2. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Saison 1962/1963

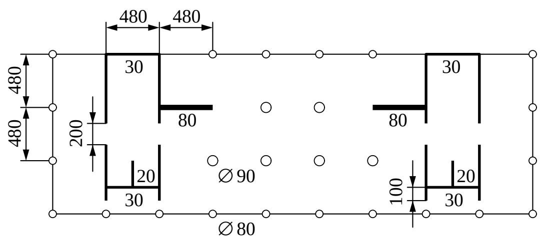
Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021211:

Das „Haus des Lehrers“ in Berlin ist ein monolithischer Stahlbetonskelettbau. Der (idealisierte!) Horizontalquerschnitt durch das Erdgeschoß zeigt die wichtigsten aus Stahlbeton gefertigten Teile.



Die Höhe des Erdgeschosses beträgt 6,00 m, die vier eingezeichneten 2,00 m breiten Zugänge zum Treppenhaus sind jeweils 2,15 m hoch. Sämtliche Achsmaße betragen 4,80 m.

Berechnen Sie den Bedarf an Beton für das gesamte Erdgeschoß! Dabei bleibt die Bewehrung unberücksichtigt.

Aufgabe 021212:

Eine Fischereiproduktionsgenossenschaft möchte wissen, wieviel Fische einer bestimmten Sorte sich ungefähr in einem kleinen See befinden. Zu diesem Zwecke werden 30 Fische dieser Sorte gefangen, gekennzeichnet und in den See zurückgegeben. Am nächsten Tage werden 52 Fische derselben Sorte gefangen, unter denen 4 das Kennzeichen haben.

Wieviel Fische der Sorte befanden sich ungefähr in dem See? (Begründung!)

Aufgabe 021213:

Beweisen Sie, daß die Funktion

$$y = \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

die folgenden Eigenschaften hat:

a) sie ist für alle reellen Zahlen definiert,

b) sie ist für alle $x \geq 1$ wachsend,

c) sie hat den Wertevorrat $0 \leq y < 1$,

d) ihr Bild ist achsensymmetrisch! Bestimmen Sie die Symmetrieachse und beweisen Sie die Symmetrieeigenschaften der Kurve!

Aufgabe 021214:
Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung

$$\cos^2 x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^2 3x + \sin^2 x \cdot \sin^2 2x \cdot \sin^2 3x$$
$$= \cos^2 x \cdot \cos^2 2x + \cos^2 x \cdot \cos^2 3x + \cos^2 3x \cdot \cos^2 2x$$

für $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ zu bestimmen!

Aufgabe 021215:
Auf einer Kreislinie sind drei verschiedene Punkte A, B, C gegeben.

Es ist auf der gleichen Kreislinie ein weiterer Punkt D so zu konstruieren, daß $ABCD$ sowohl Sehnenviereck als auch Tangentenviereck ist! (Näherungslösungen z. B. mit Hilfe einer Hyperbel gelten nicht als Lösung. Es dürfen nur Zirkel und Lineal benutzt werden.)

Aufgabe 021216:
Es ist zu beweisen, daß es genau ein Paar natürlicher Zahlen x und y gibt, für das die Zahl $N = x^4 + 4y^4$ eine Primzahl ist!

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021211:

Die Grundfläche für eine Höhe von 6 m beträgt: 20 Säulen mit 0,9 m Durchmesser, 6 Säulen mit 0,8 m Durchmesser, 9,6 m Wände der Stärke 0,8 m, 31,6 m Wände der Stärke 0,3 m und 4,8 m Wände der Stärke 0,2 m, insgesamt ein Volumen von 248,8 m^3. Hinzu kommen noch 8 m der Wandstärke 0,3 m und der Höhe 3,85 m über den Zugängen zum Treppenhaus, also 9,2 m^3.

Somit werden ca. 258 m^3 Beton benötigt.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021212:

Da wir keine weiteren Angaben haben, müssen wir annehmen, dass die 52 Fische des zweiten Fangs eine repräsentative Stichprobe der Gesamtheit der Fische im See darstellen. Demzufolge sind $\frac{4}{52}$ der Fische (im ganzen See!) markiert, also jeder 13.

Insgesamt befinden sich dann ungefähr $13 \cdot 30 = 390$ Fische in diesem See.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 021213:

Beweis:

a) Damit sie für alle reellen x definiert ist, darf der Nenner nicht Null und der Radikand nicht negativ sein. Das ist erfüllt, wenn $\forall\, x : x^2 - 2x + 2 > 0$. Nach der Lösungsformel für quadratische Gleichungen hat die zugehörige Gleichung die Lösungen $x = 1 \pm \sqrt{1-2} \notin \mathbb{R}$, der quadratische Ausdruck hat also keine reellen Nullstellen. Da er stetig ist, reicht es zu wissen, dass er an einem Punkt größer Null ist (z. B. $x = 0$ und $x^2 - 2x + 2 = 2 > 0$), um zu folgern, dass er überall größer Null ist. Damit ist die Funktion auf der gesamten reellen Achse definiert.

b) Wir untersuchen die erste Ableitung für $x \geq 1$ (also $|x-1| = x-1$):

$$y' = \frac{\sqrt{x^2-2x+2} - \frac{(x-1)(2x-2)}{2\sqrt{x^2-2x+2}}}{x^2-2x+2} = \frac{1}{(x^2-2x+2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Der quadratische Ausdruck ist wie in a) gezeigt positiv und daher gilt $y' > 0 \ \forall\, x \geq 1$. Da in y ein Betrag vorkommt, haben wir bei $x = 1$ die rechtsseitige Ableitung genommen.

c) Per Definition haben wir $y \geq 0$. Außerdem sind folgende Aussagen einander äquivalent:

$$y < 1 \iff |x-1| < \sqrt{x^2-2x+2} \iff (x-1)^2 < x^2-2x+2$$
$$\iff x^2-2x+1 < x^2-2x+2 \iff 1 < 2 \quad \text{wahre Aussage.}$$

Die zweite Äquivalenz ist wahr, weil wir nur positive Ausdrücke betrachten.

d) Die Funktion ist symmetrisch bezüglich der Achse $x = 1$, d. h. sie geht unter $1 + x \to 1 - x$ in sich selbst über. Für den Zähler gilt: $|(1 - x) - 1| = | - x| = |x| = |(1 + x) - 1|$. Im Nenner haben wir:

$$\begin{aligned}(1-x)^2 - 2(1-x) + 2 &= (1 - 2x + x^2) + (-2 + 2x) + 2\\ &= (1 + 2x + x^2) + (-2 - 2x) + 2 = (1 + x)^2 - 2(1 + x) + 2.\end{aligned}$$

Damit sind die Eigenschaften a) bis d) bewiesen. □

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 021214:

Die gegebene Gleichung wird zunächst mittels $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$ umgeformt, wobei wir zur Abkürzung $c_1 \equiv \cos(x)$, $c_2 \equiv \cos(2x)$, $c_3 \equiv \cos(3x)$ schreiben:

$$\begin{aligned} & c_1^2c_2^2c_3^2 + (1 - c_1^2)(1 - c_2^2)(1 - c_3^2) = c_1^2c_2^2 + c_1^2c_3^2 + c_3^2c_2^2\\ \iff\quad & c_1^2c_2^2c_3^2 + 1 - (c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) + (c_1^2c_2^2 + c_2^2c_3^2 + c_3^2c_1^2) - c_1^2c_2^2c_3^2 = c_1^2c_2^2 + c_1^2c_3^2 + c_3^2c_2^2\\ \iff\quad & c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1. \qquad (1)\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Additionstheoreme erhalten wir: $c_2 = 2c_1^2 - 1$ und $c_3 = 4c_1^3 - 3c_1$. Dies eingesetzt in (1) ergibt:

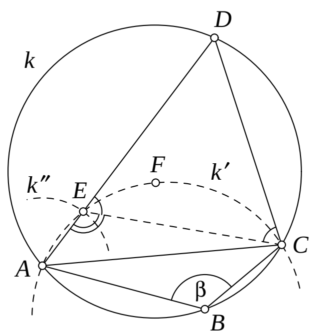
$$\begin{aligned} & c_1^2 + (2c_1^2 - 1)^2 + (4c_1^3 - 3c_1)^2 = 1\\ \iff\quad & 16c_1^6 - 20c_1^4 + 6c_1^2 = 2c_1^2(8c_1^4 - 10c_1^2 + 3) = 0. \qquad (2)\end{aligned}$$

Aus $c_1^2 = 0$ folgen die ersten beiden Lösungen: $x_1 = 90°$, $x_2 = 270°$. Für weitere Lösungen muss der Klammerausdruck in (2) verschwinden, was auf eine biquadratische Gleichung mit den Lösungen $c_1^2 = \frac{5}{8} \pm \frac{1}{8}$ führt.

Aus $c_1^2 = \frac{3}{4}$ folgen die vier Lösungen: $x_3 = 30°$, $x_4 = 150°$, $x_5 = 210°$ und $x_6 = 330°$, sowie aus $c_1^2 = \frac{1}{2}$ vier weitere Lösungen: $x_7 = 45°$, $x_8 = 135°$, $x_9 = 225°$, $x_{10} = 315°$.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021215:



Analysis:

Da D auf dem Kreis k liegt, ist die Forderung, dass $ABCD$ ein Sehnenviereck sein soll, trivial. Für ein Tangentenviereck $ABCD$ muss jedoch $AB + CD = BC + DA$ oder $|AB - BC| = |DA - CD|$ gelten.

Sei o. B. d. A. $AB \geq BC$ (und damit $DA \geq CD$) sowie E derjenige Punkt auf DA mit $DE = DC$. Dann ist das Dreieck DEC gleichschenklig mit $\sphericalangle CDE = 180° - \sphericalangle ABC = 180° - \beta$ (Eigenschaft eines Sehnenvierecks) und den Basiswinkeln $\frac{1}{2}\beta$.

Folglich ist $\sphericalangle AEC = 180° - \frac{1}{2}\beta$. Außerdem ist $AE = DA - CD = AB - BC$ eine bekannte Länge. Wir gelangen dadurch zu folgender Konstruktion.

Konstruktion:

Es wird derjenige Kreisbogen k' konstruiert, der über der Sehne AC auf der B entgegengesetzten Seite den Winkel $180° - \frac{1}{2}\beta$ fasst (z. B. durch Konstruktion des gleichschenkligen Dreiecks AFC mit den Basiswinkeln $\frac{1}{4}\beta$).

Dessen Schnittpunkt mit dem Kreis k'' (Mittelpunkt A, Radius $AE = AB - BC$) liefert den Punkt E.

Die Verlängerung von AE schneidet k dann im gesuchten Punkt D.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021216:

Beweis:

Es gilt

$$\begin{aligned} N &= x^4 + 4y^4 = (x^2)^2 + (2y^2)^2 + 2(2y^2x^2) - 4(x^2y^2) = (x^2 + 2y^2)^2 - (2xy)^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 + 2xy)(x^2 + 2y^2 - 2xy). \end{aligned}$$

Da $x^2 + 2y^2 + 2xy \geq x^2 + 2y^2 - 2xy = (x - y)^2 + y^2 > 0$ für $x + y > 0$ und $N = 0$ für $x + y = 0$ gilt, ist N genau dann prim, wenn der zweite Faktor in obiger Gleichung

$$x^2 + 2y^2 - 2xy = (x - y)^2 + y^2 = 1$$

und $x^2 + 2y^2 + 2xy$ Primzahl sind.

Da Quadrate immer nichtnegativ sind muss zur Erfüllung der ersten Bedingung entweder $y = 1$ und $|x-y| = 0$ oder $y = 0$ und $|x - y| = 1$ sein. Im letzteren Fall wäre $(x, y) = (1, 0)$, aber $N = 1$ ist nicht prim. Für $y = 1$ und $|x - y| = 0$ ist $(x, y) = (1, 1)$, d. h. $N = 1 + 4 = 5$ ist tatsächlich eine Primzahl.

Somit gibt es nur ein Paar (x, y) natürlicher Zahlen: $(1, 1)$, für das $N = x^4 + 4y^4$ eine Primzahl ist. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber