1. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1961/1962

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010731:

Ein guter Melker kann in einer Stunde höchstens 8 Kühe melken. Durch den Einsatz einer sowjetischen Melkmaschine kann er in 8 Stunden 96 Kühe melken. Die 150 Milchkühe, die das VEG Biesdorf im Jahre 1958 besaß, konnten mit Hilfe eines Melkstandes bereits in 3 Stunden gemolken werden.

Um wieviel Prozent wächst die Arbeitsproduktivität

a) beim Einsatz der sowjetischen Melkmaschine,

b) beim Einsatz eines Melkstandes?

Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität verstehen wir in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Kühe und der zu ihrem Melken benötigten Zeit.

Aufgabe 010732:

Im Sommer 1961 stellte der Dresdener Meister des Sports Gerhard Wissmann einen neuen Segelflug-Rekord im Dreieck-Streckenflug auf. Er legte die Strecke Zossen - Storkow - Golßen - Zossen in 1 h 1 min 30 s zurück. Auf einer Karte im Maßstab 1 : 750 000 stellen wir die folgenden Strecken fest:

Zossen–Storkow	$4,5$ cm,
Storkow–Golßen	$5,2$ cm,
Golßen–Zossen	$3,9$ cm.

Zu der errechneten Entfernung müssen wir noch 4 km für Umwege bei der Kursänderung hinzuzählen.

a) Welche Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte Gerhard Wissmann?

b) Um wieviel Prozent war seine Geschwindigkeit höher als die des westdeutschen Rekordinhabers Ernst-Günter Haase, der eine Strecke von 100 km in 1 h 12 min zurücklegte?

Aufgabe 010733:

In einer Ebene sind drei einander in einem Punkte S schneidende Geraden g_1, g_2 und g_3 sowie auf g_1 der Punkt A gegeben. Konstruiere ein Dreieck, das A als Eckpunkt und den Schnittpunkt S als Umkreismittelpunkt hat und bei dem B auf g_2 und C auf g_3 oder umgekehrt liegen! Wieviel verschiedene Dreiecke lassen sich so konstruieren?

Aufgabe 010734:

Es ist zu beweisen, daß die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks auf dessen Grundseite gefällte Höhe gleichzeitig Winkel- und Seitenhalbierende ist.

Aufgabe 010735:

Rolf behauptet, er kenne eine Rechenaufgabe, in der nur die Zahl 7 verwendet wird und deren Ergebnis die Jahreszahl 1962 ist.

a) Versuche, eine derartige Rechenaufgabe aufzustellen!

b) Läßt sich auch eine Rechenaufgabe aufstellen, in der nur die Zahl 1962 verwendet wird und deren Ergebnis 7 lautet? Wenn ja, gib diese Rechenaufgabe an!

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 010731:
Die Ausgangsgröße ist der Melker, der 8 Kühe pro Stunde melkt.

a) Mit der sowjetischen Melkmaschine schafft er 96 Kühe/8 h = 12 Kühe/h, also 50% mehr.

b) Am Melkstand können 150 Kühe/3 h = 50 Kühe/h gemolken werden, das ist eine Steigerung *auf* 625 % oder *um* 525 % gegenüber der Ausgangsgröße.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)

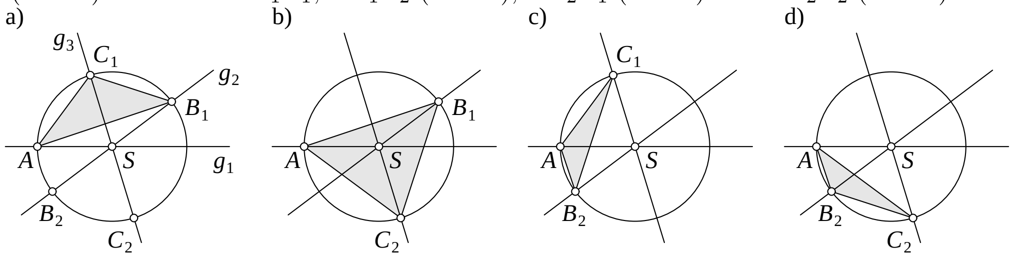
Lösung 010732:
Die geflogene Entfernung betrug $750\,000 \cdot (4{,}5 + 5{,}2 + 3{,}9)$ cm + 4 km = 106 km.

a) Als Durchschnittsgeschwindigkeit erreichte Gerhard Wissmann $\frac{106\text{ km}}{1\frac{1}{40}\text{ h}} = 103\frac{17}{41}$ km/h.

b) Sein Konkurrent Ernst-Günter Haase erreichte nur $\frac{100\text{ km}}{1\frac{1}{5}\text{ h}} = 83\frac{1}{3}$ km/h, so dass der neue Rekordinhaber den alten um 24 % übertraf.

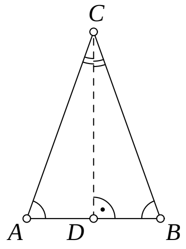
Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)

Lösung 010733:
Konstruktion: Es wird ein Kreis mit dem Mittelpunkt S und dem Radius SA gezogen, der die beiden anderen Geraden g_2 und g_3 in den Punkten B_1, B_2 bzw. C_1, C_2 trifft (Bild a). Damit gilt jeweils $SA = SB_i = SC_j$, $(i, j = 1, 2)$ und S ist tatsächlich der Umkreismittelpunkt aller möglichen Dreiecke AB_iC_j. Da die Geraden den Kreis jeweils zweimal schneiden, gibt es für B und C jeweils zwei Möglichkeiten, insgesamt kann man sie zu vier $(= 2 \cdot 2)$ Dreiecken AB_1C_1, AB_1C_2 (Bild b), AB_2C_1 (Bild c) und AB_2C_2 (Bild d) kombinieren.



Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)

Lösung 010734:



Beweis: Die Höhe CD bildet mit der Grundseite AB einen rechten Winkel, die Schenkel $AC = BC$ und die Basiswinkel $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$ sind nach Voraussetzung gleich. Daher sind die beiden Teildreiecke ADC und BDC, die durch die Höhe entstehen, nach dem Kongruenzsatz SWW deckungsgleich. Daraus folgt, dass die beiden Winkel $\sphericalangle ACD$ und $\sphericalangle BCD$ bzw. Strecken AD und BD gleich groß sind - was genau bei einer Halbierung der Fall ist. CD ist damit zugleich Winkel- und Seitenhalbierende.

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)

Lösung 010735:

Zu dieser Aufgabenstellung gibt es natürlich mehrere Lösungen, z.B.

a$_1$) $(7+7+7+7+7+7-\frac{7}{7}-\frac{7}{7})\cdot 7\cdot 7+\frac{7}{7}+\frac{7}{7}=1962$

a$_2$) $7\cdot(7+7)\cdot(7+7)+(7+7+7+7+7)\cdot 7+7\cdot 7\cdot 7+(7+7):7=1962$

b) $\frac{1962+1962+1962+1962+1962+1962+1962}{1962}=7$

Aufgeschrieben von Carsten Balleier – Quelle: (14)

Quellenverzeichnis

(14) "a+b = b+a" - Heft 60, Olympiade Junger Mathematiker der DDR, Klassenstufe 7 - Dokumentation I.-XVII. Olympiade (1961-1978), Mathematischer Lesebogen vom Bezirkskabinett für außerunterrichtliche Tätigkeit, Rat des Bezirkes Leipzig, J. Lehmann, 1978.