2. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Saison 1962/1963

Aufgaben und Lösungen

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020911:

Für die Lagerung des Erdöls wurden im Rostocker Ölhafen Rolltanks aus der Sowjetunion aufgestellt. Ein solcher Tank hat die Form eines Zylinders mit dem Durchmesser $d = 23$ m und der Höhe $h = 21$ m.

a) Berechnen Sie unter Vernachlässigung der Wanddicke das Volumen eines Tanks!

b) Wieviel Tonnen Erdöl faßt ein Rolltank (Dichte des Erdöls etwa 0,85 g/cm^3)?

c) Der in Leningrad für die DDR gebaute Tanker Leuna I hat ein Gesamtfassungsvermögen von 10 200 t Erdöl. Seine vier Pumpen besitzen eine Leistung von je 250 t/h. In welcher Zeit wird der Tanker von ihnen leergepumpt?

d) Wieviel Zeit wird benötigt, um mit Hilfe dieser Pumpen einen Rolltank zu füllen?

Aufgabe 020912:

Im VEB Uhren- und Maschinenfabrik „Klement Gottwald“ senkte eine Jugendabteilung die Ausschußquote um 6 Prozent der Produktionsmenge, und sparte dabei fast 800 Arbeitsstunden ein. Danach betrug die Ausschußquote nur noch $\frac{2}{5}$ ihres bisherigen Wertes. Gleichzeitig entstand ein ökonomischer Nutzen von 3 351,– M.

a) Wieviel Prozent der Produktionsmenge betrug der Ausschuß vorher?

b) Wieviel Prozent beträgt er jetzt?

c) Welchem Wert (in M) entspricht der Ausschuß jetzt noch?

Aufgabe 020913:

Es ist zu beweisen, daß ein Dreieck, bei dem zwei Seitenhalbierende gleich groß sind, stets gleichschenklig ist!

Aufgabe 020914:

Welche zweistelligen Zahlen xy haben ein Quadrat von der Form zxy (x, y und z sind eine der Ziffern 0 bis 9)?

Es ist zu beweisen, daß die Lösung vollständig ist!

Aufgabe 020915:

Gegeben ist ein Dreieck ABC und sein Umkreis. Man konstruiere die Tangenten in A und B. Ihr Schnittpunkt sei D. Nun ziehe man durch D die Parallele zu der Tangente in C. Die Verlängerungen der Seiten CA und CB schneiden diese Parallelen in A' bzw. B'.

Es ist zu beweisen, daß

a) die Dreiecke $AA'D$ und $DB'B$ gleichschenklig sind und

b) es einen Kreis gibt, der durch A, A', B, B' geht!

Aufgabe 020916:

Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

```
* * * * * * * *  :  * * *  =  * * * * *
  * * *
  -----
      * * * *
        * * *
      -------
        * * * *
        8 * * *
        -------
              0
```

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 020911:

a) $V = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot h \approx 8\,725\ \mathrm{m}^3$

b) $m = \varrho \cdot V = 0,85\ \mathrm{g/cm^3} \cdot 8\,725 \cdot 10^6\ \mathrm{cm^3} \approx 7\,416\ \mathrm{t}$

c) $t = \dfrac{10\,200\ \mathrm{t}}{4 \cdot 250\ \mathrm{t/h}} = 10,2\ \mathrm{h} = 10\ \mathrm{h}\ 12\ \mathrm{min}$

d) $t = \dfrac{7\,416\ \mathrm{t}}{4 \cdot 250\ \mathrm{t/h}} \approx 7,4\ \mathrm{h} = 7\ \mathrm{h}\ 24\ \mathrm{min}$

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020912:

a) Aus der Gleichung $x - 6\,\% = \frac{2}{5}x$ erhalten wir $\frac{3}{5}x = 6\,\%$. Also betrug die Ausschußquote vorher $10\,\%$.

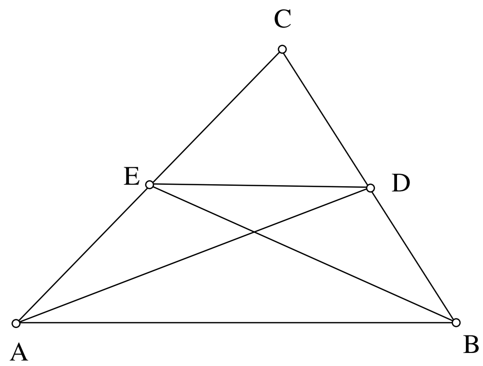
b) Demzufolge hat der Ausschuß jetzt einen Anteil von $4\,\%$ an der Produktionsmenge.

c) Die eingesparten $3\,351,-$ M entsprechen $6\,\%$. Also hat der jetzt noch produzierte Ausschuß einen Wert von $2\,234,-$ M.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020913:

Sei ΔABC ein solches Dreieck und seien o.B.d.A. A und B die beiden Punkte, von denen zwei gleichlange Seitenhalbierende ausgehen. Die Seitenhalbierende von A aus schneide die Strecke $\overline{BC}$ in D und die Seitenhalbierende von B aus schneide die Strecke $\overline{AC}$ in E.



Dann sind die Dreiecke ΔABC und ΔEDC ähnlich zueinander (SWS).

Mithin ist nach Strahlensatz $\overline{ED} \parallel \overline{AB}$. Das Viereck $ABDE$ ist daher ein Trapez.

Ein Trapez mit gleichlangen Diagonalen ist gleichschenklig. Daher ist $|\overline{AE}| = |\overline{DB}|$ und damit wegen Seitenhalbierenden $|\overline{AC}| = 2|\overline{AE}| = 2|\overline{DB}| = |\overline{CB}|$. Das Dreieck ist also gleichschenklig. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020914:

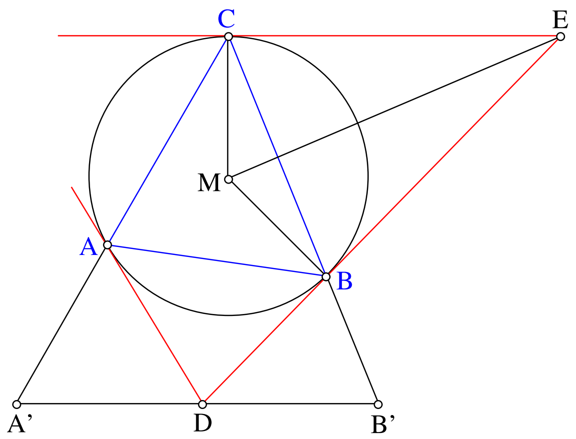
Die Ziffer y muß eine der Ziffern 1, 5 oder 6 sein, denn nur bei diesen Ziffern endet ihr Quadrat auf sich selbst ($1 \cdot 1 = 1$, $5 \cdot 5 = 25$ und $6 \cdot 6 = 36$).

Ferner gilt als Obergrenze $xy \leq 31$, da $32^2 = 1024$ und damit vierstellig statt wie gefordert dreistellig.

Als Lösungen für die Aufgabe kommen daher nur die Zahlen 11,15,16,21,25,26 und 31 in Frage. Durch Ausprobieren erhält man die einige Lösung: 25.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020915:



a) Der Schnittpunkt der Tangenten durch B und C sei E.

   Es gilt, daß die Dreiecke ΔMCE und MBE kongruent sind nach SSW:

   (1) gemeinsame Seite $\overline{ME}$,

   (2) $\overline{MB} = \overline{MC} = r$ und

   (3) $\sphericalangle MCE = \sphericalangle MBE = 90°$.

   Mithin ist $\overline{CE} = \overline{BE}$ und daher ist das Dreieck ΔCBE gleichschenklig.

   Es gilt $\sphericalangle CBE = \sphericalangle B'BD$, da dies Scheitelwinkel sind.

   Ferner gilt: $\sphericalangle BDB' = \sphericalangle BEC$ wegen Wechselwinkeln an geschnittenen Parallelen.

   Analog gilt $\sphericalangle ECB = \sphericalangle DB'B$.

   Daraus resultiert, daß die beiden Winkel $\sphericalangle B'BD$ und $\sphericalangle DB'B$ gleichgroße Basiswinkel sind und das Dreieck $\Delta B'BD$ gleichschenklig ist.

   Analog kann man den Beweis auf das Dreieck $\Delta DAA'$ übertragen.

b) Mit der gleichen Überlegung wie zu Beginn von a) kann man sehen, daß die Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{DB}$ gleichlang sind.

   Die Punkte A, A', B und B' haben so alle den gleichen Abstand vom Punkt D. Es exisitert ein Kreis mit Mittelpunkt D und Radius $|\overline{AD}|$, der alle vier Punkte enthält.

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka

Lösung 020916:

$$
\begin{array}{lcccccccccccccc}
* & * & * & * & * & * & * & * & : & * & * & * & = & * & * & * & * & * \\
 & * & * & * & & & & & & & & & & & & & & \\
\hline
\rightarrow & & & * & * & * & * & & & & & & & & & & & \\
 & & & & * & * & * & & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & * & * & * & * & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & * & * & * & & & & & & & & & & \\
\hline
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Aus der markierten Zeile und den beiden nächsten können wir schlußfolgern:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
\ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast & : & \ast & \ast & \ast & = & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Und daraus wiederum:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \ast & \ast & \ast & \ast & : & \ast & \ast & \ast & = & \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Für den Teiler kommen sind nur noch 333, 666 und 999 möglich. Wegen der eingetragenen 8 fallen die ersten beiden Möglichkeiten heraus.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & \ast & \ast & \ast & \ast & : & 9 & 9 & 9 & = & 1 & 0 & 0 & \ast & 9 \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & \ast & \ast & \ast & \ast & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Und schließlich:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 8 & 9 & 8 & 1 & : & 9 & 9 & 9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 & 9 \\
 & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & & & & \\ \cline{1-4}
 & & & 1 & 8 & 9 & 8 & & & & & & & & & & & \\
 & & & & 9 & 9 & 9 & & & & & & & & & & & \\ \cline{4-7}
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 8 & 9 & 9 & 1 & & & & & & & & & & \\ \cline{5-8}
 & & & & & & & 0 & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Andre Lanka