1. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010921:

Von den gesamten Kohlenvorräten der Welt liegen etwa $\frac{3}{5}$ in der Sowjetunion, $\frac{2}{9}$ der Vorräte der UdSSR betragen die Kohlenvorräte der USA, während die restlichen Länder 5 Billionen Tonnen weniger als die UdSSR besitzen.

a) Wie groß sind die Kohlenvorräte der Sowjetunion und die der USA?

b) Wie groß sind die Vorräte der ganzen Welt?

Aufgabe 010922:

a) Ein Hanfseil von 15 mm Durchmesser verträgt eine Belastung von 175 kp, ohne zu reißen. Welcher Länge des Seiles entspricht diese Belastung, d. h. wann reißt das Seil unter seinem eigenen Gewicht, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 1 p wiegt?

b) Ein Dederonseil vom gleichen Querschnitt hält eine weitaus größere Belastung aus, nämlich 400 kp. Welcher Länge des Seils entspricht diese Belastung, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 0,8 p wiegt?

Aufgabe 010923:

Man wähle zwei beliebige, aber verschiedene natürliche Zahlen und bilde ihre Summe, ihre Differenz und ihr Produkt.

Es ist zu beweisen, daß unter diesen drei Zahlen wenigstens eine durch 3 teilbar ist!

Aufgabe 010924:

Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 93 024. Wie heißen die Zahlen?

Aufgabe 010925:

Zeichnen Sie zwei ähnliche Dreiecke mit den Seiten a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2! Bilden Sie $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$ und $c_1 + c_2$! Konstruieren Sie mit diesen Strecken ein Dreieck! Ist es zu den ursprünglichen Dreiecken ähnlich? Beweisen Sie Ihre Behauptung: a) geometrisch, b) arithmetisch!

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 010921:

Ist x die Menge der Kohlevorräte der ganzen Welt in Billionen Tonnen, so lagern in der Sowjetunion $\frac{3}{5}x$ und in den USA $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5}x = \frac{2}{15}x$. Die Kohlevorräte der übrigen Länder betragen dann

$$\left(1 - \frac{3}{5} - \frac{2}{15}\right)x = \frac{3}{5}x - 5.$$

a) Umstellen der Gleichung ergibt, dass auf der ganzen Welt $x = 15$ Billionen Tonnen lagern,

b) davon in der Sowjetunion $\frac{3}{5}x = 9$ Billionen Tonnen und in den USA $\frac{2}{15}x = 2$ Billionen Tonnen Kohle.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 010922:

a) Das Hanfseil hat eine Querschnittsfläche von $A = \frac{\pi}{4}d^2 = 176{,}7\,\mathrm{mm}^2$, es wiegt also pro Meter 176,7 p. Somit kann es maximal

$$l_{\max} = \frac{175\,000\,\mathrm{p}}{176{,}7\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{m}}} = 990{,}3\,\mathrm{m}$$

lang sein, ohne unter seinem Eigengewicht zu reißen.

b) Für die maximale Länge des Dederonseils gilt hingegen: $l_{\max} = 400\,000\,\mathrm{p}/(141{,}4\,\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{m}}) = 2\,829{,}4\,\mathrm{m}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 010923:

Ist eine der beiden Zahlen durch 3 teilbar, so auch das Produkt.

Lassen die beiden Zahlen bei Division durch 3 denselben Rest, dann ist die Differenz durch 3 teilbar.

Läßt eine Zahl bei Division durch 3 den Rest 1, die andere den Rest 2, dann ist die Summe der beiden Zahlen ein Vielfaches von 3.

Andere Möglichkeiten für die Reste gibt es nicht. □

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 010924:

Sei n die kleinste der vier Zahlen. Wegen $10^4 = 10\,000 < 93\,024$ und $20^4 = 160\,000 > 93\,024$ gilt $7 < n < 20$. Da 5 kein Teiler von 93 024 ist, darf n bei Division durch 5 nur den Rest 1 lassen. Es kommt also nur

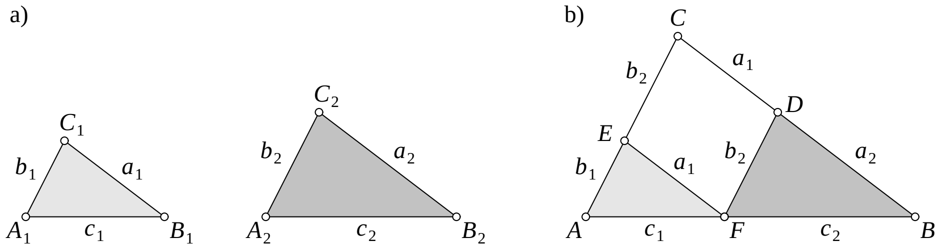
$n = \{11, 16\}$ in Frage. Wegen $93\,024 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 17 \cdot 19$ müssen 17 und 19 unter den Zahlen n, $n+1$, $n+2$ und $n+3$ vorkommen. Damit ist $n = 16$.

Probe: $16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 = 93\,024$. ✓

Aufgeschrieben und gelöst von Christiane Behns

Lösung 010925:
Das Dreieck aus den Seiten $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, $c_1 + c_2$ ist zu den beiden ursprünglichen Dreiecken ähnlich.

a) *Geometrischer Beweis:* In Bild a) sind beide Dreiecke $A_1B_1C_1$ und $A_2B_2C_2$ zu sehen, die, wenn sie ähnlich zueinander sein sollen, untereinander jeweils gleiche Innenwinkel haben müssen. In Bild b) werden sie als $\triangle AFE$ und $\triangle FBD$ so aneinander gesetzt, dass A, F und B auf einer Geraden zu liegen kommen. Werden nun die Strecken DF entlang FE und EF entlang FD parallel verschoben, so ist das entstehende Viereck $EFDC$ offenbar ein Parallelogramm, die Punkte A, E, C bzw. B, D, C liegen wegen gleicher Innenwinkel der Dreiecke AFE und FBD jeweils auf einer Geraden und es gilt:
$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle ECD = \sphericalangle AEF = \sphericalangle FDB.$$
Damit hat das Dreieck ABC die geforderten Seitenlängen $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$, $c_1 + c_2$ und dieselben Innenwinkel wie die gegebenen Dreiecke. □



b) *Arithmetischer Beweis:* Nach Voraussetzung sind beide Dreiecke ähnlich, also gilt:
$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1}.$$
Nach Addition von 1 folgt daraus
$$1 + \frac{a_2}{a_1} = 1 + \frac{b_2}{b_1} = 1 + \frac{c_2}{c_1} \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_1 + a_2}{a_1} = \frac{b_1 + b_2}{b_1} = \frac{c_1 + c_2}{c_1}.$$
Die letzte Gleichung besagt, dass auch das aus den Summen der Seitenlängen gebildete Dreieck diesen ähnlich ist. □

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier