2. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021121:

Auf dem internationalen Symposium in Moskau über Probleme der höheren technischen und humanistischen Bildung erklärte der sowjetische Nobelpreisträger Nikolai Semjonow, daß mit dem in der UdSSR erreichten Wachstumstempo die jährliche Erzeugung von Elektroenergie in 100 Jahren auf das 10 000fache gesteigert werden kann.

a) Welche jährliche Steigerung (in Prozent) liegt dieser Perspektive zugrunde?

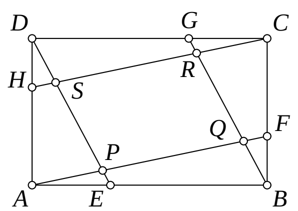
b) Wie groß war die bisherige durchschnittliche Steigerung (in Prozent) der Elektroenergie in der UdSSR in den Jahren 1955 bis 1961? (1955 wurden 170 Mrd. kWh und 1961 insgesamt 327 Mrd. kWh erzeugt.)

Vergleichen Sie die Ergebnisse!

Aufgabe 021122:

Beweisen Sie, daß stets $\sin\alpha + \cos\alpha \neq 1,5$ ist!

Aufgabe 021123:



Die Seiten eines Rechtecks $ABCD$ werden im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Die Teilpunkte seien (fortlaufend) E, F, G, H. Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AF, BG, CH und DE bilden die Ecken des Vierecks $PQRS$ (siehe Abb.).

a) Was für ein Viereck ist $PQRS$?

b) Wie verhält sich der Flächeninhalt dieses Vierecks zu dem Flächeninhalt des Rechtecks?

Aufgabe 021124:

Von einem regelmäßigen Tetraeder sind die 4 Ecken so abzuschneiden, daß von den Seitenflächen regelmäßige Sechsecke übrigbleiben.

Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen.

Aufgabe 021125:

Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n stets

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

durch 19 teilbar ist!

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021121:

a) Wenn die Energieerzeugung E ein konstantes prozentuales Jahreswachstum x hat, erhält man die Gleichung $10\,000E = E \cdot (1+x)^{100}$. Die Lösung ist $x = \sqrt[100]{10\,000} - 1 = 9{,}65\%$.

b) Die Gleichung lautet: $327 = 170 \cdot (1+y)^6$. Die Lösung ist $y = \sqrt[6]{327/170} - 1 = 11{,}53\%$. Vergleich: $y > x$, das tatsächliche Wachstum ist größer als das angenommene.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 021122:

Nach der Ungleichung über das quadratische und arithmetische Mittel gilt:

$$\frac{|\sin\alpha| + |\cos\alpha|}{2} \leq \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Longrightarrow \quad |\sin\alpha| + |\cos\alpha| \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

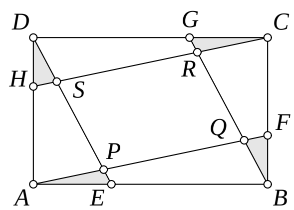
Die letzte Ungleichung folgt durch Wurzelziehen aus $2 = \frac{8}{4} < \frac{9}{4}$.

Schließlich bemühen wir noch die Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$ und erhalten $|\sin\alpha + \cos\alpha| \leq |\sin\alpha| + |\cos\alpha| < \frac{3}{2}$, also das gewünschte Ergebnis $\sin\alpha + \cos\alpha \neq \frac{3}{2}$. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021123:

a) Offensichtlich gelten wegen $AB = CD$, $BC = DA$, $AE = CG$ und $BF = DH$ folgende Kongruenzen:



$\triangle ABF \cong \triangle CDH$ bzw. $\triangle BCG \cong \triangle DAE$ (Kongruenzsatz SWS), also $AF = CH$.

Darüber hinaus gilt auch $\triangle AEP \cong \triangle CGR$ und $\triangle BFQ \cong \triangle DHS$ (Kongruenzsatz WSW), somit $AP = CR$, $PE = RG$, $BQ = DS$ und $QF = SH$.

Daraus folgt $PQ = RS$ und $QR = SP$. Das Viereck hat mithin gegenüberliegende Seiten, die gleich lang sind, ist damit ein Parallelogramm.

b) Zuerst ist es sinnvoll, einige Bezeichnungen einzuführen. Sei A_0 die Fläche des Rechtecks $ABCD$ und A_{PQRS} die Fläche des Parallelogramms $PQRS$ – aus diesen beiden suchen wir das Verhältnis A_{PQRS}/A_0. Weiterhin seien die Flächeninhalte der Dreiecke AEP, ABQ, BFQ und BCR mit A_1,

A_2, A_3 und A_4 bezeichnet.

Aus Ähnlichkeitsüberlegungen erhält man $A_2 = 9A_1$ und $A_4 = 9A_3$. Außerdem hat man $A_0 = AB \cdot BC = 3 \cdot AB \cdot BF = 6A_{\Delta ABF} = 6(A_2 + A_3)$ und analog $A_0 = 6(A_4 + A_1)$.

Daraus bekommen wir die Gleichung

$$A_2 + \frac{1}{9}A_4 = A_4 + \frac{1}{9}A_2,$$

aus der $A_2 = A_4$ und $A_1 = A_3$ folgen. Einsetzen führt auf

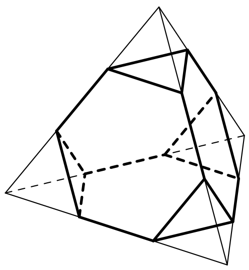
$$\frac{1}{6}A_0 = A_2 + \frac{1}{9}A_2;$$

es folgt $A_2 = \frac{3}{20}A_0$. Jetzt sieht man

$$A_{PQRS} = A_0 - 4A_2 = A_0 - \frac{12}{20}A_0 = \frac{2}{5}A_0.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht/Carsten Balleier

Lösung 021124:



Regelmäßige Sechsecke auf den Seitenflächen des Tetraeders mit der Kantenlänge a entstehen nur, wenn dessen Kanten gedrittelt werden und somit vier kleine regelmäßige Tetraeder mit der Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ abgeschnitten werden.

Jeder dieser kleinen Tetraeder hat ein Volumen von $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ des ursprünglichen Tetraeders, also hat der verbleibende Körper ein Volumen von $V' = (1 - \frac{4}{27})V = \frac{23}{27}V$ des ursprünglichen Volumens V.

Mit der Volumenformel eines Tetraeders $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ergibt sich $V' = \frac{23\sqrt{2}}{324}a^3$.

Auf jeder Seitenfläche fallen durch das Abschneiden drei kleine gleichseitige Dreiecke der Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ weg, dafür entsteht an jeder Ecke ein neues dieser Dreiecke. Die Oberfläche des Restkörpers beträgt also $A' = A - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}A = \frac{7}{9}A$ bzw. mit $A = \sqrt{3}a^2$ daher $A' = \frac{7}{9}\sqrt{3}\,a^2$.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021125:

Der Beweis erfolgt über das Prinzip der Vollständigen Induktion. Dazu wird zunächst nachgewiesen, daß es ein n gibt, mit dem die zu beweisende Aussage korrekt ist.

Sei $n = 1$:

$$\begin{aligned} &5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \\ &\qquad = 5^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 \\ &\qquad = 125 \cdot 8 + 27 \cdot 8 = 152 \cdot 8 = 19 \cdot 8 \cdot \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, daß es mindestens eine natürliche Zahl n gibt, für die die Behauptung wahr ist, d.h. für die gilt: $19k = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ für eine ntürliche Zahl k.

Kann unter dieser (Induktions-)Voraussetzung nun gezeigt werden, daß aus der Existenz eines n auch die

Behauptung für $n+1$ gilt, so wäre der Beweis erbracht:

$$\begin{aligned}
x &= 5^{2(n+1)+1} \cdot 2^{(n+1)+2} + 3^{(n+1)+2} \cdot 2^{2(n+1)+1} \\
&= 5^{2n+1+2} \cdot 2^{n+2+1} + 3^{n+2+1} \cdot 2^{2n+1+2} \\
&= 25 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2 \cdot 2^{n+2} + 3 \cdot 3^{n+2} \cdot 4 \cdot 2^{2n+1} \\
&= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \\
&= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot \left(19k - 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2}\right) \\
&= (50 - 12) \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 19k \\
&= 2 \cdot 19 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 19k \\
&= 19 \cdot \left(2 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot k\right)
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß der Induktionsbeweis geführt worden ist. □

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel