



1. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen





1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Aufgabe 010931:

In den ersten $2\frac{1}{2}$ Jahren des Siebenjahrplans erzeugten die Stahlwerker der Sowjetunion insgesamt 113 Prozent der gesamten italienischen Stahlproduktion des Jahres 1959 über den Plan hinaus. Jährlich wurden dabei im Durchschnitt nur 310 000 t Stahl weniger zusätzlich produziert als in einem halben Jahr (1959) in Italien.

Wieviel Tonnen Stahl produzierten die Stahlwerker der Sowjetunion zusätzlich? Wieviel Tonnen Stahl wurde 1959 in Italien produziert?

Aufgabe 010932:

Kurt fährt mit der Straßenbahn eine lange gerade Straße entlang. Plötzlich sieht er seinen Freund auf gleicher Höhe in entgegengesetzter Richtung auf dieser Straße gehen. Nach einer Minute hält die Straßenbahn. Kurt steigt aus und läuft doppelt so schnell wie sein Freund, jedoch nur mit einem Viertel der Durchschnittsgeschwindigkeit der Straßenbahn hinter seinem Freund her.

Nach wieviel Minuten holt er ihn ein? Wie haben Sie das Ergebnis ermittelt?

Aufgabe 010933:

Es ist der Bruch zu finden, der gleich 0,4 ist und dessen Zähler und Nenner als Summe eine zweistellige Quadratzahl ergeben!

Wie haben Sie die Lösung gefunden?

Aufgabe 010934:

Gegeben seien ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S sowie ein zwischen den Schenkeln dieses Winkels, aber nicht auf der Winkelhalbierenden liegender Punkt P .

Konstruieren Sie eine durch P verlaufende Gerade, die die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B so schneidet, daß $\overline{PA} = \overline{PB}$ wird! Die Konstruktion ist zu begründen!

Aufgabe 010935:

In einem Abteil des Pannonia-Express sitzen sechs Fahrgäste, die in Berlin, Rostock, Schwerin, Erfurt, Cottbus und Suhl ihren Wohnsitz haben. Die Anfangsbuchstaben ihrer Namen sind A, B, C, D, E , und F (die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnsitze). Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgende Tatsachen:

- (1) Zwei Fahrgäste, und zwar A und der Berliner, sind Ingenieure.
- (2) Zwei Fahrgäste, und zwar E und der Rostocker, sind Dreher.



-
- (3) Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Schweriner, sind Kranführer.
 - (4) B und F sind aktive Sportler, der Schweriner treibt nicht Sport.
 - (5) Der Fahrgast aus Cottbus ist älter als A , der Fahrgast aus Suhl ist jünger als C .
 - (6) Zwei Fahrgäste, und zwar B und der Berliner, wollen in Prag aussteigen. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Cottbusser, wollen bis Budapest fahren.

Welches sind die Namen, Berufe und Wohnsitze der einzelnen Fahrgäste?



1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 010931:

Ist x die italienische Stahlproduktion von 1959 in Tonnen, so wurden in der Sowjetunion in den $2\frac{1}{2}$ Jahren $1,13x$ Tonnen Stahl über den Plan produziert. Im einem Jahr beträgt die Überproduktion in der Sowjetunion dann $\frac{1}{2}x - 310\,000$ Tonnen. Also ist $\frac{5}{2}(\frac{1}{2}x - 310\,000) = \frac{113}{100}x$, also $x \approx 6\,500\,000$. Damit wurden 1959 in Italien ca. 6,5 Millionen Tonnen Stahl produziert und in den $2\frac{1}{2}$ Jahren in der Sowjetunion $1,13x = 7,3$ Millionen Tonnen Stahl über den Plan.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 010932:

Seien v_F , v_S und v_K die Geschwindigkeiten des Freundes, der Straßenbahn bzw. von Kurt. Zunächst bewegen sich Freund und Straßenbahn mit der Relativgeschwindigkeit $v_S + v_F$ auseinander. Zum Zeitpunkt des Aussteigens nach $t = 1$ min sind beide die Strecke $s = (v_S + v_F)t$ voneinander entfernt. Anschließend holt Kurt seinen Freund mit der Relativgeschwindigkeit $v_K - v_F$ wieder ein. Laut Aufgabenstellung ist ferner $v_K = 2v_F = \frac{1}{4}v_S$. Somit gilt für die zum Einholen benötigte Zeit:

$$t' = \frac{s}{v_K - v_F} = \frac{v_S + v_F}{v_K - v_F} t = \frac{8v_F + v_F}{2v_F - v_F} t = 9t = 9 \text{ min.}$$

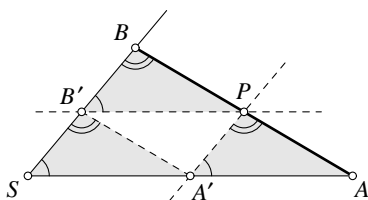
Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 010933:

Jeder Bruch, der gleich 0,4 ist, hat die Form $\frac{2n}{5n}$. Die Summe $2n + 5n = 7n$ ist nur für $n = 7$ eine zweistellige Quadratzahl. Also ist der gesuchte Zähler gleich 14, der Nenner gleich 35.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 010934:



Konstruktion:

Man ziehe die Parallelen zu beiden Schenkeln durch den Punkt P . Dadurch erhält man die Punkte A' und B' als Schnittpunkte mit den Schenkeln. Verlängert man SA' und SB' über A' bzw. B' hinaus um ihre jeweilige eigene Länge, dann erhält man die Punkte A und B und damit die gesuchte Gerade.



Beweis:

Dass $PA = PB$ tatsächlich erfüllt ist, sieht man beim Vergleichen der Dreiecke $SA'B'$, $A'AP$ und $B'PB$. Es gilt nämlich

$$\sphericalangle A'SB' = \sphericalangle AA'P = \sphericalangle PB'B \text{ (Stufenwinkel an den Parallelen } SA \parallel B'P),$$

$$\sphericalangle A'B'S = \sphericalangle APA' = \sphericalangle PBB' \text{ (Stufenwinkel an den Parallelen } SB \parallel A'P) \text{ und}$$

$$SA' = A'A \text{ bzw. } SB' = B'B \text{ (per Konstruktion).}$$

Damit sind die drei genannten Dreiecke kongruent, die Seiten PA und PB also gleich. \square

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 010935:

Wegen d) und f) kommt B weder aus Schwerin noch aus Berlin. Da er aber einen der drei Berufe aus a)–c) haben muß, kommt er aus Rostock.

Wegen b) und c) kommt C weder aus Rostock, noch aus Berlin oder Schwerin, wegen e) nicht aus Suhl und wegen f) nicht aus Cottbus. Also muß er aus Erfurt kommen.

A kommt wegen a)–c) weder aus Berlin noch aus Rostock oder Schwerin. Wegen e) kommt er nicht aus Cottbus und aus Erfurt kommt bereits C. Also kommt A aus Suhl.

Da E wegen a)–c) weder aus Berlin noch aus Schwerin kommt und alle übrigen Städte bereits zugeordnet sind, kommt er aus Cottbus.

Da alle 6 Personen in verschiedenen Städten wohnen, ergibt sich nun leicht die folgende Aufstellung: A ist Ingenieur aus Suhl, B ist Dreher aus Rostock, C ist Kranführer aus Erfurt, D ist Kranführer aus Schwerin, E ist Dreher aus Cottbus und F ist Ingenieur aus Berlin.

Alternative Lösung von Eckard Specht:

Diese Aufgabe lässt sich auch mit Hilfe einer sog. *Strukturmatrix* lösen. Dazu werden in einem Tableau die Spalten mit A–F und die Zeilen mit den Wohnorten bezeichnet. Nun wird nach dem Text der Aufgabenstellung jedes Feld der Matrix - hier mit einem hohlen Quadrat - markiert, wenn die entsprechende Zuordnung ausgeschlossen ist.

a)–c)	A	B	C	D	E	F
Berlin	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Rostock	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Schwerin	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Cottbus	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Suhl	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Erfurt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

a)–f)	A	B	C	D	E	F
Berlin	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Rostock	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Schwerin	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Cottbus	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Suhl	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Erfurt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

	A	B	C	D	E	F
Berlin	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
Rostock	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Schwerin	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Cottbus	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Suhl	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
Erfurt	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Nach den Aussagen a)–c) ergibt sich das linke Bild. (A kann wegen a) nicht Berliner und wegen der sich gegenseitig ausschließenden Berufe auch nicht Rostocker und Schweriner sein usw.)

Markiert man die restlichen Felder gemäß der Aussagen d)–f), erhält man das mittlere Bild.

Jetzt kann in jeder Spalte bzw. Zeile, in der schon fünf Kombinationen ausgeschlossen sind, ein Kreuz gemacht werden, welches anzeigt, dass die betreffende Zuordnung besteht.

Anschließend werden sämtliche offenen Kombinationen dieser Spalte und Zeile ausgeschlossen. Somit gelangt man zur Lösung im rechten Bild, wobei es durchaus mehrere Reihenfolgen geben kann, dorthin zu gelangen.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns