2. Mathematatik Olympiade

2. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021111:

Zu dem „Haus des Lehrers“ in Berlin gehört auch ein Kongreßgebäude mit einem Saal, der von einer Aluminiumkuppel überdeckt wird. Die Kuppel hat die Form einer Kugelkalotte. Der Basiskreis hat einen äußeren Durchmesser von 31,2 m, die Kuppel (Kalotte) eine Höhe von 9,6 m. Berechnen Sie:

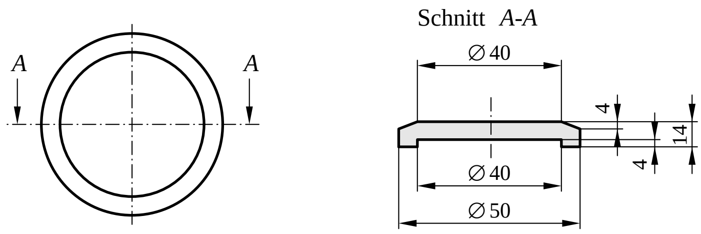
a) den Radius r der Kugel,

b) die Fläche der Kugelkalotte und

c) das Gewicht der Aluminiumhaut, mit der die Kuppel abgedeckt wird! (Stärke der Aluminiumhaut $s = 1{,}4$ mm, Wichte des Aluminiums $\gamma = 2{,}7\ \mathrm{p/cm^3}$.)

Aufgabe 021112:

Im VEB Wälzlagerwerk „Josef Orlopp“ wurden Bunsenbrennerfüße früher aus einer zylindrischen Scheibe ($d = 50$ mm, $h = 14$ mm) gedreht. Nach einem Verbesserungsvorschlag sollen die Füße in der abgebildeten Form gegossen werden.



a) Wie groß ist dabei die prozentuale Materialeinsparung?

b) Wieviel Bunsenbrennerfüße lassen sich aus dem Material herstellen, das bei der Anfertigung eines Klassensatzes (30 Stück) eingespart wird (vgl. Abbildung)?

Aufgabe 021113:

Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r_1, sein Inkreis den Radius r_2. Beweisen Sie, daß für den Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise gilt:

$$d = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}.$$

Untersuchen Sie dabei alle verschiedenen Lagemöglichkeiten der Mittelpunkte!

Aufgabe 021114:

Es ist zu beweisen, daß für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ stets gilt:

$$\sin x + \cos x \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2 \sin x} \cdot \sqrt[4]{\cos x}.$$

Aufgabe 021115:

Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3\,\text{cm}$ und eine Gerade g mit dem Abstand $a = 5\,\text{cm}$ vom Mittelpunkt des Kreises. Ferner ist auf der Peripherie des Kreises ein beliebiger Punkt P gegeben.

a) Konstruieren Sie durch P eine Sekante, die den Kreis in R und die Gerade in Q so schneidet, daß $\overline{PR} = \overline{PQ}$ ist!

b) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Konstruktion ausführbar ist (Begründung)!

Aufgabe 021116:

Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

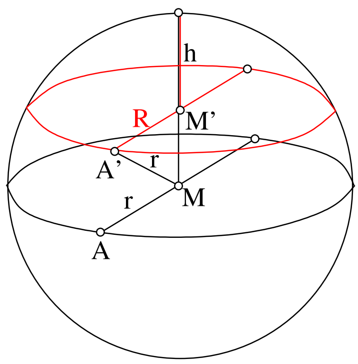
erfüllen! Das Ergebnis ist zu überprüfen!

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021111:

Wie im Bild dargestellt ist rot der Basiskreis mit Radius $R = \frac{1}{2} \cdot 31{,}2\,\text{m} = 15{,}6\,\text{m}$ und Mittelpunkt M' und Höhe $h = 9{,}6\,\text{m}$. A' sei ein Punkt auf dem Basiskreis und der Kugeloberfläche. M sei der Mittelpunkt der Kugel.



Dann gilt im rechtwinkligen Dreieck $\Delta MM'A'$: $\overline{A'M}^2 = r^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{A'M'}^2 = (r-h)^2 + R^2$ (Satz des Pythagoras).

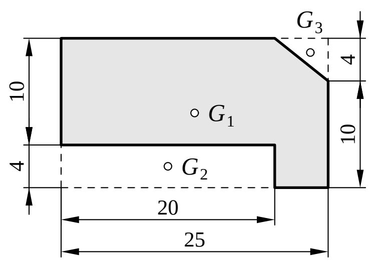
a) Damit erhalten wir $r = (h^2 + R^2)/(2h) = 17{,}5\,\text{m}$.

b) Die Fläche der Kugelkalotte beträgt $O = \pi(R^2 + h^2) = 1054\,\text{m}^2$.

c) Das Gewicht der Aluminiumhaut beträgt $G = \gamma V = \gamma O s = 3{,}98\,\text{Mp}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021112:



Hier muss zunächst das Volumen desjenigen Rotationskörpers berechnet werden, der entsteht, wenn die grau abgebildete Fläche um die Symmetrieachse (d. i. die linke Kante im Bild) rotiert.

Das Volumen V eines Körpers, der durch Drehung eines ebenen Gebietes um eine dieses Gebiet nicht schneidende Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt F dieses Gebietes mit dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt dieses Gebietes bei der Drehung beschreibt.

Die graue Fläche ist dabei die Differenz aus einem großen Rechteck mit den Maßen $25\,\text{mm} \times 14\,\text{mm}$ und einem kleinen Rechteck (links unten, $20\,\text{mm} \times 4\,\text{mm}$) sowie einem Dreieck (rechts oben, Fläche $10\,\text{mm}^2$). Die Abstände der Schwerpunkte G_1 (großes Rechteck), G_2 (kleines Rechteck) und G_3 (Dreieck) betragen: $s_1 = 12{,}5\,\text{mm}$, $s_2 = 10\,\text{mm}$ und $s_3 = 23{,}33\,\text{mm}$. (Bei letzterem wurde ausgenutzt, dass die Schwerpunktkoordinaten eines Dreiecks gleich dem arithmetischen Mittel der jeweiligen Eckpunktkoordinaten sind.) Damit erhalten wir: $V = 2\pi(350\,\text{mm}^2 \cdot 12{,}5\,\text{mm} - 80\,\text{mm}^2 \cdot 10\,\text{mm} - 10\,\text{mm}^2 \cdot 23{,}33\,\text{mm}) = 20\,996\,\text{mm}^3$.

a) Gegenüber der zylindrischen Scheibe vom Volumen $V_0 = \frac{1}{4}\pi d^2 h = 27\,489\,\text{mm}^3$ ergibt das eine Materialeinsparung von ca. 23,6 %.

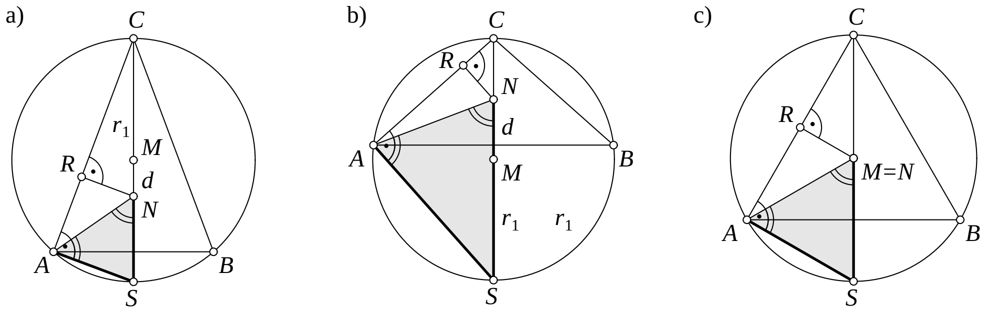
b) Pro Stück werden $V_0 - V = 6493\,\text{mm}^3$ eingespart, also insgesamt $194\,790\,\text{mm}^3$. Bezogen auf V_0 entspricht das einer Menge von ca. 7 Bunsenbrennerfüßen.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021113:
Die Behauptung kann leicht in

$$r_1^2 - d^2 = 2r_1\, r_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{r_1 + d}{r_2} = \frac{2\,r_1}{r_1 - d}$$

umgeformt werden, was auf eine Anwendung des Strahlensatzes schließen lässt. Wir gelangen so zu folgendem Beweis:



Beweis:

(Bild a) Seien M und N Umkreis- bzw. Inkreismittelpunkt des gleichschenkligen Dreiecks ABC (wobei M zunächst zwischen C und N liegen soll, welches für $\sphericalangle ACB \equiv \gamma < 60°$ stets der Fall ist), S der Schnittpunkt der Geraden CM mit dem Umkreis und R der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AC. Dann sind $\triangle CRN$ und $\triangle CAS$ rechtwinklige Dreiecke – Ersteres, da der Berührungsradius NR stets senkrecht auf der Seite steht und Zweites wegen $\sphericalangle CAS = 90°$ (Thales-Kreis).

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt daher:

$$\frac{CN}{RN} = \frac{CS}{AS} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{r_1 + d}{r_2} = \frac{2\,r_1}{AS}.$$

Um nun von (2) zu (1) zu gelangen genügt es, die Gleichheit der Strecken AS und $NS = r_1 - d$ zu zeigen. Diesen Nachweis führen wir über die Gleichheit der Basiswinkel $\sphericalangle ANS$ und $\sphericalangle NAS$ des Dreiecks ANS.

Es gilt einerseits $\sphericalangle ANS = \sphericalangle ACN + \sphericalangle CAN$ (Außenwinkel) $= \frac{\gamma}{2} + \sphericalangle NAB$ (Winkelhalbierende), andererseits $\sphericalangle NAS = \sphericalangle NAB + \sphericalangle BAS$ (Winkelsumme) $= \sphericalangle NAB + \frac{\gamma}{2}$ (gleiche Peripheriewinkel über den Sehnen $SB = SA$). Damit ist (1) bewiesen.

(Bild b) Im Fall $\gamma > 60°$ liegt M zwischen S und N und es folgt

$$\frac{CN}{RN} = \frac{CS}{AS} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{r_1 - d}{r_2} = \frac{2\,r_1}{AS}.$$

Auch hier ist das Dreieck ANS gleichschenklig, nun jedoch mit $AS = NS = r_1 + d$. Die beiden letzten Gleichungen liefern ebenfalls die Behauptung (1).

(Bild c) Im Fall $\gamma = 60°$ ist das Dreieck ABC gleichseitig, beide Mittelpunkte fallen übereinander und die Behauptung (1) gilt auch hier mit $d = 0$. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021114:

Beweis: Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ist $\sin(2x)$ nicht negativ, also gilt $\left(1-\sqrt{\sin(2x)}\right)^2 \geq 0$ bzw. $1+\sin(2x) \geq 2\sqrt{\sin(2x)}$.

Nach Additionstheoremen ist das äquivalent zu

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x \geq 2\sqrt{2\sin x\cos x}. \qquad (1)$$

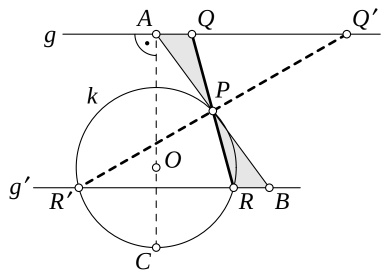
Da $2\sqrt{2\sin x\cos x} \geq 0$ und $2\sin x\cos x \geq 0$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ folgt aus (1) die Behauptung. □

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 021115:

Sei k der gegebene Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r sowie A auf g derjenige Punkt mit kürzestem Abstand zu O.

a) *Konstruktion:* Durch Verdoppelung der Strecke AP entsteht Punkt B. Die Parallele $g' \parallel g$ durch B schneide k in den Punkten R bzw. R'. Die Geraden PR und PR' schneiden g in den Punkten Q bzw. Q'. Die gesuchten Sekanten sind dann RPQ bzw. $R'PQ'$.



Beweis: Nach obiger Konstruktion und Kongruenzsatz WSW ($\sphericalangle QAP = \sphericalangle RBP$ Wechselwinkel, $AP = PB$ sowie $\sphericalangle APQ = \sphericalangle BPR$ Scheitelwinkel) gilt $\triangle APQ \cong \triangle BPR$, woraus die Forderung $PR = PQ$ sofort folgt. Ebenso folgern wir aus $\triangle APQ' \cong \triangle BPR'$ die Gleichheit $PR' = PQ'$. □

b) Offensichtlich schlägt die Konstruktion fehl, wenn g' keine Schnittpunkte mit k hat. Das ist genau dann der Fall, wenn der senkrechte Abstand von P zu g größer als die Hälfte des Abstandes $AC = a + r = 8$ cm, also größer als 4 cm ist. Dabei ist C der Schnittpunkt der Geraden AO mit k, der den größeren Abstand zu g hat.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021116:

Zunächst kann man bereits aus den Wurzeln folgende Bedingung ableiten: $-1 \leq x \leq 3$. Als nächstes sind die Stellen zu berechnen, an denen die Ungleichung ihren Wahrheitswert wechselt, also wo $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = 1/2$ gilt.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} &= 1/2 \\
\sqrt{3-x} &= 1/2 + \sqrt{x+1} \\
3 - x &= 1/4 + x + 1 + \sqrt{x+1} \\
7/4 - 2x &= \sqrt{x+1} \\
49/16 + 4x^2 - 7x &= x + 1 \\
4x^2 - 8x + 33/16 &= 0 \\
x^2 - 2x + 33/64 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 - 33/64} \\
x_1 &= 1 + \sqrt{31}/8 \\
x_2 &= 1 - \sqrt{31}/8
\end{aligned}$$

Da quadriert wurde, kann es Scheinlösungen geben. Es muss also noch eingesetzt werden.
$\sqrt{3-x_1} - \sqrt{x_1+1} = -1/2 \to$ Scheinlösung

$\sqrt{3-x_2} - \sqrt{x_2+1} = 1/2 \rightarrow$ Lösung

x_2 ist also die gesuchte Grenze.

Die Ungleichung wird wahr für alle x, für die gilt: $-1 \leq x < 1 - \sqrt{31}/8$.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski