1. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011121:

3, 4, 5 ist ein sogenanntes pythagoreisches Zahlentripel, da $3^2 + 4^2 = 5^2$. Es ist das einzige derartige Zahlentripel, dessen Elemente sich nur jeweils um 1 unterscheiden.

Gibt es für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ noch andere Zahlentripel, bei denen $c = b + 1$ ist? Welche Gesetzmäßigkeit können Sie hier erkennen? Versuchen Sie, einen Ausdruck zu finden, mit dessen Hilfe sich schnell derartige Tripel finden lassen!

Aufgabe 011122:

Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in „Rollenform“ (zylindrische Form) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße:	Länge und der zweifache Durchmesser zusammen 100 cm, Länge jedoch nicht über 80 cm;
Mindestmaße:	Länge und zweifacher Durchmesser zusammen 17 cm, größte Ausdehnung nicht unter 10 cm.

a) Welches Höchstvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

b) Welches Mindestvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

Aufgabe 011123:

Meier, Krause, Schulze und Franke und ihre Frauen kaufen Geflügel ein. Jede der 8 Personen kauft so viel Tiere, wie sie DM für jedes Tier bezahlen. Jeder Mann gibt 96,- DM mehr aus als seine Frau. Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen. Krause kauft so viel wie seine Schwägerin. Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses. Frau Schulze ist eine geborene Lehmann.

Welches sind die Mädchennamen der anderen drei Frauen?

Anmerkung: Unter einem Schwager (Schwägerin) versteht man hier nur die Ehepartner der Geschwister bzw. die Geschwister des Ehepartners.

Aufgabe 011124:

Drei Strecken der unterschiedlichen Längen a, b und c sollen von einem Punkt M ausgehen und so in einer Ebene liegen, daß ihre Endpunkte A, B und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen und $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist. Führen Sie die Konstruktion aus und begründen Sie diese!

Es sei $a > c$. Geben Sie die Bedingungen für b an, bei denen die Aufgabe lösbar ist!

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011121:

Es gibt noch andere Zahlentripel, die die Bedingungen $a^2 + b^2 = c^2$ und $c = b + 1$ erfüllen:

$$a^2 + b^2 = (b+1)^2 = b^2 + 2b + 1,$$

$$\Longrightarrow \quad a^2 = 2b + 1, \tag{1}$$

$$\Longrightarrow \quad b = \frac{a^2 - 1}{2}. \tag{2}$$

Aus (1) lässt sich leicht erkennen, dass a^2 und damit a eine ungerade Zahl sein muss. Ein Tripel (a, b, c) mit den geforderten Eigenschaften kann somit schnell gefunden werden, indem man a eine ungerade Zahl zuweist und b mittels (2) berechnet. c ist dann um 1 größer als b. Es lässt sich also für jede beliebige ungerade natürliche Zahl a ein derartiges Tripel bestimmen.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011122:

a) Die Bedingungen für das Höchstmaß lauten: $l + 2d \leq 100$ cm und $l \leq 80$ cm. Damit erhält man für das Volumen eines Zylinders:

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 l \leq \frac{\pi}{4} d^2 (100\text{ cm} - 2d) = \frac{\pi}{4} \cdot 100\text{ cm} \cdot d^2 - \frac{\pi}{2} d^3.$$

Die notwendige Bedingung für ein Maximum ist $V'(d) = 0$, also

$$V'(d) = \frac{\pi}{2} \cdot 100\text{ cm} \cdot d - \frac{3\pi}{2} d^2 = 0,$$

somit $d_1 = 0$ und $d_2 = \frac{100}{3}$ cm. Die erste Lösung entfällt, da das Volumen dann null wäre. Die zur zweiten Lösung gehörige maximale Länge ist $l = \frac{100}{3}$ cm, das entsprechende Volumen $V = 29\,089\text{ cm}^3$. Es bleibt zu zeigen, dass die gefundene Lösung tatsächlich ein Maximum ist, wofür $V''(d) < 0$ hinreichend ist:

$$V''(d) = \frac{\pi}{2} \cdot 100\text{ cm} - 3\pi d = -\pi \cdot 50\text{ cm} < 0.$$

Es handelt sich also wirklich um ein Maximum. Das Höchstvolumen der Sendung beträgt $29\,089\text{ cm}^3$. In diesem Fall betragen Durchmesser *und* Länge $\frac{100}{3}$ cm.

b) Die Bedingungen für das Mindestmaß schließen einen Durchmesser von 0 cm nicht aus, was auf einen theoretischen Mindestwert des Volumens von $0\,\text{cm}^3$ führt. Nach der ersten Bedingung beträgt die Länge dann mindestens 17 cm.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011123:

Bezeichnen wir die Anzahl der gekauften Tiere mit a_1, a_2, a_3, a_4 (für Herrn Meier, Krause, Schulze und Franke) bzw. mit b_1, b_2, b_3, b_4 (für die Frauen in dieser Reihenfolge), wobei $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ ist. Dann gibt jeder der Männer a_i^2 und jede der Frauen b_i^2 DM aus und es gilt:

$$a_i^2 - b_i^2 = (a_i + b_i)(a_i - b_i) = 96 = 2^5 \cdot 3 = \{48 \cdot 2,\ \ 32 \cdot 3,\ \ 24 \cdot 4,\ \ 16 \cdot 6,\ \ 12 \cdot 8\}.$$

Damit kommen folgende Paare (a_i, b_i) in Betracht: $(25, 23), (14, 10), (11, 5), (10, 2)$.

Die Aussage „Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen“ kann also nur bedeuten, dass die Meiers das Paar $(25, 23)$ sind und die Männer der Paare $(14, 10)$ und $(11, 5)$ seine Schwäger.

Die Zahl 10 taucht zweimal auf, also ist das Paar $(10, 2)$ den Krauses zuzuordnen und die Frau des Paars $(14, 10)$ ist seine Schwägerin.

Aus „Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses“ folgt, dass das Paar $(14, 10)$ die Schulzes sind, und schließlich $(11, 5)$ die Frankes. Herr Meier ist also sowohl mit Herrn Schulze als auch mit Herrn Franke verschwägert.

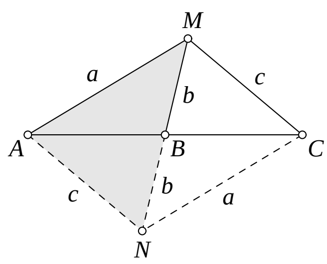
Das bedeutet im ersten Fall, dass entweder Frau Meier eine geborene Schulze oder Frau Schulze eine geborene Meier ist. Letzteres ist aber ausgeschlossen, da Frau Schulze eine geborene Lehmann ist, daher: Frau Meier ist eine geborene Schulze. Frau Franke ist eine geborene Meier. Frau Krause ist eine geborene Schulze.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011124:

I. Analyse:

Betrachten wir das Dreieck AMC, so ist MB wegen $AB = BC$ eine der Seitenhalbierenden. Es gilt also, ein Dreieck aus zwei Seiten und der eingeschlossenen Seitenhalbierenden zu konstruieren. Dazu ergänzen wir AMC zu einem Parallelogramm $AMCN$, in welchem sich die Diagonalen AC und MN bekanntermaßen stets halbieren. Das Teildreieck AMN kann somit aus den gegebenen Stücken hergestellt werden.



II. Konstruktionsbeschreibung:

Wir konstruieren das Dreieck AMN aus den Seitenlängen a, c und $2b$ nach Kongruenzsatz SSS. Der Mittelpunkt der Strecke MN ist dann B und AB verdoppelt liefert Punkt C.

III. Beweis:

Nach obiger Konstruktion ist AMN ein Dreieck, in dem $AM = a$, $AN = c$ und $MB = BN = b$ gilt sowie AB eine Seitenhalbierende ist. Da C durch Verdopplung von AB entsteht, gilt die Kongruenz $\triangle ABN \cong \triangle CBM$ (SWS), d. h. $AN = MC = c$. Die Punkte A, B und C haben damit die geforderten Abstände von M. $\square$

IV. Konstruktion:

Das Dreieck AMN existiert genau dann, wenn die Dreiecksungleichungen erfüllt sind: $a + c > 2b$ und $c + 2b > a$. Das führt auf die gesuchten Bedingungen für die Länge b:

$$\frac{1}{2}(a - c) < b < \frac{1}{2}(a + c).$$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht