2. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020931:

Vermindert man die siebente Potenz einer positiven ganzen Zahl um diese Zahl, so ist die Differenz stets durch die Summe aus der 1., 2. und 3. Potenz dieser Zahl teilbar.

Aufgabe 020932:

Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:

Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $\frac{1}{2}$ Elle herunter und in der Nacht wieder $\frac{1}{6}$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht $\frac{1}{4}$ hinunter.

Nach wieviel Tagen erreicht die Katze die Maus?

Aufgabe 020933:

Von einem Punkt P auf der Peripherie eines Kreises gehen zwei Sehnen aus, die einen Winkel von $135°$ miteinander bilden. Zwei weitere Sehnen, die ebenfalls von P ausgehen, zerlegen diesen Winkel in 3 Winkel von je $45°$.

Beweisen Sie, daß die 4 Endpunkte der Sehnen (außer P) die Eckpunkte eines Quadrates sind!

Aufgabe 020934:

Ein Schnellzug legt die 120 km lange Teilstrecke Leipzig–Riesa–Dresden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h zurück. Infolge Bauarbeiten muß der Zug während einiger Tage die erste Hälfte der Strecke (Leipzig–Bornitz) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h zurücklegen. Um den Zeitverlust möglichst wettzumachen, wird auf der zweiten Hälfte der Strecke (Bornitz–Dresden) die Durchschnittsgeschwindigkeit auf 70 km/h erhöht.

Kommt der Zug pünktlich in Dresden an?

Aufgabe 020935:

Über den Seiten a, b, c und d eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3 und F_4 in dieser Reihenfolge errichtet.

Beweisen Sie, daß $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ ist!

Aufgabe 020936:

In einem Schaufenster sind bunte, gleichgroße Bälle zu einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide aufgeschichtet. Die Bälle der untersten Schicht werden durch 3 verbundene Latten am Wegrollen gehindert. Die Bälle der anderen Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunter liegenden Schicht. In der untersten Schicht zählt man an jeder Seite 8 Bälle.

Wieviel Bälle liegen in den einzelnen Schichten und wieviel in der ganzen Pyramide?

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 020931:
Sei n eine beliebige ganze, positive Zahl. Dann gilt:

$$\begin{aligned} n^7 - n &= n(n^6 - 1) \\ &= n(n^3 + 1)(n^3 - 1) \\ &= n(n^3 + 1)(n - 1)(n^2 + n + 1) \\ &= (n^3 + 1)(n - 1)(n^3 + n^2 + n) \end{aligned}$$

Die ersten beiden Faktoren bilden ganze Zahlen. Daher ist $n^7 - n$ ohne Rest durch $n^3 + n^2 + n$ teilbar.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020932:
Sei x die Anzahl der Tage. Im Verlauf eines Tages (mit der Nacht) geht die Maus auf die Katze $1/2 - 1/6 = 1/3$ Ellen zu. Gleichzeitig nähert sich die Katze $1 - 1/4 = 3/4$ Ellen. Insgesamt kommen sich Katze und Maus $13/12$ Ellen näher. Das ist aber nur bei den ersten $x - 1$ Tagen so. Am letzten Tag darf die Nacht nicht mit eingerechnet werden. An diesem letzten Tag geht die Maus auf die Katze $1/2$ Elle zu und die Katze auf die Maus 1 Elle.

Daher muss gelten

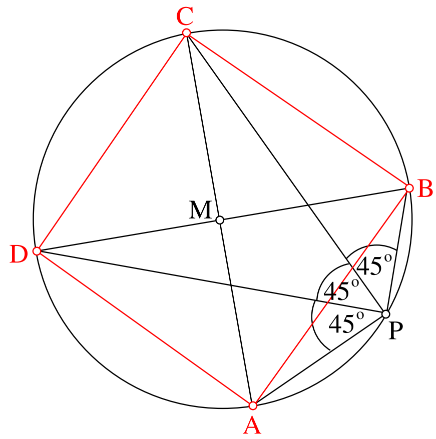
$$\frac{13}{12} \cdot (x - 1) + \frac{3}{2} \geq 60,$$

was für $x \geq 55$ wahr ist.

Am 55. Tag erreicht die Katze die Maus.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020933:



Der Peripheriewinkel $\sphericalangle CPA$ über der Strecke $\overline{AC}$ ist 90°. Damit ist nach Umkehrung des Thalessatzes $\overline{AC}$ ein Durchmesser des Kreises. Genauso ist $\overline{BD}$ ein Durchmesser. Beide Durchmesser schneiden sich im Punkt M, dem Mittelpunkt des Kreises.

Die beiden Diagonalen des Vierecks sind also gleich lang.

Der Peripheriewinkel $\sphericalangle CPD = 45°$. Der Zentriwinkel über $\overline{BC}$ ist also $\sphericalangle CMD = 90°$.

Die beiden Diagonalen sind nicht nur gleich lang, sondern stehen auch senkrecht aufeinander.

Das Viereck $ABCD$ muss ein Quadrat sein.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020934:

Wir benutzen die Gleichung $s = v \cdot t$ und erhalten für die erste Weghälfte

$$t_1 = \frac{60\text{ km}}{50\text{ km/h}} = \frac{6}{5}\text{ h}.$$

Für die zweite Weghälfte braucht der Zug

$$t_2 = \frac{60\text{ km}}{70\text{ km/h}} = \frac{6}{7}\text{ h}.$$

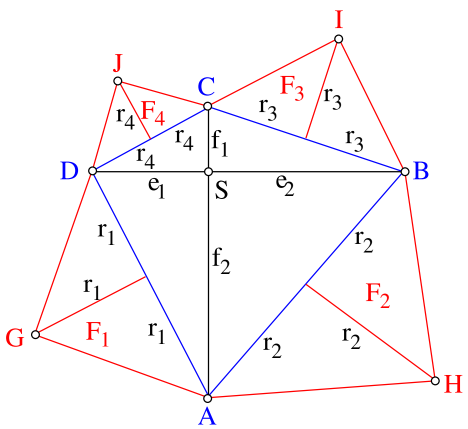
Insgesamt ergibt das eine Fahrzeit von

$$\frac{6}{5}\text{ h} + \frac{6}{7}\text{ h} = \frac{42+30}{35}\text{ h} = \frac{72}{35}\text{ h}$$

Da $\frac{72}{35}$ größer als 2 ist, kommt der Zug nicht pünktlich an.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020935:



Mit den Bezeichnungen in der Abbildung gilt als gegeben: e (bestehend aus den Abschnitten e_1 und e_2) steht senkrecht auf f (bestehend aus den Abschnitten f_1 und f_2).

Jedes der Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3, F_4 ist gleichschenklig-rechtwinklig. Damit teilt die Höhe in den Punkten G, H, I, J die Grundseite in zwei längengleiche Stücke, die zudem der Länge der Höhe entsprechen (Radius des jeweiligen Thaleskreises). Damit sind die Angaben r_1, r_2, r_3, r_4 in der Abbildung erklärt.

Der Flächeninhalt eines solchen Dreiecks ergibts sich dann als $F_i = r_i^2$ $(i \in 1, 2, 3, 4)$.

Gleichzeitig sind die Dreiecke ΔDAS, ΔABS, ΔBCS, ΔCDS rechtwinklig, so daß hier der Satz des Pythagoras angewandt werden kann:

$$\begin{aligned}4r_1^2 &= e_1^2 + f_2^2\\ 4r_2^2 &= e_2^2 + f_2^2\\ 4r_3^2 &= e_2^2 + f_1^2\\ 4r_4^2 &= e_1^2 + f_1^2\end{aligned}$$

Dies kann nun zur Berechnung der Flächeninhaltssumme herangezogen werden:

$$\begin{aligned}F_1 + F_3 &= r_1^2 + r_3^2\\ &= \frac{1}{4}\left(e_1^2 + f_2^2\right) + \frac{1}{4}\left(e_2^2 + f_1^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e_1^2 + f_2^2 + e_2^2 + f_1^2\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(e_2^2 + f_2^2\right) + \frac{1}{4}\left(e_1^2 + f_1^2\right)\\ &= r_2^2 + r_4^2\\ &= F_2 + F_4\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

Lösung 020935:

1. Schicht:	8+7+6+5+4+3+2+1 =	36
2. Schicht:	7+6+5+4+3+2+1 =	28
3. Schicht:	6+5+4+3+2+1 =	21
4. Schicht:	5+4+3+2+1 =	15
6. Schicht:	4+3+2+1 =	10
7. Schicht:	3+2+1 =	6
8. Schicht:	2+1 =	3
9. Schicht:	1 =	1

Insgesamt liegen in der Pyramide 120 Bälle.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka