1. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011221:

Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in rechteckiger Form (Form eines Quaders) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße:	Länge, Breite und Höhe zusammen 90 cm, größte Länge jedoch nicht mehr als 60 cm;
Mindestmaße:	Länge 10 cm, Breite 7 cm.

a) Welches Höchstvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge, Breite und Höhe? (Begründung!)

b) Welches Mindestvolumen kann eine Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle die Kanten? (Begründung!)

Aufgabe 011222:

Wenn die drei natürlichen Zahlen x, y und z der Bedingung $x^2 + y^2 = z^2$ genügen, ist ihr Produkt $x \cdot y \cdot z$ stets durch 60 teilbar.

Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 011223:

Fünf Gefäße enthalten je 100 Kugeln. Dabei enthalten einige Gefäße nur Kugeln von 10 g Masse, während die anderen Gefäße nur Kugeln von 11 g Masse enthalten.

Wie kann man durch eine einzige Wägung mit Waagschalen und geeigneten Wägestücken feststellen, welche Gefäße Kugeln von 10 g und welche Gefäße Kugeln von 11 g enthalten? (Dabei dürfen aus den Gefäßen Kugeln herausgenommen werden.)

Aufgabe 011224:

Gegeben sind drei parallele Geraden g_1, g_2 und g_3, die untereinander ungleiche Abstände haben.

Konstruieren Sie ein gleichseitiges Dreieck, dessen Punkte A, B, C auf den Geraden liegen! Begründen Sie die Konstruktion!

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 12
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011221:

a) Bezeichnen wir die drei Abmessungen des Quaders mit x, y und z, so gilt es, das Produkt xyz nach oben durch die feste Summe $x+y+z = 90$ cm abzuschätzen. Dafür ist die Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel bestens geeignet:

$$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}, \qquad (x, y, z \geq 0,\ \text{Gleichheit nur für } x = y = z),$$
$$\Longrightarrow \quad V = xyz \leq \frac{(x+y+z)^3}{27} = 27\,000\ \text{cm}^3 = 27\ \text{l}.$$

Wir erkennen, dass das Volumen höchstens 27 l betragen kann, und zwar genau dann, wenn alle Abmessungen untereinander gleich sind: $x = y = z = 30$ cm (Würfel).

b) Diese Frage stellt nur eine Art *„Sophismus“* dar. Denn da für die Höhe keine Vorschriften gemacht werden, kann theoretisch $z = 0$ sein, d. h. das Mindestvolumen ist gleich null.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011222:
Da $60 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ gilt, ist zu zeigen, dass unter der Voraussetzung

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{1}$$

das Produkt $P = x \cdot y \cdot z$ durch 3, 4 und 5 teilbar ist.
1. Teilbarkeit durch 3:

Bei der Division natürlicher Zahlen durch 3 treten als mögliche Reste die Zahlen 0, 1 oder 2 auf und daher bei der Division der Quadrate dieser Zahlen durch 3 nur die Reste 0 und 1. Die möglichen Reste der Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen sind daher 0, 1 oder 2. Wegen (1) kann $x^2 + y^2$ nur die Reste 0 oder 1 haben, d. h., mindestens eine der Zahlen x^2, y^2 hat den Rest 0 und ist damit durch 3 teilbar.

Aus $3 \mid x^2$ oder $3 \mid y^2$ folgt $3 \mid x$ oder $3 \mid y$, und damit teilt 3 das Produkt $P = x \cdot y \cdot z$.

2. Teilbarkeit durch 5:

Bei der Division natürlicher Zahlen durch 5 kommen als Reste die Zahlen 0, 1, 2, 3 oder 4 vor und daher bei der Division der Quadrate dieser Zahlen nur die Reste 0, 1, oder 4. Die möglichen Reste der Summe zweier Quadrate natürlicher Zahlen sind daher 0, 1, 2, 3, oder 4. Wegen (1) kann $x^2 + y^2$ nur einen der Reste 0, 1 oder 4 haben, und daher hat mindestens eines der Quadrate x^2, y^2 oder z^2 den Rest 0 und ist somit durch 5 teilbar.

Wegen des Satzes über die eindeutige Zerlegbarkeit einer natürlichen Zahl in Primfaktoren ist daher weiter mindestens eine der Zahlen x, y oder z durch 5 teilbar und damit auch das Produkt P.

3. Teilbarkeit durch 4: Zunächst ist mindestens eine der Zahlen x, y oder z gerade; denn die Annahme, dass sowohl x, y und z (und damit auch x^2, y^2, z^2) ungerade Zahlen wären, führt zu dem Widerspruch, dass $x^2 + y^2 = z^2$ als Summe zweier ungerader Zahlen eine ungerade Zahl wäre. Ist z gerade, so sind entweder

- x und y gerade - in diesem Falle teilt 4 das Produkt P - oder
- x und y ungerade. In diesem Falle lassen sich x, y und z schreiben als $x = 2x' + 1$ und $y = 2y' + 1$ und $z = 2z'$, wobei x', y', z' beliebige natürliche Zahlen bedeuten. (1) ist dann äquivalent mit $4x'^2 + 4x' + 1 + 4y'^2 + 4y' + 1 = 4z'^2$ bzw. mit $4(x'^2 + x' + y'^2 + y') + 2 = 4z'^2$. Dies ist ein Widerspruch, da eine natürliche Zahl nicht gleichzeitig durch 4 teilbar sein kann und bei der Division durch 4 den Rest 2 lässt. Also ist Fall b) nicht möglich.

Ist z ungerade und eine der Zahlen x oder y gerade, so kann o. B. d. A. x als gerade vorausgesetzt werden. Dann ist y ungerade. In diesem Falle lassen sich x, y und z schreiben als $x = 2x'$ und $y = 2y' + 1$ und $z = 2z' + 1$, wobei x', y', z' beliebige natürliche Zahlen bedeuten. (1) ist dann gleichbedeutend mit: $4x'^2 + 4y'^2 + 4y' + 1 = 4z'^2 + 4z' + 1$ und weiter mit $x'^2 = z'^2 + z' - y'^2 - y'$, d. h., x'^2 ist als Summe von vier ungeraden Zahlen gerade, und daher ist auch x' durch 2 teilbar.

Wegen $x = 2x'$ ist daher x durch 4 teilbar und damit auch das Produkt P. $\square$

Aufgeschrieben von Burkhard Thiele – Quelle: (2)

Lösung 011223:

Man entnimmt aus dem

1. Gefäß $2^0 = 1$ Kugel,
2. Gefäß $2^1 = 2$ Kugeln,
3. Gefäß $2^2 = 4$ Kugeln,
4. Gefäß $2^3 = 8$ Kugeln sowie
5. Gefäß $2^4 = 16$ Kugeln.

Nun ermittelt man mit einer einzigen Wägung die Gesamtmasse dieser $2^5 - 1 = 31$ Kugeln. Subtrahiert man davon $31 \cdot 10\,\mathrm{g} = 310\,\mathrm{g}$, so erhält man die (Maß-)Zahl a.

Aus der Gleichung

$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 16x_5 = a \tag{1}$$

kann man eindeutig auf die Unbekannten $x_i \in \{0, 1\}$ schließen, die angeben, ob im $i$ten Gefäß Kugeln von 10 g ($x_i = 0$) oder 11 g ($x_i = 1$) liegen.

Beweis:

(1) ist nichts anderes als die *Binärdarstellung* $x_5x_4x_3x_2x_1$ der Dezimalzahl a, wobei die Umrechnung von einem Zahlensystem in das andere eineindeutig ist. $\square$

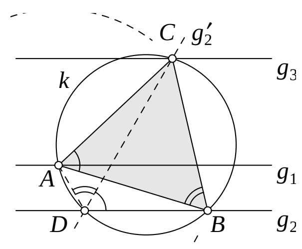
Beispiel:

Es sei $a = 22$. Man erhält: $0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 + 16 \cdot 1 = 22$. Also liegen in dem 1. und 4. Gefäß Kugeln von 10 g, während im 2., 3. und 5. Gefäß Kugeln von 11 g liegen.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011224:

Analysis und Konstruktion:



ABC sei das gleichseitige Dreieck mit den Eckpunkten auf den parallelen Geraden g_1, g_2 und g_3. Da $\triangle ABC$ längs der Parallelen beliebig verschoben werden kann, dürfen wir eine Ecke, etwa A auf g_1, nach Gutdünken auswählen.

Drehen wir nun $\triangle ABC$ um A um $60°$ und nimmt bei dieser Drehung Ecke B die Gerade g_2 mit, so gelangt AB in die Lage AC und g_2 nach g_2'. Eckpunkt C wird demnach durch g_3 und die um $60°$ gedrehte Gerade g_2' bestimmt. Den dritten Eckpunkt B finden wir als Schnittpunkt des Kreises mit Mittelpunkt A und Radius AC mit der Geraden g_2.

Alternative Konstruktion:

Wir wählen einen beliebigen Punkt D auf einer der äußeren Geraden, etwa g_2, und tragen hieran die Winkel $60°$ und $120°$ ab. Die Schnittpunkte der freien Schenkel mit g_3 und g_1 seien C bzw. A.

Der zweite Schnittpunkt des Umkreises k von $\triangle DCA$ mit g_2 sei B. Dann ist $\triangle ABC$ das gesuchte gleichseitige Dreieck.

Beweis:

Nach Konstruktion gilt $\sphericalangle BDC = \sphericalangle CDA = 60°$ im Sehnenviereck $BCAD$. Ferner ist aufgrund des Peripheriewinkelsatzes $\sphericalangle BDC = \sphericalangle BAC = 60°$ und $\sphericalangle CDA = \sphericalangle CBA = 60°$.

Das Dreieck ABC hat somit zwei Innenwinkel von $60°$, also hat auch der dritte Innenwinkel diese Größe. Mithin ist das Dreieck gleichseitig. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972