2. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

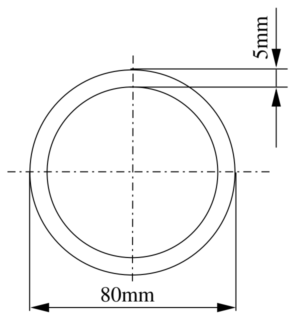
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021011:

Im Zentrum Berlins entsteht am Alexanderplatz das „Haus des Lehrers“. Die für dieses Bauwerk ausgehobene 20 m breite Baugrube hatte annähernd die Form eines Pyramidenstumpfes. Sie besaß eine Tiefe von 7,3 m. Die rechteckige Bausohle hatte eine Länge von 47 m und eine Breite von 15 m.

Berechnen Sie das Volumen des ausgebaggerten Bodens!

Aufgabe 021012:



Im VEB Berliner Bremsenwerk wurden Lagerscheiben (d = 80 mm, h = 15 mm) früher voll aus Messing hergestellt. Nach einem Verbesserungsvorschlag wird ein Stahlkern mit einer 5 mm starken Messingauflage versehen (siehe Abbildung).

Wieviel Lagerscheiben können heute aus der Messingmenge hergestellt werden, die früher nur für eine Scheibe reichte?

Aufgabe 021013:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C.

Es ist zu beweisen, daß für den oberhalb der Hypotenuse konstruierten Halbkreis, der die Katheten $\overline{AC} = b$ und $\overline{BC} = a$ berührt, stets

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

ist, wobei r der Radius dieses Halbkreises sein soll!

Aufgabe 021014:

Gegeben sind zwei konzentrische Kreise mit den Radien r und R, wobei $R > r$ sein soll.

a) Konstruieren Sie einen Kreis, der sowohl den inneren als auch den äußeren der gegebenen Kreise berührt (zwei verschiedene Fälle)!

b) Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller dieser gesuchten Kreise (wieder zwei verschiedene Fälle)?

Aufgabe 021015:

Es ist folgender Satz zu beweisen:

Wenn die Summe zweier ganzer Zahlen durch 10 teilbar ist, so enden die Quadrate dieser Zahlen auf die gleiche Ziffer.

Aufgabe 021016:

Es ist die *kleinste* natürliche Zahl n zu bestimmen, welche folgende Eigenschaften besitzt:

a) ihre dekadische Darstellung hat als letzte Ziffer die Ziffer 6;

b) wenn man diese letzte Ziffer 6 streicht und sie als erste Ziffer vor die anderen unveränderten Ziffern schreibt, so bekommt man das Vierfache der Zahl n.

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021011:

Aus dem Strahlensatz ergibt sich als Höhe h der Pyramide

$$\frac{h}{20\text{ m}} = \frac{h - 7,3\text{ m}}{15\text{ m}},$$

was zu $h = 29,2$ m führt. Damit können wir die Länge l der Baugrube berechnen:

$$\frac{l}{29,2\text{ m}} = \frac{47\text{ m}}{21,9\text{ m}},$$

was $l \approx 62,7$ m ergibt.

Die Pyramide hat ein Volumen von

$$V_p = \frac{1}{3}(20\text{ m} \cdot 62,7\text{ m} \cdot 29,2\text{ m}) = 12\,205,6\text{ m}^3.$$

Der Teil der Pyramide, der noch nicht ausgehoben ist, hat ein Volumen von

$$V_n = \frac{1}{3}(15\text{ m} \cdot 47\text{ m} \cdot 21,9\text{ m}) = 5\,146,5\text{ m}^3.$$

Der ausgebaggerte Boden hat daher ein Volumen von $V_p - V_n \approx 7\,000\text{ m}^3$.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

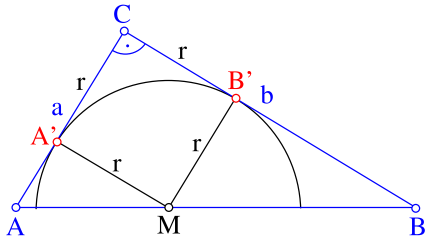
Lösung 021012:

Während früher für eine Scheibe $\frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot h \approx 75\,400\text{ mm}^3$ Messing benötigt wurden, können heute $\frac{\pi}{4} \cdot (d - 10\text{ mm})^2 \cdot h \approx 57\,700\text{ mm}^3$ eingespart werden. Es werden jetzt also nur noch $17\,700\text{ mm}^3$ Messing benötigt.

Jetzt können ungefähr 4,25 Scheiben aus der Menge Messing gefertigt werden, die früher für eine Scheibe reichte.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021013:



Sei M der Mittelpunkt des Halbkreises mit Radius r und A' bzw. B' die Berührungspunkte des Halbkreises mit der Seite a bzw. b.

Dann steht die Strecke $\overline{MA'}$ senkrecht auf a, weil a Tangente am Halbkreis ist. Ebenso steht $\overline{MB'}$ senkrecht auf b. Das Viereck $MA'CB'$ ist wegen drei rechten Winkel also ein Rechteck.

Da weiterhin die benachbarten Seiten $\overline{MA'}$ und $\overline{MB'}$ gleichlang sind, handelt es sich um ein Quadrat.

Einerseits ist der Flächenhinhalt F des Dreiecks ΔABC

$$F = \frac{ab}{2},$$

andererseits ist

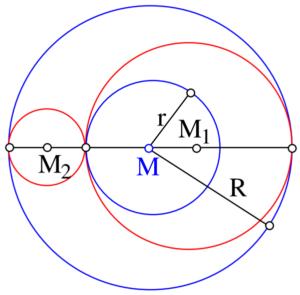
$$F = r^2 + \frac{(b-r)r}{2} + \frac{(a-r)r}{2} = \frac{br}{2} + \frac{ar}{2}.$$

Nach Gleichsetzung beider Formeln und Multiplikation mit $\frac{2}{abr}$, gewinnt man die gesuchte Gleichung

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021014:
Es gibt zwei verschiedene Fälle:



1. Der innere Kreis wird von dem zu konstruierenden Kreis umschlossen.

2. Der innere Kreis liegt nicht in dem zu konstruierenden Kreis.

a) Man zeichnet einen beliebigen Durchmesser in den großen Kreis. Für den 2. Fall halbiert man einen der beiden Teile des Durchmessers, der zwischen dem kleinen und dem großen Kreis liegt. Dort liegt der Mittelpunkt M_2 des gesuchten Kreises. Dessen Radius ist folglich $\frac{R-r}{2}$.
Im 1. Fall halbiert man den Rest des Durchmessers und schlägt um diesen Punkt einen Kreis mit Radius $\frac{R+r}{2}$.

b) Bei 1. liegen alle Mittelpunkte auf einem Kreis mit Radius $\frac{R+r}{2} - r = \frac{R-r}{2}$ und dem gleichen Mittelpunkt wie die gegebenen konzentrischen Kreise. Im anderen Fall ist es ein Kreis mit dem Radius $\frac{R-r}{2} + r = \frac{R+r}{2}$ und dem gleichen Mittelpunkt.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021015:
Seien n und m diese Zahlen. Damit ihre Summe durch 10 teilbar ist, muß gelten:

$$n = 10a + b$$
$$m = 10c - b\,.$$

Daraus folgt $n^2 = 100a^2 + 20ab + b^2$ und $m^2 = 100c^2 - 20cb + b^2$. Für die letzte Ziffer beider Quadrate ist ausschließlich der Summand b^2 zuständig, der bei beiden Quadraten gleich ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 021016:
Wir wissen, daß die gesuchte Zahl n auf 6 endet. Daher endet das Vierfache von n auf 4. Das ist zugleich die vorletzte Ziffer von n. Da nun n auf 46 endet, steht 84 an den letzten beiden Stellen von $4n$. Also endet n auf 846. Wenden wir dieses Verfahren so weiter an, erhalten wir für n die Zahl 153846.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka