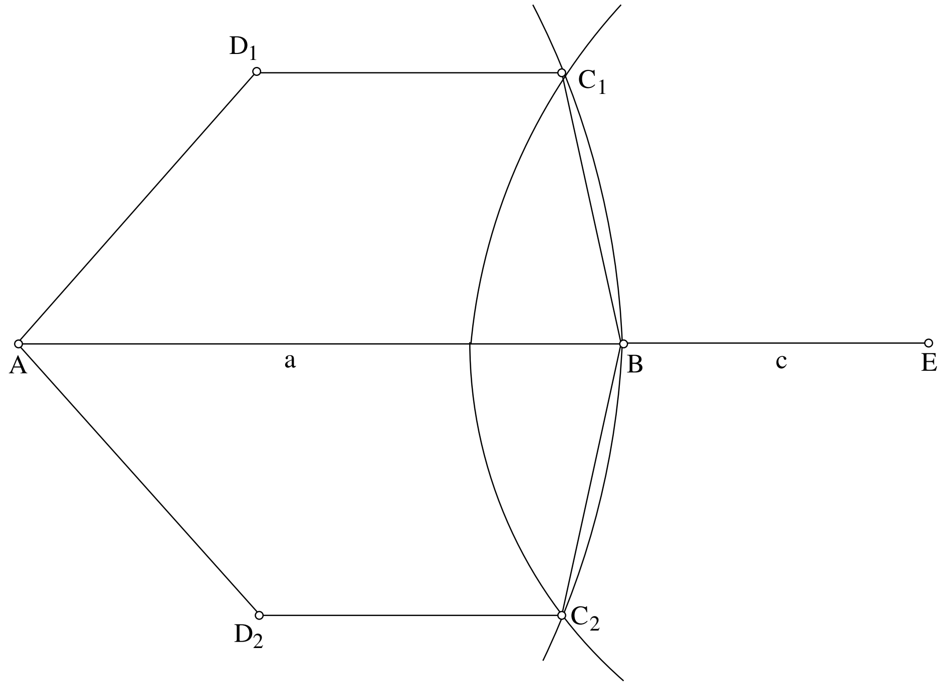
Aus den so beschriebenen drei Seiten konstruiert man nun das Dreieck in der üblichen Weise.

Anmerkung: Es ergeben sich für a, b, c die Seitenlängen 3, 4 und 5 cm, was einem rechtwinkligen Dreieck entspricht.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (15)

Lösung 030836:

Konstruktion:



Konstruktionsbeschreibung:

1. Zeichne die Strecke $\overline{AB} = a = 8\,\text{cm}$.
2. Trage auf der Geraden durch A und B über B hinaus E ab, so daß $\overline{BE} = c = 4\,\text{cm}$ ist.
3. Zeichne einen Kreisbogen um A mit dem Radius $e = 8\,\text{cm}$.
4. Zeichne einen Kreisbogen um E mit dem Radius $f = 6\,\text{cm}$. Der Schnittpunkt der Kreisbögen sei C.
5. Konstruiere die Parallele g zu $\overline{BE}$ durch C.
6. Auf der Geraden g ist von C der Abstand $c = 4\,\text{cm}$ derart abzutragen und mit D zu bezeichnen, daß das entstehende Viereck $ABCD$ nicht entartet ist. D ist mit A zu verbinden.

Begründung:

Die Länge der Strecke $\overline{AB}$ beträgt a mit (1). Laut Konstruktion ist $BECD$ ein Parallelogramm: $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ mit (5) und $\overline{BE} = \overline{CD} = c$ mit (2) und (6).

Damit ist die Länge der Strecke $\overline{BD} = \overline{EC} = f$ mit (4).

Ferner hat $\overline{AC}$ laut Konstruktion die Länge von e mit (3).

Somit erfüllt jedes solcherart konstruierte Trapez die Forderungen der Aufgabenstellung. Lediglich Schritt (4) ist nicht eindeutig, da es 2 solche Schnittpunkte gibt. Verfährt man wie beschrieben weiter, erhält man 2 zueinander gespiegelte Trapeze.

Aufgeschrieben und gelöst von Volker Pöschel

Quellenverzeichnis

(15) "a+b = b+a" - Heft 66, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 8 - Dokumentation I.-XVIII. Olympiade (1961-1979), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1979.