1. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011031:

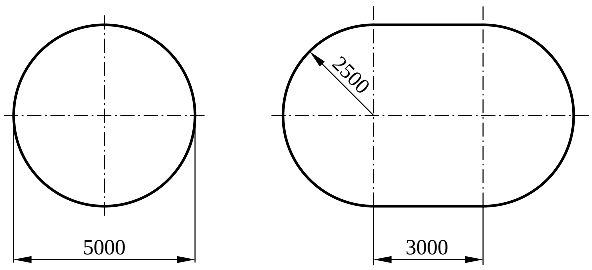
Auf dem XXII. Parteitag der KPdSU wurde über die Leistungen der Bestarbeiter in der Landwirtschaft berichtet, die große Erfolge bei der Steigerung der Erträge für Getreide und Hülsenfrüchte erreicht haben.

In einem Kolchos des Gebietes Winniza wurden 1961 auf einer Fläche von 708 ha 31 dt je ha Erbsen geerntet. Ferner erzielte der Kolchos den hohen Ernteertrag von 60 dt je ha an Körnermais. Von der gesamten Getreideanbaufläche (einschließlich Erbsen) waren 21 Prozent mit Erbsen und 30 Prozent mit Körnermais bestellt. Der durchschnittliche Ernteertrag für die Gesamtfläche betrug 38 dt je ha.

Wie groß war der Ernteertrag je ha für die übrigen Getreidekulturen?

Aufgabe 011032:

In dem VEB Schwermaschinenbau „Karl Liebknecht“ in Magdeburg werden große Zellstoffkocher aus Stahl hergestellt. Ein solcher Apparat ist 8 m lang und hat in seinem mittleren Teil einen Durchmesser von 5 m (s. Abbildung) und ein Leergewicht von 30 Mp.



a) Wie groß sind seine Oberfläche und seine Wandstärke?
(Wichte des Stahls 7,85 p/cm^3)

b) Wie groß ist sein Fassungsvermögen?

Aufgabe 011033:

In einem konvexen Zwölfeck sind 3 Innenwinkel rechte Winkel.

Wieviel der übrigen 9 Innenwinkel können spitze Winkel sein? Die Behauptung ist zu beweisen!

Aufgabe 011034:

Eine Armbanduhr besitzt außer dem im Unterteil des Ziffernblattes angebrachten Sekundenzeiger noch eine Stoppuhreinrichtung mit einem Sekundenzeiger, dessen Achse durch die Mitte des Ziffernblattes verläuft. Wenn beide Zeiger in Gang sind, laufen sie mit gleicher Geschwindigkeit um. Da die Stoppuhr willkürlich in Gang gesetzt werden kann, werden die beiden Sekundenzeiger in der Regel nicht zur gleichen Zeit die gleiche Sekunde anzeigen. Wir denken uns nun beide Zeiger in beiden Richtungen beliebig verlängert.

a) Welches ist der geometrische Ort für alle Schnittpunkte der beiden umlaufenden Sekundenzeiger bzw. ihrer Verlängerungen?

b) Konstruieren Sie diese Kurve für den folgenden Fall: Drehpunktabstand der Zeiger $a = 5\,\text{cm}$ (aus Gründen der besseren Konstruierbarkeit absichtlich so groß gewählt)!

Beim Ingangsetzen der Stoppuhr zeigt der kleine Sekundenzeiger auf die 10 des Sekundenziffernblattes.

Aufgabe 011035:

Mit welcher Ziffer endet die Summe $11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6$? Begründen Sie Ihre Aussage!

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 10
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011031:

Der Ertrag an Erbsen beträgt $708 \cdot 31$ dt. Da die 21 % der gesamten Anbaufläche, auf denen Erbsen angebaut werden, 708 ha entsprechen, beträgt die Gesamtfläche $\frac{708}{0{,}21}$ ha. Auf dieser wurde also ein Ertrag von $\frac{38\cdot 708}{0{,}21}$ dt erzielt.

Die Maisanbaufläche beträgt $\frac{0{,}3\cdot 708}{0{,}21}$ ha, es wurden also $\frac{60\cdot 0{,}3\cdot 708}{0{,}21}$ dt $= \frac{18\cdot 708}{0{,}21}$ dt Mais geerntet.

Die Fläche, auf der weder Mais noch Erbsen angebaut wurden, beträgt $\frac{0{,}49\cdot 708}{0{,}21}$ ha. Damit beträgt der Ernteertrag der restlichen Getreidekulturen

$$\frac{\left(\frac{38\cdot 708}{0{,}21} - 708\cdot 31 - \frac{18\cdot 708}{0{,}21}\right)\text{ dt}}{\frac{0{,}49\cdot 708}{0{,}21}\text{ ha}} = \frac{(38 - 6{,}51 - 18)\text{ dt}}{0{,}49\text{ ha}} = 27{,}5\text{ dt/ha}.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 011032:

Der Kocher hat die Form eines Zylinders, an dessen Grund- und Deckfläche jeweils eine Halbkugel angebracht ist.

a) Damit ist die Oberfläche gleich die Summe der Oberfläche der gesamten Kugel und der Mantelfläche des Zylinders, also gleich $4\pi(2,5\text{ m})^2 + 2\pi\cdot 2,5\text{ m}\cdot 3\text{ m} = 125,7\text{ m}^2$. Die Wichte eines Stoffes ist der Quotient aus Masse und Volumen (des Stahlmantels). Damit beträgt das Volumen des verwendeten Stahls

$$\frac{30\text{ Mp}\cdot\text{cm}^3}{7,85\text{ p}} = \frac{30}{7,85}\text{ m}^3 = 3,82\text{ m}^3.$$

Die Wandstärke beträgt damit

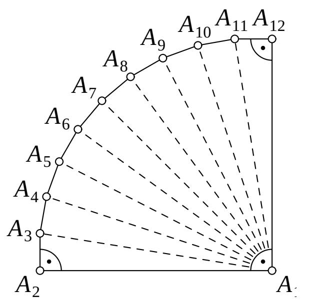
$$\frac{3,82\text{ m}^3}{125\text{ m}^2} = 0,03\text{ m} = 3\text{ cm}.$$

b) Das Fassungsvermögen ist die Summe aus dem Volumen der Kugel und des Zylinders, also gleich

$$\frac{4}{3}\pi(2,5\text{ m})^3 + \pi(2,5\text{ m})^2\cdot 3\text{ m} = 124,4\text{ m}^3.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 011033:



Wir legen einen Eckpunkt des Zwölfecks fest, etwa A_1, und zeichnen alle Diagonalen, die durch diesen Punkt gehen, ein. Dabei entstehen 10 Dreiecke, die durch solche Diagonalen und die Seiten des Zwölfecks begrenzt sind.

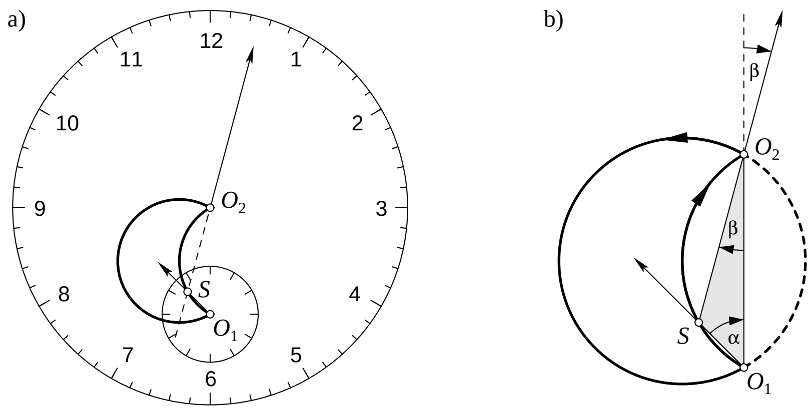
Die Innenwinkelsumme des Zwölfecks ist gleich der Summe aller Innenwinkel dieser Dreiecke, also gleich $10 \cdot 180° = 1\,800°$. Sind drei der Innenwinkel rechte Winkel (hier diejenigen bei A_{12}, A_1 und A_2), müssen die übrigen 9 Innenwinkel folglich eine Summe von $1\,800° - 270° = 1\,530°$ haben.

Ist darunter ein spitzer Winkel, so ist die Summe der restlichen 8 Winkel größer als $1\,530° - 90° = 1\,440°$. Diese sind jedoch alle kleiner als $180°$ (da das Zwölfeck konvex ist), ihre Summe ist also kleiner als $8 \cdot 180° = 1\,440°$. Damit kann es keine spitzen Winkel in diesem Zwölfeck geben.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 011034:

Das Bild a) zeigt das Ziffernblatt der Armbanduhr und die Stellung der beiden Sekundenzeiger, nachdem beide einen Winkel von 15° überstrichen haben. Die Mittelpunkte der Zeiger seien O_1 bzw. O_2, deren Schnittpunkt S. Es genügt im Folgenden, ausschließlich das Dreieck O_1O_2S zu betrachten (Bild b).



a) Je weiter die Zeit voran schreitet, desto kleiner wird der Winkel α und desto größer der Winkel β. Da beide Zeiger aber mit derselben Winkelgeschwindigkeit umlaufen, bleibt die Summe $\alpha + \beta$ konstant, die hier gleich dem Differenzwinkel beider Zeiger zu Beginn ist.

   Wegen der Innenwinkelsumme in diesem Dreieck folgt daraus: $\sphericalangle O_1SO_2 = 180° - (\alpha + \beta) = \text{const.}$

   Die Strecke O_1O_2 ist ebenfalls konstant, somit kann der gesuchte geometrische Ort aller Schnittpunkte S nur ein Kreisbogen sein, für den alle Peripheriewinkel über der Sehne O_1O_2 konstant sind.

   Erreicht einer der Zeiger die vertikale Richtung, kehrt sich die Umlaufrichtung von S um. Insgesamt ergibt sich somit eine, im Bild gezeigte möndchenförmige Figur.

b) Zur Konstruktion wird derjenige Kreisbogen gezogen, der über der Sehne O_1O_2 einen Peripheriewinkel von $\alpha + \beta$ fasst. Der kleinere der beiden Bögen O_1O_2 wird anschließend an der Geraden durch O_1 und O_2 gespiegelt.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011035:
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
11^6 &\equiv 1^6 \equiv 1 \pmod{10},\\
12^6 &\equiv 2^6 \equiv 64 \equiv 4 \pmod{10},\\
13^6 &\equiv 3^6 \equiv 27 \cdot 27 \equiv 49 \equiv 9 \pmod{10},\\
14^6 &\equiv 4^6 \equiv 16^3 \equiv 6^3 \equiv 6 \pmod{10} \quad (\text{denn } 6 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}),\\
15^6 &\equiv 5^6 \equiv 5 \pmod{10} \quad (\text{denn } 5 \cdot 5 \equiv 5 \pmod{10}),\\
16^6 &\equiv 6^6 \equiv 6 \pmod{10} \quad (\text{denn } 6 \cdot 6 \equiv 6 \pmod{10}).
\end{aligned}
$$

Damit ist

$$11^6 + 12^6 + 13^6 + 14^6 + 15^6 + 16^6 \equiv 1 + 4 + 9 + 6 + 5 + 6 \equiv 1 \pmod{10}.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns