1. - 34. Olympiade - Klasse 11

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011111:

Es ist zu beweisen, daß bei beliebigem n (n eine natürliche Zahl) die Zahl $6^{2n} - 1$ durch 7 teilbar ist.

Aufgabe 011112:

Ein Dampfer fährt auf einem Fluß von A nach B 3 Stunden und bei gleicher Maschinenleistung von B nach A $4\frac{1}{2}$ Stunden.

Wie lange braucht ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug für den Weg von A nach B?

Aufgabe 011113:

Kann man einen Würfel durch eine Ebene so teilen, daß der erhaltene Schnitt ein

a) gleichseitiges Dreieck,

b) Quadrat,

c) regelmäßiges Fünfeck,

d) regelmäßiges Sechseck

ist? Die Behauptungen sind zu beweisen!

Aufgabe 011114:

Es seien ein Dreieck $P_1P_2P_3$ und ein beliebiger Punkt P im Innern des Dreiecks gegeben. Die Schnittpunkte der Geraden P_1P, P_2P bzw. P_3P mit den gegenüberliegenden Seiten seien Q_1, Q_2, Q_3.

Es ist zu beweisen, daß unter den Verhältnissen

$$\frac{P_1P}{PQ_1}, \quad \frac{P_2P}{PQ_2}, \quad \frac{P_3P}{PQ_3}$$

wenigstens eines nicht größer als 2 und wenigstens eines nicht kleiner als 2 ist.

Aufgabe 011115:

Setzt man einen Würfel aus 8 gleichen Würfeln zusammen, wobei in jeder Dimension 2 Würfel nebeneinanderliegen, und streicht ihn mit Farbe an, dann besteht der Würfel aus 8 Würfeln, bei denen je 3 Flächen angestrichen sind. Nun soll ein Würfel aus gleichen Würfeln so zusammengesetzt werden, daß in jeder Dimension 3 Würfel nebeneinanderliegen. Der zusammengesetzte Würfel werde wieder angestrichen.

a) Wieviel der kleinen Würfel haben keine angestrichene Fläche, wieviel haben eine, wieviel zwei und wieviel drei angestrichene Flächen?

b) Was erhält man, wenn in jeder Dimension 4 Würfel nebeneinanderliegen?

c) Versuchen Sie, eine Formel für n in jeder Dimension nebeneinanderliegender Würfel zu finden, und beweisen Sie diese Formel!

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011121:

3, 4, 5 ist ein sogenanntes pythagoreisches Zahlentripel, da $3^2 + 4^2 = 5^2$. Es ist das einzige derartige Zahlentripel, dessen Elemente sich nur jeweils um 1 unterscheiden.

Gibt es für die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ noch andere Zahlentripel, bei denen $c = b + 1$ ist? Welche Gesetzmäßigkeit können Sie hier erkennen? Versuchen Sie, einen Ausdruck zu finden, mit dessen Hilfe sich schnell derartige Tripel finden lassen!

Aufgabe 011122:

Im internationalen Postverkehr sind für Briefsendungen und Päckchen in „Rollenform" (zylindrische Form) die folgenden Höchst- und Mindestmaße vorgeschrieben:

Höchstmaße:	Länge und der zweifache Durchmesser zusammen 100 cm, Länge jedoch nicht über 80 cm;
Mindestmaße:	Länge und zweifacher Durchmesser zusammen 17 cm, größte Ausdehnung nicht unter 10 cm.

a) Welches Höchstvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

b) Welches Mindestvolumen kann die Sendung haben? Wie groß sind in diesem Falle Länge und Durchmesser?

Aufgabe 011123:

Meier, Krause, Schulze und Franke und ihre Frauen kaufen Geflügel ein. Jede der 8 Personen kauft so viel Tiere, wie sie DM für jedes Tier bezahlen. Jeder Mann gibt 96,- DM mehr aus als seine Frau. Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen. Krause kauft so viel wie seine Schwägerin. Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses. Frau Schulze ist eine geborene Lehmann.

Welches sind die Mädchennamen der anderen drei Frauen?

Anmerkung: Unter einem Schwager (Schwägerin) versteht man hier nur die Ehepartner der Geschwister bzw. die Geschwister des Ehepartners.

Aufgabe 011124:

Drei Strecken der unterschiedlichen Längen a, b und c sollen von einem Punkt M ausgehen und so in einer Ebene liegen, daß ihre Endpunkte A, B und C in dieser Reihenfolge auf einer Geraden liegen und $\overline{AB} = \overline{BC}$ ist. Führen Sie die Konstruktion aus und begründen Sie diese!

Es sei $a > c$. Geben Sie die Bedingungen für b an, bei denen die Aufgabe lösbar ist!

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 011131:

Ein Kraftwagen, der mit einer Geschwindigkeit von 90 km/h fährt, wird gebremst und kommt nach 70 m zum Stehen.

Ist die in der Straßenverkehrsordnung vorgeschriebene Bremsverzögerung von mindestens 4,0 $\mathrm{m/s^2}$ eingehalten worden oder nicht? Begründen Sie Ihre Feststellung!

Aufgabe 011132:

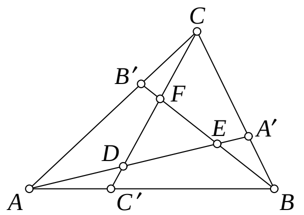
Gibt es eine ganze Zahl $n > 0$, die mit 6 multipliziert ein Produkt ergibt, das die gleichen Ziffern wie die ursprüngliche Zahl, aber in umgekehrter Reihenfolge enthält? Die Behauptung ist zu begründen!

Aufgabe 011133:

In einem Betrieb werden Ventilatoren hergestellt. Die Kosten für Material, Lohn und Energie betrugen bisher 19,20 M je Ventilator. Eine sozialistische Arbeitsgemeinschaft von Arbeitern und Ingenieuren macht den Vorschlag, durch Umbau der vorhandenen Maschinen und durch Anschaffung einer neuen Maschine die Arbeitszeit und die Materialkosten wesentlich zu senken, so daß die oben genannten Kosten je Stück nur noch 13,15 M je Ventilator betragen. Für den Umbau und die Anschaffung der neuen Maschine müssen aber insgesamt 13 500,- M aufgewandt werden.

Wieviel Ventilatoren müßten mindestens jährlich hergestellt werden, damit das neue Verfahren rentabel wird? Dabei soll ein Drittel der Kosten für die neuen Einrichtungen jährlich abgeschrieben werden, d. h. um diesen Betrag müssen sich die Gesamtkosten verringern.

Aufgabe 011134:



Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Teilt man die Seiten eines Dreiecks ABC im Verhältnis 1 : 2 und verbindet man die Eckpunkte A, B bzw. C mit den Teilpunkten A', B' bzw. C', so bilden die Verbindungsgeraden ein Dreieck DEF, dessen Flächeninhalt gleich einem Siebentel des Flächeninhalts des ursprünglichen Dreiecks ist (vgl. die Abbildung).

Aufgabe 011135 = 011234:

Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB} = a = 6$ cm. M sei der Mittelpunkt der Strecke. Schlagen Sie mit $\overline{AM}$ um M den Halbkreis über $\overline{AB}$! Halbieren Sie $\overline{AM}$ und $\overline{MB}$ und schlagen Sie über beiden Strecken mit $\frac{\overline{AM}}{2}$ die beiden Halbkreise, die innerhalb des großen Halbkreises liegen!

Es ist der Mittelpunkt des Kreises zu konstruieren, der den großen Halbkreis von innen und die beiden kleinen Halbkreise von außen berührt! Die Konstruktion ist zu begründen!

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021111:

Zu dem „Haus des Lehrers“ in Berlin gehört auch ein Kongreßgebäude mit einem Saal, der von einer Aluminiumkuppel überdeckt wird. Die Kuppel hat die Form einer Kugelkalotte. Der Basiskreis hat einen äußeren Durchmesser von 31,2 m, die Kuppel (Kalotte) eine Höhe von 9,6 m. Berechnen Sie:

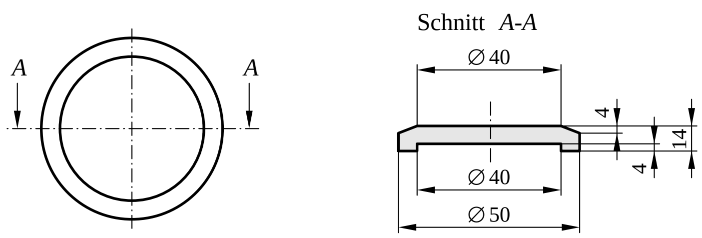
a) den Radius r der Kugel,

b) die Fläche der Kugelkalotte und

c) das Gewicht der Aluminiumhaut, mit der die Kuppel abgedeckt wird! (Stärke der Aluminiumhaut $s = 1{,}4$ mm, Wichte des Aluminiums $\gamma = 2{,}7\ \mathrm{p/cm}^3$.)

Aufgabe 021112:

Im VEB Wälzlagerwerk „Josef Orlopp“ wurden Bunsenbrennerfüße früher aus einer zylindrischen Scheibe ($d = 50$ mm, $h = 14$ mm) gedreht. Nach einem Verbesserungsvorschlag sollen die Füße in der abgebildeten Form gegossen werden.



a) Wie groß ist dabei die prozentuale Materialeinsparung?

b) Wieviel Bunsenbrennerfüße lassen sich aus dem Material herstellen, das bei der Anfertigung eines Klassensatzes (30 Stück) eingespart wird (vgl. Abbildung)?

Aufgabe 021113:

Es ist ein gleichschenkliges Dreieck gegeben. Sein Umkreis habe den Radius r_1, sein Inkreis den Radius r_2. Beweisen Sie, daß für den Abstand d der Mittelpunkte beider Kreise gilt:

$$d = \sqrt{r_1(r_1 - 2r_2)}.$$

Untersuchen Sie dabei alle verschiedenen Lagemöglichkeiten der Mittelpunkte!

Aufgabe 021114:

Es ist zu beweisen, daß für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ stets gilt:

$$\sin x + \cos x \geq \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2 \sin x} \cdot \sqrt[4]{\cos x}.$$

Aufgabe 021115:

Gegeben sei ein Kreis mit dem Radius $r = 3\,\text{cm}$ und eine Gerade g mit dem Abstand $a = 5\,\text{cm}$ vom Mittelpunkt des Kreises. Ferner ist auf der Peripherie des Kreises ein beliebiger Punkt P gegeben.

a) Konstruieren Sie durch P eine Sekante, die den Kreis in R und die Gerade in Q so schneidet, daß $\overline{PR} = \overline{PQ}$ ist!

b) Untersuchen Sie, unter welchen Bedingungen die Konstruktion ausführbar ist (Begründung)!

Aufgabe 021116:

Es sind alle reellen Zahlen x zu bestimmen, welche die Ungleichung

$$\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} > \frac{1}{2}$$

erfüllen! Das Ergebnis ist zu überprüfen!

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021121:

Auf dem internationalen Symposium in Moskau über Probleme der höheren technischen und humanistischen Bildung erklärte der sowjetische Nobelpreisträger Nikolai Semjonow, daß mit dem in der UdSSR erreichten Wachstumstempo die jährliche Erzeugung von Elektroenergie in 100 Jahren auf das 10 000fache gesteigert werden kann.

a) Welche jährliche Steigerung (in Prozent) liegt dieser Perspektive zugrunde?

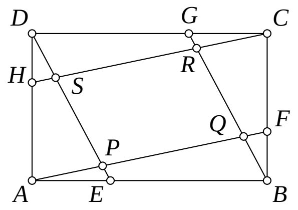
b) Wie groß war die bisherige durchschnittliche Steigerung (in Prozent) der Elektroenergie in der UdSSR in den Jahren 1955 bis 1961? (1955 wurden 170 Mrd. kWh und 1961 insgesamt 327 Mrd. kWh erzeugt.)

Vergleichen Sie die Ergebnisse!

Aufgabe 021122:

Beweisen Sie, daß stets $\sin\alpha + \cos\alpha \neq 1,5$ ist!

Aufgabe 021123:



Die Seiten eines Rechtecks $ABCD$ werden im Verhältnis 1 : 2 geteilt. Die Teilpunkte seien (fortlaufend) E, F, G, H. Die Schnittpunkte der Verbindungsgeraden AF, BG, CH und DE bilden die Ecken des Vierecks $PQRS$ (siehe Abb.).

a) Was für ein Viereck ist $PQRS$?

b) Wie verhält sich der Flächeninhalt dieses Vierecks zu dem Flächeninhalt des Rechtecks?

Aufgabe 021124:

Von einem regelmäßigen Tetraeder sind die 4 Ecken so abzuschneiden, daß von den Seitenflächen regelmäßige Sechsecke übrigbleiben.

Volumen und Oberfläche des entstandenen Körpers sind zu berechnen.

Aufgabe 021125:

Beweisen Sie, daß für alle natürlichen Zahlen n stets

$$5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

durch 19 teilbar ist!

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 021131:

Beweisen Sie, daß für alle positiven reellen Zahlen a, b, c

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}>\frac{3}{a+b+c}$$

ist!

Aufgabe 021132:

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Zur Seite BC wird eine Parallele gezogen, die die Seiten AB bzw. AC in D bzw. E schneidet.

In welchem Verhältnis teilt D die Seite AB, wenn sich die Umfänge der Dreiecke ADE und ABC zueinander verhalten wie der Inhalt des Dreiecks ADE zum Inhalt des Trapezes $DBCE$?

Aufgabe 021133:

Auf wieviel verschiedene Weisen läßt sich die Zahl 99 als Summe dreier voneinander verschiedener Primzahlen darstellen? (Zwei Fälle gelten als gleich, wenn die gleichen Summanden lediglich in verschiedener Reihenfolge auftreten.)

Aufgabe 021134:

Es sind sämtliche Lösungen der Gleichung $\sin^3 x+\cos^3 x=1$ zu bestimmen.

Aufgabe 021135:

Gegeben sei in der Ebene ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und die Schar aller Geraden, die einander sämtlich in einem außerhalb des Kreises liegenden Punkt S schneiden.

Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte aller Sehnen, die der Kreis aus den Geraden herausschneidet?

Aufgabe 021136:

In einer Ebene liegen ein Viereck und ein Fünfeck so, daß keiner ihrer Eckpunkte auf irgendeiner Seite der anderen Figur liegt.

Welches ist die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke? (Die Vielecke brauchen nicht konvex zu sein.)

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031111:

Der 352 m hohe Antennenmast des Deutschlandsenders in Zehlendorf, Kreis Oranienburg, Bezirk Potsdam, ist zur Zeit das höchste Bauwerk Europas.

a) Wie groß ist die Fläche, die man von der Spitze des Mastes bei klarem Wetter überblicken kann? (Bei der Berechnung werden Erhebungen im Gelände vernachlässigt.)

b) Wie groß ist der prozentuale Fehler, der entsteht, wenn man in die Formel für die Kugelkappe $M = 2\pi Rh$ nicht die richtige Größe für die Höhe des Kugelabschnittes, sondern die Höhe des Antennenmastes einsetzt? Warum ist der Fehler sehr gering? (Radius der Erde $R = 6\,370$ km.)

Aufgabe 031112:

Eine Tasse enthält Milch und eine andere die gleiche Menge Kaffee. Man nimmt aus der ersten Tasse einen Löffel Milch und gießt ihn in die zweite Tasse. Man rührt um und gießt jetzt wieder einen Löffel (gleiche Menge wie oben) „Milchkaffee“ in die erste Tasse.

a) Befindet sich jetzt in der ersten Tasse mehr Kaffee als in der zweiten Tasse Milch? (Exakte Begründung der Antwort!)

b) Welches Ergebnis erhält man, wenn sich ursprünglich in der zweiten Tasse doppelt soviel Kaffee befand wie in der ersten Tasse Milch? (Begründung!)

Aufgabe 031113:

Beweisen Sie, daß $p^2 - 1$ für jede Primzahl $p \geq 5$ durch 24 teilbar ist!

Aufgabe 031114:

Bestimmen Sie alle reellen x, für die $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$ ist!

Aufgabe 031115:

Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ und den nicht parallelen Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$. Man bezeichne mit H den Schnittpunkt der Diagonalen und mit S den Schnittpunkt der nichtparallelen Seiten. Die Parallele zu $\overline{AB}$ durch H schneide die Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ in E und F. Die Projektion von S auf EF sei G.

Beweisen Sie, daß die Gerade EF die Winkelhalbierende der Winkel BGC und AGD ist!

Aufgabe 031116:

Die Summe von 100 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen betrage $1\,000\,050$.

Wie heißt die kleinste, wie die größte dieser Zahlen?

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 031121:
Es ist zu beweisen, daß $n^3 + 3n^2 - n - 3$ bei ungeradem n stets durch 48 teilbar ist!

Aufgabe 031122:
Bestimmen Sie die Menge aller reellen Zahlen x, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$1 - \sin 5x = \left(\cos \frac{3}{2}x - \sin \frac{3}{2}x\right)^2 .$$

Aufgabe 031123:
In der Ebene seien n Punkte ($n > 3$) gegeben, von denen keine drei in einer Geraden liegen.

Gibt es einen Kreis, der durch mindestens drei dieser Punkte hindurchgeht und keinen der übrigen Punkte im Innern enthält?

Aufgabe 031124:
In ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a sollen drei gleichgroße Kreise so eingezeichnet werden, daß jeder die beiden anderen und zwei Seiten des Dreiecks berührt.

a) Bestimmen Sie den Radius der Kreise!

b) Geben Sie eine Konstruktion für den Radius an!

Aufgabe 031125:
Bei der Aufgabe

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{O} & \mathrm{M} & \cdot & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{O} & \mathrm{M} \\
\hline
 & * & * & * & * & * & & & \\
 & & * & * & * & * & * & & \\
 & & & * & * & * & * & * & \\
 & & & & * & * & * & * & * \\
\hline
 & * & * & * & * & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{O} & \mathrm{M}
\end{array}$$

bedeutet jeder Buchstabe und jedes Zeichen $*$ eine der Ziffern von 0 bis 9 ($\mathrm{A} \neq 0$). Verschiedene Buchstaben entsprechen verschiedenen Ziffern.

Wie lautet die Aufgabe?

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

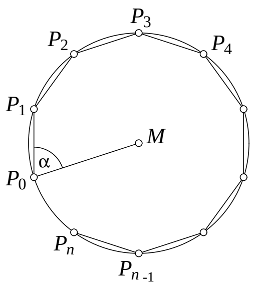
Aufgabe 041111:

Ein Betrieb liefert jährlich an die Betriebe (1) und (2) 600 t und 400 t eines bestimmten Erzeugnisses. Für den Transport stehen die LKW 1 und 2 mit Nutzlasten von 1 Mp bzw. 4 Mp zur Verfügung. Der kleinere Wagen steht jährlich höchstens für 300 Fahrten, der größere für 200 Fahrten zur Verfügung. Die Transportkosten in M betragen je Fahrt für

	LKW 1	LKW 2
zur Fahrt nach Betrieb 1	10	20
zur Fahrt nach Betrieb 2	30	60

Wie viele Fahrten muß jeder Wagen zu jedem der beiden Betriebe im Jahr durchführen, wenn die gesamten Transportkosten möglichst gering sein sollen?

Aufgabe 041112:



In den Schlitz eines zylindrischen Spiegels, der nach innen spiegelt, tritt bei P_0 ein Lichtstrahl ein, der mit dem Radius $\overline{MP_0}$ den Winkel α bildet ($\alpha < \frac{\pi}{2}$). Der Lichtstrahl verläuft in einer auf der Zylinderachse senkrecht stehenden Ebene und wird an den Punkten P_1, P_2, P_3, ..., P_n, ... reflektiert (s. Abb.).

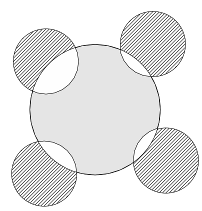
a) Geben Sie eine Formel für die Bogenlänge $\overset{\frown}{P_0P_n}$ an!

b) Wie groß ist α, wenn P_{10} mit P_0 zusammenfällt und der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ sich nicht überschneidet?

c) Es sei $\alpha = 50°$. Wie groß ist n, wenn P_n mit P_0 zusammenfällt? Geben Sie die drei kleinsten Werte für n an! (In diesem Fall kann sich der Streckenzug $P_0P_1P_2...P_{10}$ überschneiden.)

Aufgabe 041113:

Ein Kreis wird von vier in derselben Ebene liegenden Kreisen, deren Radius halb so groß wie der Radius des gegebenen Kreises ist, so geschnitten, daß diese kleineren Kreise einander nicht schneiden (s. Abb.).



a) Es ist zu beweisen, daß der Flächeninhalt der in der Abb. grauen Teilfläche des großen Kreises gleich der Summe der Flächeninhalte der schraffierten Teilflächen der kleineren Kreise ist.

b) Diese Aussage läßt sich in verschiedener Hinsicht verallgemeinern. Geben Sie eine Verallgemeinerung an!

Aufgabe 041114:

Wie lauten die letzten beiden Ziffern der Zahl $3^{999} - 2^{999}$ (im Dezimalsystem)?

Aufgabe 041115:

Man berechne alle gemeinsamen Lösungen der beiden Gleichungen

$$3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7 = 0$$
$$3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7 = 0.$$

(Dabei sollen keine Näherungsverfahren benutzt werden.)

Aufgabe 041116:

Ohne Benutzung einer Tafel oder die Benutzung des Rechenstabes ist zu entscheiden, ob die Zahl

$$z = \sqrt[3]{1\,620 + 12 \cdot \sqrt{17\,457}} + \sqrt[3]{1\,620 - 12 \cdot \sqrt{17\,457}}$$

größer, kleiner oder gleich 18 ist.

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011111:

Es ist zu zeigen, dass 7 Teiler von $6^{2n} - 1$ für alle natürlichen Zahlen n ist.

Die Behauptung können wir auch schreiben als $7 \cdot z = 6^{2n} - 1$, wobei z eine natürliche Zahl ist. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion:

Als *Induktionsanfang* finden wir die Behauptung für $n = 0$ durch $6^{2\cdot 0} - 1 = 1 - 1 = 0 = 7 \cdot 0$ bestätigt.

Zum *Induktionsschritt* setzen wir voraus, dass es zu jedem $n = k$ ein $z_k \in \mathbb{N}$ gibt, für welches die Gleichung $7 \cdot z_k = 6^{2k} - 1$ gilt.

Die *Induktionsbehauptung* lautet dann, dass es für $n = k + 1$ auch ein $z_{k+1} \in \mathbb{N}$ gibt, das die Gleichung $7 \cdot z_{k+1} = 6^{2(k+1)} - 1$ erfüllt.

Den *Induktionsbeweis* führen wir nun mit folgender Gleichungskette:

$$\begin{aligned} 6^{2(k+1)} - 1 &= 6^{2k+2} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 1 = 36 \cdot 6^{2k} - 36 + 35 = 36 \cdot (6^{2k} - 1) + 35 \\ &= 36 \cdot 7 \cdot z_k + 7 \cdot 5 = 7 \cdot (36 z_k + 5) = 7 \cdot z_{k+1}. \end{aligned}$$

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011112:

In beiden Fahrtrichtungen auf dem Fluss können wir das Weg-Zeit-Gesetz der gleichförmigen Bewegung $s = vt$ annehmen. Für die Fahrt in Strömungsrichtung gilt damit $v = v_\mathrm{D} + v_\mathrm{S}$, für die Fahrt entgegen der Strömung gilt $v = v_\mathrm{D} - v_\mathrm{S}$, wobei v_D die Eigengeschwindigkeit des Dampfers und v_S die Strömungsgeschwindigkeit des Flusses ist. Es ist also

$$s = (v_\mathrm{D} + v_\mathrm{S}) \cdot (3\,\mathrm{h}) = (v_\mathrm{D} - v_\mathrm{S}) \cdot (4{,}5\,\mathrm{h}) \quad \Longrightarrow \quad v_\mathrm{D} = \frac{(4{,}5\,\mathrm{h} + 3\,\mathrm{h})}{(4{,}5\,\mathrm{h} - 3\,\mathrm{h})} v_\mathrm{S} = 5\, v_\mathrm{S},$$

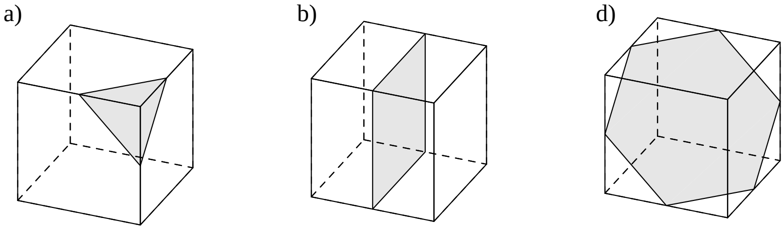
und damit $s = (v_\mathrm{D} + v_\mathrm{S}) \cdot (3\,\mathrm{h}) = 6 v_\mathrm{S} \cdot (3\,\mathrm{h})$. Für ein Boot, das nur mit der Strömung treibt, gilt $s = v_\mathrm{S}\, t$; mit obiger Gleichung also

$$s = 6 v_\mathrm{S} \cdot (3\,\mathrm{h}) = v_\mathrm{S}\, t.$$

Daraus folgt die Fahrzeit für ein nur von der Strömung getriebenes Fahrzeug von $t = 18\,\mathrm{h}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011113:
Die möglichen Schnitte sind in den folgenden Bildern dargestellt:



a) Ja. Jeder Schnitt, der entlang dreier zusammentreffender Kanten gleiche Strecken abschneidet, erzeugt ein gleichseitiges Dreieck als Schnittfläche. Dies ist leicht einzusehen, da alle durch den Schnitt entstehenden rechtwinkligen Dreiecke auf den Würfeloberflächen kongruent sind (SWS), mithin auch die Hypotenusen.

b) Ja. Jeder Schnitt parallel zu einer Würfelfläche ergibt ein Quadrat, welches der Würfelfläche kongruent ist.

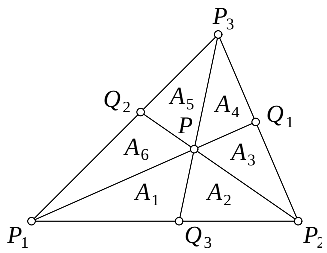
c) Nein. Wäre eine Schnittfläche eines Würfels bei einem ebenen Schnitt ein reguläres Fünfeck, so würden je zwei verschiedene Kanten des Fünfecks zu zwei verschiedenen Seitenflächen des Würfels gehören (denn ansonsten läge das ganze Fünfeck auf einer Seitenfläche, was nicht geht). Zwei verschiedene dieser fünf Seitenflächen dürften aber nicht parallel sein, weil sich (die Verlängerungen von) je zwei verschiedenen Fünfeckskanten in einem Punkt schneiden. Da es aber im Würfel nur sechs Seitenflächen gibt, von denen je zwei gegenüberliegende parallel sind, findet man keine fünf paarweise nichtparallelen Seitenflächen. Es gibt also keinen solchen ebenen Schnitt.

d) Ja. Der Schnitt trifft - wie im Bild gezeigt - die Würfelkanten in deren Mittelpunkten. Alle Seiten des sechseckigen Schnitts haben offensichtlich die Länge $\frac{\sqrt{2}}{2}a$, wenn a die Länge einer Kante bezeichnet. Der angegebene Schnitt ist auch tatsächlich eben, da alle Abstände der Eckpunkte des Sechsecks vom oberen–rechten–vorderen (oder unteren–linken–hinteren) Eckpunkt des Würfels untereinander gleich, nämlich $\frac{\sqrt{5}}{2}a$ sind.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011114:
Beweis: Nennen wir die Teilflächen, in die das Dreieck $P_1P_2P_3$ durch P zerlegt wird, $A_1, A_2, \dots, A_6$, die gesamte Fläche sei A. Dann gilt, da sich die Flächeninhalte von Dreiecken mit gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundseiten verhalten:

$$\begin{aligned} x &= \frac{P_1P}{PQ_1} = \frac{A_1+A_2}{A_3} = \frac{A_5+A_6}{A_4} = \frac{A-A_3-A_4}{A_3+A_4}, \\ y &= \frac{P_2P}{PQ_2} = \frac{A_3+A_4}{A_5} = \frac{A_1+A_2}{A_6} = \frac{A-A_5-A_6}{A_5+A_6}, \\ z &= \frac{P_3P}{PQ_3} = \frac{A_5+A_6}{A_1} = \frac{A_3+A_4}{A_2} = \frac{A-A_1-A_2}{A_1+A_2}. \end{aligned}$$



Betrachten wir nun die Teildreiecke P_1P_2P, P_2P_3P, P_3P_1P, deren Flächeninhalte $A_1 + A_2$, $A_3 + A_4$ bzw. A_5+A_6 betragen und deren Summe A ist, so ist nach den obigen Gleichungen offensichtlich, dass wenigstens eines der Verhältnisse

$$\frac{A_1+A_2}{A} = \frac{1}{1+z}, \qquad \frac{A_3+A_4}{A} = \frac{1}{1+x}, \qquad \frac{A_5+A_6}{A} = \frac{1}{1+y} \tag{1}$$

(deren Summe 1 ergibt) nicht größer und eines nicht kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. Dabei ist der Fall, dass alle Verhältnisse gleich $\frac{1}{3}$ sind, eingeschlossen. Diese Aussage ist nach elementarer Umformung der Gleichungen (1) äquivalent damit, dass wenigstens eine der Größen x, y, z nicht größer als 2 und wenigstens eine nicht kleiner als 2 ist.

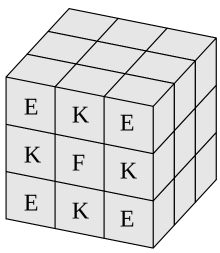
Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011115:

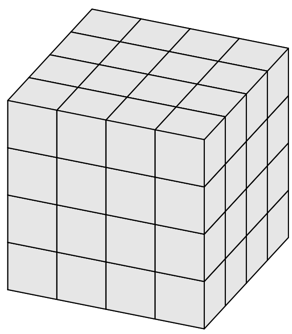
a) (Bild a) Für einen Würfel mit den Abmaßen $3 \times 3 \times 3$ haben
   - 8 kleine Eckwürfel (E) drei bemalte Flächen,
   - 12 kleine Kantenwürfel (K) zwei bemalte Flächen,
   - 6 kleine Flächenwürfel (F) eine bemalte Fläche und
   - 1 kleiner Innenwürfel keine bemalte Fläche.

b) (Bild b) Für einen Würfel mit den Abmaßen $4 \times 4 \times 4$ haben
   - 8 kleine Eckwürfel drei bemalte Flächen,
   - $12\,(4-2) = 24$ kleine Kantenwürfel zwei bemalte Flächen,
   - $6\,(4-2)^2 = 24$ kleine Flächenwürfel eine bemalte Fläche und
   - $(4-2)^3 = 8$ kleine Innenwürfel keine bemalte Fläche.

a)



b)



c) Für einen Würfel mit den Abmaßen $n \times n \times n$ haben
   - 8 kleine Eckwürfel drei bemalte Flächen,
   - $12\,(n-2)$ kleine Kantenwürfel zwei bemalte Flächen,
   - $6\,(n-2)^2$ kleine Flächenwürfel eine bemalte Fläche und
   - $(n-2)^3$ kleine Innenwürfel keine bemalte Fläche.

   Beweis: Kleine Würfel mit drei bemalten Flächen liegen genau an den Ecken des großen Würfels. Da ein Würfel immer 8 Ecken hat, gibt es für jede Größe des Würfels immer 8 kleine Würfel mit drei bemalten Flächen.

   Kleine Würfel mit zwei bemalten Flächen liegen genau auf den Kanten des großen Würfels, aber nicht auf den Ecken. Eine Kante eines $(n\times n \times n)$-Würfels ist n kleine Würfel lang. Dazu gehören auch die zwei Eckwürfel. Damit erhält man für jede Kante des Würfels $n-2$ kleine Würfel mit 2 bemalten Flächen. Da ein Würfel immer 12 Kanten hat, gibt es für einen $(n\times n \times n)$-Würfel immer $12\,(n-2)$ kleine Würfel mit zwei bemalten Flächen.

   Kleine Würfel mit einer bemalten Fläche liegen auf den Seiten des großen Würfels, aber nicht auf den Kanten. Eine Seite eines $(n\times n \times n)$-Würfels ist n^2 kleine Würfel groß. Dazu gehören auch die vier

Kanten. In jeder Dimension müssen also 2 Würfel abgezogen werden. Damit erhält man für jede Seite des Würfels $(n-2)^2$ kleine Würfel mit einer bemalten Fläche. Da ein Würfel immer 6 Seiten hat, gibt es für einen $(n \times n \times n)$-Würfel immer $6\,(n-2)^2$ kleine Würfel mit einer bemalten Fläche.

Kleine Würfel mit keiner bemalten Fläche liegen im Inneren des Würfels. Der $(n \times n \times n)$-Würfel besteht aus n^3 kleinen Würfeln. Dazu gehören auch die sechs Seiten. In jeder Dimension müssen also 2 Würfel abgezogen werden. Damit erhält man für das Innere des Würfels $(n-2)^3$ kleine Würfel. Damit gibt es für einen $(n \times n \times n)$-Würfel immer $(n-2)^3$ kleine Würfel mit keiner bemalten Fläche.

Zur Probe werden alle ermittelten Anzahlen addiert:

$$8 + 12(n-2) + 6(n-2)^2 + (n-2)^3 = n^3,$$

in Übereinstimmung damit, dass der Würfel mit den Abmaßen $n \times n \times n$ aus genau n^3 kleinen Würfeln besteht.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011121:

Es gibt noch andere Zahlentripel, die die Bedingungen $a^2 + b^2 = c^2$ und $c = b + 1$ erfüllen:

$$a^2 + b^2 = (b+1)^2 = b^2 + 2b + 1,$$

$$\Longrightarrow \quad a^2 = 2b + 1, \tag{1}$$

$$\Longrightarrow \quad b = \frac{a^2 - 1}{2}. \tag{2}$$

Aus (1) lässt sich leicht erkennen, dass a^2 und damit a eine ungerade Zahl sein muss. Ein Tripel (a, b, c) mit den geforderten Eigenschaften kann somit schnell gefunden werden, indem man a eine ungerade Zahl zuweist und b mittels (2) berechnet. c ist dann um 1 größer als b. Es lässt sich also für jede beliebige ungerade natürliche Zahl a ein derartiges Tripel bestimmen.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011122:

a) Die Bedingungen für das Höchstmaß lauten: $l + 2d \leq 100$ cm und $l \leq 80$ cm. Damit erhält man für das Volumen eines Zylinders:

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 l \leq \frac{\pi}{4} d^2 (100 \text{ cm} - 2d) = \frac{\pi}{4} \cdot 100 \text{ cm} \cdot d^2 - \frac{\pi}{2} d^3.$$

Die notwendige Bedingung für ein Maximum ist $V'(d) = 0$, also

$$V'(d) = \frac{\pi}{2} \cdot 100 \text{ cm} \cdot d - \frac{3\pi}{2} d^2 = 0,$$

somit $d_1 = 0$ und $d_2 = \frac{100}{3}$ cm. Die erste Lösung entfällt, da das Volumen dann null wäre. Die zur zweiten Lösung gehörige maximale Länge ist $l = \frac{100}{3}$ cm, das entsprechende Volumen $V = 29\,089 \text{ cm}^3$. Es bleibt zu zeigen, dass die gefundene Lösung tatsächlich ein Maximum ist, wofür $V''(d) < 0$ hinreichend ist:

$$V''(d) = \frac{\pi}{2} \cdot 100 \text{ cm} - 3\pi d = -\pi \cdot 50 \text{ cm} < 0.$$

Es handelt sich also wirklich um ein Maximum. Das Höchstvolumen der Sendung beträgt $29\,089 \text{ cm}^3$. In diesem Fall betragen Durchmesser *und* Länge $\frac{100}{3}$ cm.

b) Die Bedingungen für das Mindestmaß schließen einen Durchmesser von 0 cm nicht aus, was auf einen theoretischen Mindestwert des Volumens von 0 cm^3 führt. Nach der ersten Bedingung beträgt die Länge dann mindestens 17 cm.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011123:

Bezeichnen wir die Anzahl der gekauften Tiere mit a_1, a_2, a_3, a_4 (für Herrn Meier, Krause, Schulze und Franke) bzw. mit b_1, b_2, b_3, b_4 (für die Frauen in dieser Reihenfolge), wobei $a_i, b_i \in \mathbb{N}$ ist. Dann gibt jeder der Männer a_i^2 und jede der Frauen b_i^2 DM aus und es gilt:

$$a_i^2 - b_i^2 = (a_i + b_i)(a_i - b_i) = 96 = 2^5 \cdot 3 = \{48 \cdot 2,\ \ 32 \cdot 3,\ \ 24 \cdot 4,\ \ 16 \cdot 6,\ \ 12 \cdot 8\}.$$

Damit kommen folgende Paare (a_i, b_i) in Betracht: $(25, 23), (14, 10), (11, 5), (10, 2)$.

Die Aussage „Meier kauft so viele Tiere wie seine Schwäger zusammen“ kann also nur bedeuten, dass die Meiers das Paar $(25, 23)$ sind und die Männer der Paare $(14, 10)$ und $(11, 5)$ seine Schwäger.

Die Zahl 10 taucht zweimal auf, also ist das Paar $(10, 2)$ den Krauses zuzuordnen und die Frau des Paars $(14, 10)$ ist seine Schwägerin.

Aus „Schulzes kaufen zusammen doppelt so viel wie Krauses“ folgt, dass das Paar $(14, 10)$ die Schulzes sind, und schließlich $(11, 5)$ die Frankes. Herr Meier ist also sowohl mit Herrn Schulze als auch mit Herrn Franke verschwägert.

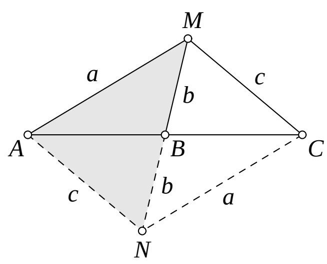
Das bedeutet im ersten Fall, dass entweder Frau Meier eine geborene Schulze oder Frau Schulze eine geborene Meier ist. Letzteres ist aber ausgeschlossen, da Frau Schulze eine geborene Lehmann ist, daher: Frau Meier ist eine geborene Schulze. Frau Franke ist eine geborene Meier. Frau Krause ist eine geborene Schulze.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011124:

I. Analyse:

Betrachten wir das Dreieck AMC, so ist MB wegen $AB = BC$ eine der Seitenhalbierenden. Es gilt also, ein Dreieck aus zwei Seiten und der eingeschlossenen Seitenhalbierenden zu konstruieren. Dazu ergänzen wir AMC zu einem Parallelogramm $AMCN$, in welchem sich die Diagonalen AC und MN bekanntermaßen stets halbieren. Das Teildreieck AMN kann somit aus den gegebenen Stücken hergestellt werden.



II. Konstruktionsbeschreibung:

Wir konstruieren das Dreieck AMN aus den Seitenlängen a, c und $2b$ nach Kongruenzsatz SSS. Der Mittelpunkt der Strecke MN ist dann B und AB verdoppelt liefert Punkt C.

III. Beweis:

Nach obiger Konstruktion ist AMN ein Dreieck, in dem $AM = a$, $AN = c$ und $MB = BN = b$ gilt sowie AB eine Seitenhalbierende ist. Da C durch Verdopplung von AB entsteht, gilt die Kongruenz $\triangle ABN \cong \triangle CBM$ (SWS), d. h. $AN = MC = c$. Die Punkte A, B und C haben damit die geforderten Abstände von M. $\square$

IV. Konstruktion:

Das Dreieck AMN existiert genau dann, wenn die Dreiecksungleichungen erfüllt sind: $a + c > 2b$ und $c + 2b > a$. Das führt auf die gesuchten Bedingungen für die Länge b:

$$\frac{1}{2}(a - c) < b < \frac{1}{2}(a + c).$$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 011131:

Nach den bekannten Formeln für die gleichmäßig beschleunigte Bewegung $\Delta s = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ und $\Delta v = at$ folgt

$$\Delta s = \frac{-v_0}{2}t + v_0 t \;\Rightarrow\; t = \frac{2\Delta s}{v_0} \;\Rightarrow\; a = -\frac{v_0^2}{2\Delta s}.$$

Mit den gegebenen Werte $v_0 = 90\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 25\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und $\Delta s = 70$ m ist die Bremsverzögerung $-a \approx 4,464\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$, d.h. die vorgeschriebene Bremsverzögerung wurde eingehalten.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 011132:

Angenommen, es gäbe eine derartige Zahl n mit $m = 6n$. Dann müsste die erste Ziffer von n gleich 1 sein, weil die Ziffernanzahl von m gleich der Ziffernanzahl von n ist. Daher wäre die letzte Ziffer von m gleich 1, was unmöglich ist, da $6n$ gerade ist.

Also gibt es keine Zahl, die den Bedingungen der Aufgabe genügt.

Aufgeschrieben von Burkhard Thiele – Quelle: (2)

Lösung 011133:

$\text{Preis}_{alt} = 19{,}20$ M/Ventilator
$\text{Preis}_{neu} = 13{,}15$ M/Ventilator
Gesamtkosten = 13 500 M

Jahreskosten $= \frac{13\,500\text{ M}}{3} = 4\,500$ M

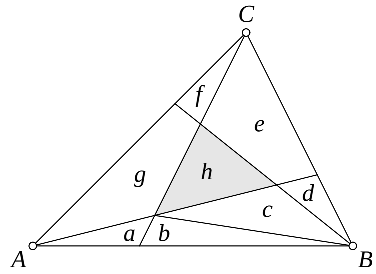
$$\begin{aligned} 19{,}20\text{ M/Ventilator}\cdot x &= 4\,500\text{ M} + 13{,}15\text{ M/Ventilator}\cdot x\\ 6{,}05\text{ M/Ventilator}\cdot x &= 4\,500\text{ M}\\ x &= 743{,}8\text{ Ventilatoren}\end{aligned}$$

Es müssen mindestens 744 Ventilatoren jährlich hergestellt werden.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 011134:

Beweis: Bezeichnen wir die durch die Teilung entstandenen Teilflächen mit $a, b, \dots, h$ (s. Bild). Wir zeigen zunächst, dass $f+g=6a$ gilt. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass sich die Flächeninhalte zweier Dreiecke bei gleicher Höhe wie die zugehörigen Grundseiten verhalten. Damit lassen sich folgende Gleichungen ablesen:



$$\begin{aligned} f+g &= (f+g+e+h)-(e+h) \\ &= 2\,(a+b+c+d)-2\,(c+d) \\ &= 2\,(a+b)=2a+4a=6a. \end{aligned}$$

Auf analoge Weise erhalten wir die Gleichungen $a+b+c=6d$ und $d+e=6f$, deren Addition

$$(f+g)+(a+b+c)+(d+e)=A-h=6\,(a+d+f) \tag{1}$$

ergibt, wobei A der Flächeninhalt von $\triangle ABC$ ist. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} 2\,(a+b+c+d) &= e+f+g+h, \\ 2\,(d+e+f) &= g+a+b+c+h, \\ 2\,(f+g+a) &= b+c+d+e+h, \end{aligned}$$

deren Addition auf

$$3\,(a+d+f)=3h \qquad \Longrightarrow \qquad a+d+f=h \tag{2}$$

führt. (1) und (2) ergeben dann die Behauptung $h=\frac{1}{7}A$. □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 011135 = 011234:

I. Analyse:

Der Berührungspunkt des Halbkreise über AM bzw. über MB mit dem zu konstruierenden Kreis k sei K bzw. L, der Berührungspunkt des Halbkreise über AB mit k sei N. Die Mittelpunkte von AM bzw. BM werden mit P bzw. Q bezeichnet.

Da die Tangenten von k und den Halbkreis über AM in K identisch sind und die Tangenten senkrecht auf den Radien stehen, geht die Strecke zwischen dem Mittelpunkt R vom Kreis k und P durch K.

Analog folgt, dass L auf RQ liegt. Da $RP=\frac{AM}{2}+RK=RQ$ gilt, ist $\sphericalangle PMR=90°$ und es gilt nach dem Satz des Pythagoras

$$\left(\frac{AM}{2}\right)^2+(AM-RN)^2=\left(\frac{AM}{2}+RK\right)^2.$$

Aus $RN=RK$ folgt

$$\frac{1}{4}(AM)^2+(AM)^2-2(AM)(RN)+(RN)^2=\frac{1}{4}(AM)^2+(AM)(RN)+(RN)^2.$$

Also ist $(AM)^2=3(AM)(RN)$, d. h.

$$\begin{aligned} RN &= \frac{1}{3}AM=\frac{a}{6}=1\text{ cm} \text{ und} \\ MR &= MT-RN=2\text{ cm}. \end{aligned}$$

II. Konstruktionsbeschreibung:

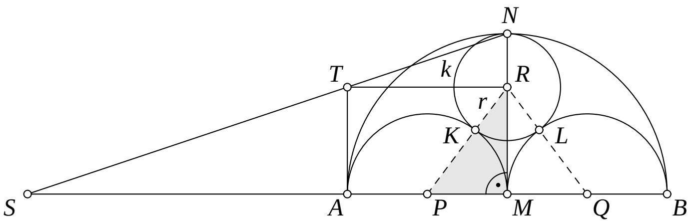
(1) Konstruiere die Mittelsenkrechte von AB und bezeichne den Schnittpunkt dieser Mittelsenkrechten und den Halbkreis über AB mit N.

(2) Nun konstruiere einen Punkt S auf der Verlängerung von AM über A hinaus mit $SM = 3AM$. Konstruiere die Senkrechte zu SM in A, bezeichne den Schnittpunkt dieser Senkrechten und SN mit T. Dann ist nach Strahlensatz $TN = \frac{1}{3}SN$.

(3) Konstruiere nun das Lot von T auf MN und bezeichne den Lotfußpunkt mit R, so ist nach Strahlensatz $NR = \frac{TN}{SN}MN = 1$ cm, d. h. R ist nach obiger Vorbetrachtung der Mittelpunkt des Kreises k, der die kleinen Halbkreise außen und den großen Halbkreis innen berüht.

(4) Schlage einen Kreis um R mit den Radius RN.

III. Konstruktion:



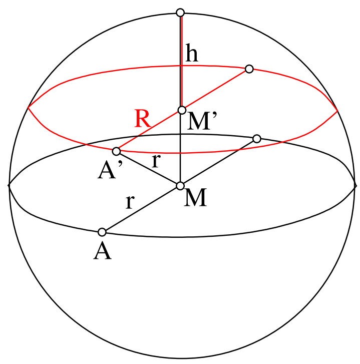
Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021111:

Wie im Bild dargestellt ist rot der Basiskreis mit Radius $R = \frac{1}{2} \cdot 31{,}2\,\text{m} = 15{,}6\,\text{m}$ und Mittelpunkt M' und Höhe $h = 9{,}6\,\text{m}$. A' sei ein Punkt auf dem Basiskreis und der Kugeloberfläche. M sei der Mittelpunkt der Kugel.



Dann gilt im rechtwinkligen Dreieck $\Delta MM'A'$: $\overline{A'M}^2 = r^2 = \overline{MM'}^2 + \overline{A'M'}^2 = (r-h)^2 + R^2$ (Satz des Pythagoras).

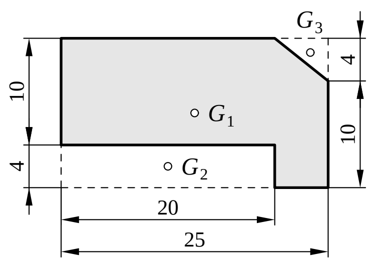
a) Damit erhalten wir $r = (h^2 + R^2)/(2h) = 17{,}5\,\text{m}$.

b) Die Fläche der Kugelkalotte beträgt $O = \pi(R^2 + h^2) = 1054\,\text{m}^2$.

c) Das Gewicht der Aluminiumhaut beträgt $G = \gamma V = \gamma O s = 3{,}98\,\text{Mp}$.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021112:



Hier muss zunächst das Volumen desjenigen Rotationskörpers berechnet werden, der entsteht, wenn die grau abgebildete Fläche um die Symmetrieachse (d. i. die linke Kante im Bild) rotiert.

Das Volumen V eines Körpers, der durch Drehung eines ebenen Gebietes um eine dieses Gebiet nicht schneidende Achse entsteht, ist gleich dem Produkt aus dem Flächeninhalt F dieses Gebietes mit dem Umfang des Kreises, den der Schwerpunkt dieses Gebietes bei der Drehung beschreibt.

Die graue Fläche ist dabei die Differenz aus einem großen Rechteck mit den Maßen $25\,\text{mm} \times 14\,\text{mm}$ und einem kleinen Rechteck (links unten, $20\,\text{mm} \times 4\,\text{mm}$) sowie einem Dreieck (rechts oben, Fläche $10\,\text{mm}^2$). Die Abstände der Schwerpunkte G_1 (großes Rechteck), G_2 (kleines Rechteck) und G_3 (Dreieck) betragen: $s_1 = 12{,}5\,\text{mm}$, $s_2 = 10\,\text{mm}$ und $s_3 = 23{,}33\,\text{mm}$. (Bei letzterem wurde ausgenutzt, dass die Schwerpunktkoordinaten eines Dreiecks gleich dem arithmetischen Mittel der jeweiligen Eckpunktkoordinaten sind.) Damit erhalten wir: $V = 2\pi(350\,\text{mm}^2 \cdot 12{,}5\,\text{mm} - 80\,\text{mm}^2 \cdot 10\,\text{mm} - 10\,\text{mm}^2 \cdot 23{,}33\,\text{mm}) = 20\,996\,\text{mm}^3$.

a) Gegenüber der zylindrischen Scheibe vom Volumen $V_0 = \frac{1}{4}\pi d^2 h = 27\,489\,\text{mm}^3$ ergibt das eine Materialeinsparung von ca. 23,6 %.

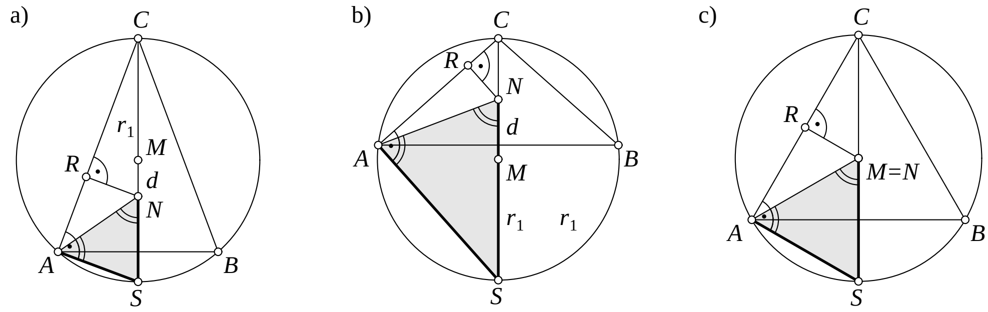
b) Pro Stück werden $V_0 - V = 6493\,\mathrm{mm}^3$ eingespart, also insgesamt $194\,790\,\mathrm{mm}^3$. Bezogen auf V_0 entspricht das einer Menge von ca. 7 Bunsenbrennerfüßen.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021113:
Die Behauptung kann leicht in

$$r_1^2 - d^2 = 2r_1\,r_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{r_1 + d}{r_2} = \frac{2\,r_1}{r_1 - d}$$

umgeformt werden, was auf eine Anwendung des Strahlensatzes schließen lässt. Wir gelangen so zu folgendem Beweis:



Beweis:

(Bild a) Seien M und N Umkreis- bzw. Inkreismittelpunkt des gleichschenkligen Dreiecks ABC (wobei M zunächst zwischen C und N liegen soll, welches für $\sphericalangle ACB \equiv \gamma < 60°$ stets der Fall ist), S der Schnittpunkt der Geraden CM mit dem Umkreis und R der Berührungspunkt des Inkreises mit der Seite AC. Dann sind $\triangle CRN$ und $\triangle CAS$ rechtwinklige Dreiecke – Ersteres, da der Berührungsradius NR stets senkrecht auf der Seite steht und Zweites wegen $\sphericalangle CAS = 90°$ (Thales-Kreis).

Nach dem zweiten Strahlensatz gilt daher:

$$\frac{CN}{RN} = \frac{CS}{AS} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{r_1 + d}{r_2} = \frac{2\,r_1}{AS}.$$

Um nun von (2) zu (1) zu gelangen genügt es, die Gleichheit der Strecken AS und $NS = r_1 - d$ zu zeigen. Diesen Nachweis führen wir über die Gleichheit der Basiswinkel $\sphericalangle ANS$ und $\sphericalangle NAS$ des Dreiecks ANS.

Es gilt einerseits $\sphericalangle ANS = \sphericalangle ACN + \sphericalangle CAN$ (Außenwinkel) $= \frac{\gamma}{2} + \sphericalangle NAB$ (Winkelhalbierende), andererseits $\sphericalangle NAS = \sphericalangle NAB + \sphericalangle BAS$ (Winkelsumme) $= \sphericalangle NAB + \frac{\gamma}{2}$ (gleiche Peripheriewinkel über den Sehnen $SB = SA$). Damit ist (1) bewiesen.

(Bild b) Im Fall $\gamma > 60°$ liegt M zwischen S und N und es folgt

$$\frac{CN}{RN} = \frac{CS}{AS} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{r_1 - d}{r_2} = \frac{2\,r_1}{AS}.$$

Auch hier ist das Dreieck ANS gleichschenklig, nun jedoch mit $AS = NS = r_1 + d$. Die beiden letzten Gleichungen liefern ebenfalls die Behauptung (1).

(Bild c) Im Fall $\gamma = 60°$ ist das Dreieck ABC gleichseitig, beide Mittelpunkte fallen übereinander und die Behauptung (1) gilt auch hier mit $d = 0$. □

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021114:

Beweis: Für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ist $\sin(2x)$ nicht negativ, also gilt $\left(1-\sqrt{\sin(2x)}\right)^2 \geq 0$ bzw. $1+\sin(2x) \geq 2\sqrt{\sin(2x)}$.

Nach Additionstheoremen ist das äquivalent zu

$$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x \geq 2\sqrt{2\sin x \cos x}. \tag{1}$$

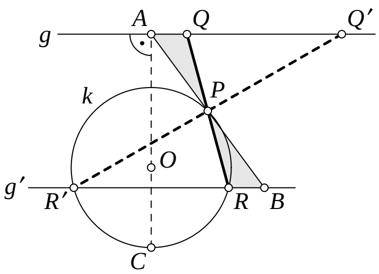
Da $2\sqrt{2\sin x \cos x} \geq 0$ und $2\sin x \cos x \geq 0$ für $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ folgt aus (1) die Behauptung. □

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 021115:

Sei k der gegebene Kreis mit Mittelpunkt O und Radius r sowie A auf g derjenige Punkt mit kürzestem Abstand zu O.

a) *Konstruktion:* Durch Verdoppelung der Strecke AP entsteht Punkt B. Die Parallele $g' \parallel g$ durch B schneide k in den Punkten R bzw. R'. Die Geraden PR und PR' schneiden g in den Punkten Q bzw. Q'. Die gesuchten Sekanten sind dann RPQ bzw. $R'PQ'$.



Beweis: Nach obiger Konstruktion und Kongruenzsatz WSW ($\sphericalangle QAP = \sphericalangle RBP$ Wechselwinkel, $AP = PB$ sowie $\sphericalangle APQ = \sphericalangle BPR$ Scheitelwinkel) gilt $\triangle APQ \cong \triangle BPR$, woraus die Forderung $PR = PQ$ sofort folgt. Ebenso folgern wir aus $\triangle APQ' \cong \triangle BPR'$ die Gleichheit $PR' = PQ'$. □

b) Offensichtlich schlägt die Konstruktion fehl, wenn g' keine Schnittpunkte mit k hat. Das ist genau dann der Fall, wenn der senkrechte Abstand von P zu g größer als die Hälfte des Abstandes $AC = a + r = 8$ cm, also größer als 4 cm ist. Dabei ist C der Schnittpunkt der Geraden AO mit k, der den größeren Abstand zu g hat.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021116:

Zunächst kann man bereits aus den Wurzeln folgende Bedingung ableiten: $-1 \leq x \leq 3$. Als nächstes sind die Stellen zu berechnen, an denen die Ungleichung ihren Wahrheitswert wechselt, also wo $\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} = 1/2$ gilt.

$$\begin{aligned}
\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1} &= 1/2 \\
\sqrt{3-x} &= 1/2 + \sqrt{x+1} \\
3 - x &= 1/4 + x + 1 + \sqrt{x+1} \\
7/4 - 2x &= \sqrt{x+1} \\
49/16 + 4x^2 - 7x &= x + 1 \\
4x^2 - 8x + 33/16 &= 0 \\
x^2 - 2x + 33/64 &= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= 1 \pm \sqrt{1 - 33/64} \\
x_1 &= 1 + \sqrt{31}/8 \\
x_2 &= 1 - \sqrt{31}/8
\end{aligned}$$

Da quadriert wurde, kann es Scheinlösungen geben. Es muss also noch eingesetzt werden.
$\sqrt{3-x_1} - \sqrt{x_1+1} = -1/2 \rightarrow$ Scheinlösung

$\sqrt{3-x_2} - \sqrt{x_2+1} = 1/2 \to$ Lösung

x_2 ist also die gesuchte Grenze.

Die Ungleichung wird wahr für alle x, für die gilt: $-1 \leq x < 1 - \sqrt{31}/8$.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 021121:

a) Wenn die Energieerzeugung E ein konstantes prozentuales Jahreswachstum x hat, erhält man die Gleichung $10\,000E = E \cdot (1+x)^{100}$. Die Lösung ist $x = \sqrt[100]{10\,000} - 1 = 9{,}65\%$.

b) Die Gleichung lautet: $327 = 170 \cdot (1+y)^6$. Die Lösung ist $y = \sqrt[6]{327/170} - 1 = 11{,}53\%$. Vergleich: $y > x$, das tatsächliche Wachstum ist größer als das angenommene.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 021122:
Nach der Ungleichung über das quadratische und arithmetische Mittel gilt:

$$\frac{|\sin\alpha| + |\cos\alpha|}{2} \leq \sqrt{\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad\Longrightarrow\quad |\sin\alpha| + |\cos\alpha| \leq \sqrt{2} < \frac{3}{2}.$$

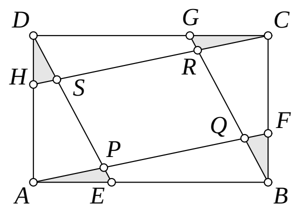
Die letzte Ungleichung folgt durch Wurzelziehen aus $2 = \frac{8}{4} < \frac{9}{4}$.

Schließlich bemühen wir noch die Dreiecksungleichung $|x+y| \leq |x| + |y|$ und erhalten $|\sin\alpha + \cos\alpha| \leq |\sin\alpha| + |\cos\alpha| < \frac{3}{2}$, also das gewünschte Ergebnis $\sin\alpha + \cos\alpha \neq \frac{3}{2}$. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021123:

a) Offensichtlich gelten wegen $AB = CD$, $BC = DA$, $AE = CG$ und $BF = DH$ folgende Kongruenzen:



$\triangle ABF \cong \triangle CDH$ bzw. $\triangle BCG \cong \triangle DAE$ (Kongruenzsatz SWS), also $AF = CH$.

Darüber hinaus gilt auch $\triangle AEP \cong \triangle CGR$ und $\triangle BFQ \cong \triangle DHS$ (Kongruenzsatz WSW), somit $AP = CR$, $PE = RG$, $BQ = DS$ und $QF = SH$.

Daraus folgt $PQ = RS$ und $QR = SP$. Das Viereck hat mithin gegenüberliegende Seiten, die gleich lang sind, ist damit ein Parallelogramm.

b) Zuerst ist es sinnvoll, einige Bezeichnungen einzuführen. Sei A_0 die Fläche des Rechtecks $ABCD$ und A_{PQRS} die Fläche des Parallelogramms $PQRS$ – aus diesen beiden suchen wir das Verhältnis A_{PQRS}/A_0. Weiterhin seien die Flächeninhalte der Dreiecke AEP, ABQ, BFQ und BCR mit A_1,

A_2, A_3 und A_4 bezeichnet.

Aus Ähnlichkeitsüberlegungen erhält man $A_2 = 9A_1$ und $A_4 = 9A_3$. Außerdem hat man $A_0 = AB \cdot BC = 3 \cdot AB \cdot BF = 6A_{\Delta ABF} = 6(A_2 + A_3)$ und analog $A_0 = 6(A_4 + A_1)$.

Daraus bekommen wir die Gleichung

$$A_2 + \frac{1}{9}A_4 = A_4 + \frac{1}{9}A_2,$$

aus der $A_2 = A_4$ und $A_1 = A_3$ folgen. Einsetzen führt auf

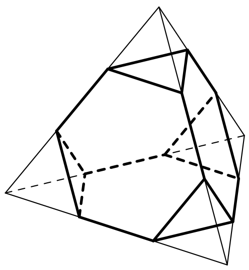
$$\frac{1}{6}A_0 = A_2 + \frac{1}{9}A_2;$$

es folgt $A_2 = \frac{3}{20}A_0$. Jetzt sieht man

$$A_{PQRS} = A_0 - 4A_2 = A_0 - \frac{12}{20}A_0 = \frac{2}{5}A_0.$$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht/Carsten Balleier

Lösung 021124:



Regelmäßige Sechsecke auf den Seitenflächen des Tetraeders mit der Kantenlänge a entstehen nur, wenn dessen Kanten gedrittelt werden und somit vier kleine regelmäßige Tetraeder mit der Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ abgeschnitten werden.

Jeder dieser kleinen Tetraeder hat ein Volumen von $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ des ursprünglichen Tetraeders, also hat der verbleibende Körper ein Volumen von $V' = (1 - \frac{4}{27})V = \frac{23}{27}V$ des ursprünglichen Volumens V.

Mit der Volumenformel eines Tetraeders $V = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ ergibt sich $V' = \frac{23\sqrt{2}}{324}a^3$.

Auf jeder Seitenfläche fallen durch das Abschneiden drei kleine gleichseitige Dreiecke der Kantenlänge $\frac{1}{3}a$ weg, dafür entsteht an jeder Ecke ein neues dieser Dreiecke. Die Oberfläche des Restkörpers beträgt also $A' = A - 8 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{4}A = \frac{7}{9}A$ bzw. mit $A = \sqrt{3}a^2$ daher $A' = \frac{7}{9}\sqrt{3}\,a^2$.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021125:

Der Beweis erfolgt über das Prinzip der Vollständigen Induktion. Dazu wird zunächst nachgewiesen, daß es ein n gibt, mit dem die zu beweisende Aussage korrekt ist.

Sei $n = 1$:

$$\begin{aligned} &5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \\ &\qquad = 5^3 \cdot 2^3 + 3^3 \cdot 2^3 \\ &\qquad = 125 \cdot 8 + 27 \cdot 8 = 152 \cdot 8 = 19 \cdot 8 \cdot \end{aligned}$$

Damit ist nachgewiesen, daß es mindestens eine natürliche Zahl n gibt, für die die Behauptung wahr ist, d.h. für die gilt: $19k = 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$ für eine ntürliche Zahl k.

Kann unter dieser (Induktions-)Voraussetzung nun gezeigt werden, daß aus der Existenz eines n auch die

Behauptung für $n+1$ gilt, so wäre der Beweis erbracht:

$$\begin{aligned}
x &= 5^{2(n+1)+1} \cdot 2^{(n+1)+2} + 3^{(n+1)+2} \cdot 2^{2(n+1)+1} \\
&= 5^{2n+1+2} \cdot 2^{n+2+1} + 3^{n+2+1} \cdot 2^{2n+1+2} \\
&= 25 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2 \cdot 2^{n+2} + 3 \cdot 3^{n+2} \cdot 4 \cdot 2^{2n+1} \\
&= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} \\
&= 50 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot \left(19k - 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2}\right) \\
&= (50-12) \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 19k \\
&= 2 \cdot 19 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot 19k \\
&= 19 \cdot \left(2 \cdot 5^{2n+1} \cdot 2^{n+2} + 12 \cdot k\right)
\end{aligned}$$

Dies bedeutet, daß der Induktionsbeweis geführt worden ist. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuela Kugel

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

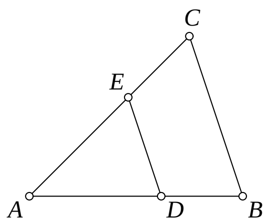
Lösung 021131:

Angewandt wird die Ungleichung zum Arithmetischen und Harmonischen Mittel: Arithmetisches Mittel $\geq$ Harmonisches Mittel. Genutzt werden dabei die $x_1 = a+b$, $x_2 = b+c$, $x_3 = a+c$:

$$\frac{(a+b)+(b+c)+(a+c)}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}}$$
$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a} \geq \frac{9}{(a+b)+(b+c)+(c+a)} = \frac{9}{2\,(a+b+c)} > \frac{3}{a+b+c}. \quad \square$$

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021132:



Sei $k \equiv \frac{AD}{AB}$. Dann gilt ebenso $k = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$, da es sich bei $ABCDE$ wegen $DE \parallel BC$ um eine Strahlensatzfigur handelt. Mit den üblichen Abkürzungen $BC \equiv a$, $CA \equiv b$ und $AB \equiv c$ soll nun laut Voraussetzung

$$\frac{DE+EA+AD}{a+b+c} = \frac{ka+kb+kc}{a+b+c} = k = \frac{[ADE]}{[DBCE]}$$

sein, wobei $[XYZ]$ den Flächeninhalt von XYZ bezeichnet.

Da jedoch $[DBCE] = [ABC] - [ADE]$ gilt und Dreieck ADE aus Dreieck ABC durch eine zentrische Stauchung um den Faktor k hervorgeht, ist $[ADE] = k^2\,[ABC]$. Daraus folgt die Gleichung

$$k = \frac{[ADE]}{[ABC]-[ADE]} = \frac{k^2}{1-k^2} \qquad \Longrightarrow \qquad k^2+k-1=0.$$

Als Lösung dieser quadratischen Gleichung kommt wegen $0 < k < 1$ nur $k = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1) \approx 0{,}618$, die Verhältniszahl des *goldenen Schnitts*, in Frage. Punkt D teilt demzufolge die Seite AB im Verhältnis

$$\frac{k}{1-k} = \frac{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)}{1-\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)} = \frac{\sqrt{5}-1}{3-\sqrt{5}} = \frac{(\sqrt{5}-1)(3+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Aufgeschrieben von Eckard Specht – Quelle: (11)

Lösung 021133:

Folgende geordnete Paare von Primzahlen a, b erfüllen die Gleichung $a+b = 99-c$ für ein gegebenes $c > b > a, c > 33$:

c	$99-c$	(a,b) mit $a+b=99-c$	(a,b) mit $c>b>a$	Anzahl
97	2	$\emptyset$	$\emptyset$	0
89	10	(3,7),(5,5)	(3,7)	1
83	16	(3,13),(5,11)	(3,13),(5,11)	2
79	20	(3,17),(7,13)	(3,17),(7,13)	2
73	26	(3,23),(7,19),(13,13)	(3,23),(7,19)	2
71	28	(5,23),(11,17)	(5,23),(11,17)	2
67	32	(3,29),(13,19)	(3,29),(13,19)	2
61	38	(7,31),(19,19)	(7,31)	1
59	40	(3,37),(11,29),(17,23)	(3,37),(11,29),(17,23)	3
53	46	(3,43),(5,41),(17,29),(23,23)	(3,43),(5,41),(17,29)	3
47	52	(5,47),(11,41),(23,29)	(11,41),(23,29)	2
43	56	(3,53),(13,43),(19,37)	(19,37)	1
41	58	(5,53),(11,47),(17,41),(29,29)	$\emptyset$	0
37	62	(3,59),(19,43)	$\emptyset$	0

Für $c \leq 33$ ist $a+b = 99-c \geq 66$, d.h. $b > 33 \geq c$ wegen $a < b$, also würde dann nicht $c > b$ gelten und eventuelle Tripel (a,b,c) könnten umgeordent werden, so dass $c > b > a$ gilt.

Also lässt sich die 99 auf $1+2+2+2+2+2+1+3+3+2+1 = 21$ verschiedene Weisen als Summe von drei verschiedenen Primzahlen darstellen.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 021134:

Zuerst beobachtet man folgende Eigenschaft reeller Zahlen:

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \text{ mit } t < 1, t \neq 0 : t^3 < t^2.$$

Damit kann man zeigen, dass $1 - \cos^3 x > 1 - \cos^2 x$ gilt, außer wenn $\cos x = 0$ oder $\cos x = 1$, dann gilt Gleichheit

Ebenso gilt $\sin^2 x > \sin^3 x$ überall dort, wo $\sin x$ von 0 und 1 verschieden ist. Unter Verwendung des trigonometrischen PYTHAGORAS in der Form $1 - \cos^2 x = \sin^2 x$ folgt $1 - \cos^3 x > \sin^3 x$, was in der Form $\sin^3 x + \cos^3 x < 1$ ein direkter Widerspruch zu der Gleichung ist, deren Lösungen wir suchen. Also kann sie nur dort Lösungen besitzen, wo die Ungleichung nicht gilt.

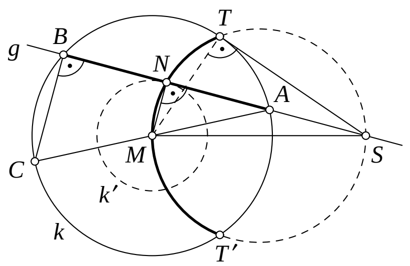
Dies ist gerade dort der Fall, wo sowohl $\sin x$ als auch $\cos x$ einen der Werte 0 oder 1 annehmen, also bei $x_0 = 0$ und $x_1 = \pi/2$. Tatsächlich erfüllen diese beiden Werte die Gleichung, womit die vollständige Lösung (unter Berücksichtigung der Periodizität) aus allen Werten

$$x_{2k} = 2k\pi \text{ und } x_{2k+1} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad (k \in \mathbb{N})$$

besteht.

Aufgeschrieben und gelöst von Carsten Balleier

Lösung 021135:



Sei AB eine der Sehnen, die die beliebige Gerade g aus dem gegebenen Kreis k herausschneidet und N deren Mittelpunkt. ST und ST' seien die beiden Tangentenabschnitte von S an k.

Ferner sei k' ein Kreis mit dem Mittelpunkt M, für den AN gerade ein Tangentenabschnitt ist.

Dann gilt aufgrund $ST \perp MT$ und $AN \perp MN$:

$$\begin{aligned} SM^2 &= MT^2 + ST^2 \quad \text{(Satz des Pythagoras in } \triangle STM) \\ &= (MT^2 - MN^2) + ST^2 + MN^2 \quad (\text{„nahrhafte Null“ } MN^2 - MN^2) \\ &= (AM^2 - MN^2) + ST^2 + MN^2 \quad (\text{gleiche Radien } MT = AM) \\ &= AN^2 + ST^2 + MN^2 \quad (\text{Satz des Pythagoras in } \triangle ANM) \end{aligned} \tag{1}$$

Nach dem Sekanten-Tangentensatz gilt weiterhin:

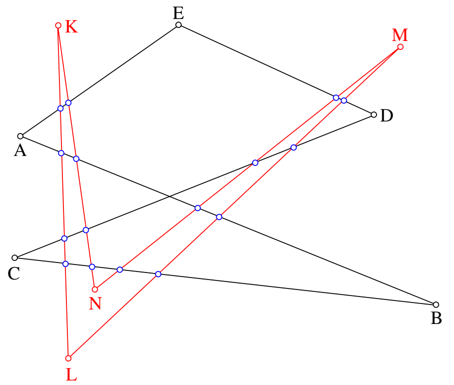
$$ST^2 = SA \cdot SB = \left(\frac{SB + SA}{2}\right)^2 - \left(\frac{SB - SA}{2}\right)^2 = SN^2 - AN^2, \tag{2}$$

wobei $SB + SA = 2SN$ und $SB - SA = 2AN$ wegen der Mittelpunktseigenschaft von N gilt.

(2) in (1) eingesetzt ergibt $SM^2 = SN^2 + MN^2$, woraus mit Hilfe der Umkehrung des Satzes des Pythagoras folgt, dass N auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser SM liegt.

Aufgeschrieben und gelöst von Eckard Specht

Lösung 021136:



Ein ebenes allgemeines Fünfeck ist laut Definition eine geometrische Figur von fünf paarweise voneinander verschiedenen Punkten A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 der gleichen Ebene, von denen keine drei aufeinanderfolgende auf derselben Geraden liegen, die zusammen mit den Strecken $\overline{A_1A_2}$, $\overline{A_2A_3}$, $\overline{A_3A_4}$, $\overline{A_4A_5}$, $\overline{A_5A_1}$ das Fünfeck bilden.

Zunächst bestimmen wir unter Berücksichtigung der Bedingungen aus der Aufgabenstellung (Fünfeck ist nicht unbedingt konvex, Eckpunkte des Fünfecks liegen nicht auf irgendeiner Seite des Vierecks) die maximale Anzahl der Schnittpunkte einer Geraden g mit den Seiten des Fünfeck.

Die Gerade g teile die Ebene ε in zwei Halbebenen ε_1 und ε_2. O.B.d.A. wird angenommen:

$$A_1 \in \varepsilon_1, A_1 \notin g$$

Aus der Definition und den Bedingungen der Aufgabenstellung folgt dann:

$\overline{A_1A_2}$ hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_2 \in \varepsilon_2, A_2 \notin g$
$\overline{A_2A_3}$ hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_3 \in \varepsilon_1, A_3 \notin g$
$\overline{A_3A_4}$ hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_4 \in \varepsilon_2, A_4 \notin g$
$\overline{A_4A_5}$ hat nur dann einen gemeinsamen Schnittpunkt mit g, wenn gilt: $A_5 \in \varepsilon_1, A_5 \notin g$

Die Strecke A_5A_1 kann mit der Geraden g keinen Schnittpunkt haben, da A_1 und A_5 in der gleichen Halbebene ε_1 liegen.

Damit ist bewiesen, dass eine Gerade und somit auch eine Seite eines Vierecks maximal vier Schnittpunkte mit den Seiten eines Fünfeckes haben kann. Hieraus folgt nun wiederum, das die größtmögliche Anzahl der Schnittpunkte der Seiten beider Vielecke $4 \cdot 4 = 16$ sein kann. Es genügt nun an einem Beispiel zu zeigen, dass 16 Schnittpunkte unter den Bedingungen der Aufgabenstellung existieren wie im Bild angegeben.

Es seien $ABCDE$ ein konkaves Fünfeck und $KLMN$ ein konkaves Viereck.

Bemerkung: Die Seiten eines ebenen n-Eck haben mit einer Geraden g maximal $n-1$ gemeinsame Schnittpunkte bei ungeradem n und n gemeinsame Schnittpunkte bei geradem n.

Aufgeschrieben und gelöst von Manfred Worel

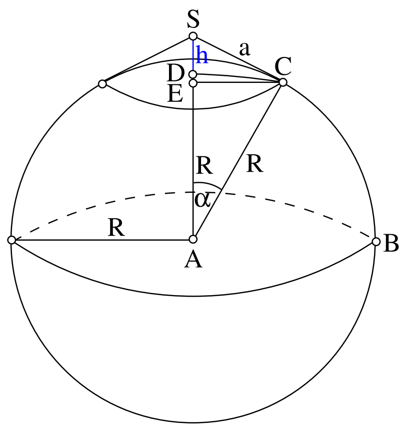
3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 031111:

a) Um zunächst die Fläche $M = 2\pi RH$ der überschaubaren Kugelkappe zu berechnen, findet man zunächst mittels des Satzes des Pythagoras für die Sichtweite a den Ausdruck

$$a = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} = \sqrt{2Rh + h^2}.$$



Dies gilt, da das Dreieck ΔACS rechtwinklig ist, denn die Sichtgerade kann als Tangente an den Kreis (die Erde) angesehen werden.

Mit E und C als Punkte auf der Grundseite der Kugelkappe sowie D als Punkt, an dem der Antennenmast die Erde berührt, sei H die Länge der Strecke DE. Dann gilt $\cos\alpha = \frac{a}{h+R} = \frac{h+H}{a}$ (die Dreiecke ΔACS und ΔECS sind ähnlich aufgrund eines gemeinsamen Winkels und des in beiden Dreiecken vorhandenen rechten Winkels) und damit auch

$$H = \frac{a^2}{h+R} - h = \frac{2Rh + h^2}{h+R} - h.$$

Damit erhält man als Ergebnis

$$M = 2\pi RH = 2\pi R\left(\frac{2Rh + h^2}{h+R} - h\right).$$

Für das gegebene Beispiel ist also $H \approx 351,98\text{m}$ und damit $M \approx 1,4088 \cdot 10^{10}\text{m}^2$.

b) h ist $100,005682\%$ von H, die Abweichung der Fläche ist also $0,005682\%$. Sie ist für $h \ll R$ deshalb so gering weil dann $H = \frac{2Rh+h^2}{h+R} - h \approx \frac{2Rh}{R} - h = h$ gilt.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Sattler

Lösung 031112:

a) Zu Beginn enthält die erste Tasse a Einheiten Milch, und die zweite Tasse a Einheiten Kaffee. Ein Löffel enthält $x \cdot a$ Einheiten Flüssigkeit, wobei $0 < x < 1$ gilt.

Jetzt wird ein Löffel von Tasse 1 nach Tasse 2 gegeben. Dann enthält die erste Tasse $a - x \cdot a$ Einheiten Milch, und die zweite Tasse a Einheiten Kaffee und $x \cdot a$ Einheiten Milch.

Jetzt wird ein Löffel von Tasse 2 nach Tasse 1 gegeben. Dieser enthält $x \cdot a$ Einheiten Flüssigkeit. Wichtig ist jetzt die Zusammensetzung der Flüssigkeit. In der 2. Tasse gibt es $a/(a+x \cdot a) = 1/(1+x)$ Anteile Kaffee und $x \cdot a/(a + x \cdot a) = x/(1 + x)$ Anteile Milch.

Damit enthält der Löffel $(1/(1 + x)) \cdot x \cdot a = x \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Kaffee und $(x/(1 + x)) \cdot x \cdot a = x^2 \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Milch. Somit enthält die erste Tasse jetzt $a - x \cdot a + x^2 \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Milch und $x \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Kaffee, und die zweite Tasse $a - x \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Kaffee und $x \cdot a - x^2 \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Milch.

Jetzt soll der Kaffee in der ersten Tasse mit der Milch in der zweiten Tasse verglichen werden. In der zweiten Tasse befinden sich $x \cdot a - x^2 \cdot a/(1 + x) = (x \cdot a + x^2 \cdot a - x^2 \cdot a)/(1 + x) = x \cdot a/(1 + x)$ Einheiten Milch. Das ist genauso viel, wie Kaffee in der ersten Tasse.

Es befindet sich also gleichviel Kaffee in der ersten Tasse wie Milch in der zweiten Tasse.

b) Analog zur ersten Teilaufgabe kann hier das Ergebnis bestimmt werden. Die Tasseninhalte sehen wie folgt aus:

Anfangszustand:

Tasse 1: a Einheiten Milch
Tasse 2: $2a$ Einheiten Kaffee

Nach dem 1. Umgießen:

Tasse 1: $a - xa$ Einheiten Milch
Tasse 2: $2a$ Einheiten Kaffee, xa Einheiten Milch

Nach dem 2. Umgießen:

Löffel: $2xa/(2 + x)$ Einheiten Kaffee, $x^2a/(2 + x)$ Einheiten Milch
Tasse 1: $a - xa + x^2a/(2 + x)$ Einheiten Milch, $2xa/(2 + x)$ Einheiten Kaffee
Tasse 2: $2a - 2xa/(2+x)$ Einheiten Kaffee, $xa - x^2a/(2+x) = 2xa/(2+x)$ Einheiten Milch

Auch hier befindet sich gleichviel Kaffee in der ersten Tasse wie Milch in der zweiten Tasse.

Aufgeschrieben und gelöst von Korinna Grabski

Lösung 031113:

Aufgrund der dritten binomischen Formel gilt: $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$.

Von drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen ist stets genau eine durch 3 teilbar. Da p nach den Voraussetzungen nicht durch 3 teilbar sein kann, gilt entweder $3|(p-1)$ oder $3|(p+1)$. Somit ist 3 ein Teiler von $p^2 - 1$.

Desweiteren muss p eine ungerade Zahl sein. $p - 1$ und $p + 1$ sind demzufolge zwei aufeinander folgende gerade Zahlen und damit durch 2 teilbar. Von zwei aufeinander folgenden geraden Zahlen ist aber sogar genau eine durch 4 teilbar.

Es gilt also ebenfalls: $8|(p^2 - 1)$.

Da 3 und 8 teilerfremd sind, folgt aus $3|(p^2 - 1)$ und $8|(p^2 - 1)$ die Behauptung, dass $24|(p^2 - 1)$. $\square$

Aufgeschrieben und gelöst von Manuel Naumann

Lösung 031114:

Nach Additionstheoremen gilt

$$\begin{aligned}\sin^2 3x &= (\sin x\cos 2x + \cos x \sin 2x)^2\\ &= \sin^2 x\cos^2 2x + \cos^2 x\sin^2 2x + 2\sin x\cos x\sin 2x\cos 2x\\ &= \sin^2 x(1-\sin^2 2x) + (1-\sin^2 x)\sin^2 2x + \sin^2 2x\cos 2x\\ &= \sin^2 x + \sin^2 2x - 2\sin^2 x\sin^2 2x + \sin^2 2x(1-2\sin^2 x).\end{aligned}$$

Also erfüllen genau die reellen x die Ungleichung $\sin^2 x + \sin^2 2x > \sin^2 3x$, die auch die Ungleichung $2\sin^2 x\sin^2 2x > \sin^2 2x(1-2\sin^2 x)$ erfüllen. Ist x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$, so wird diese Ungleichung nie erfüllt, sonst folgt nach Division durch $\sin^2 x$

$$2\sin^2 x > 1 - 2\sin^2 x \quad\Leftrightarrow\quad |\sin x| > \frac{1}{2}.$$

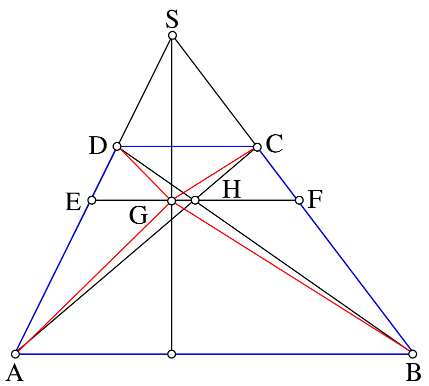
Da x kein Vielfaches von $\frac{\pi}{2}$ ist, erfüllen alle

$$x \in \left(k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi - \frac{\pi}{6}\right) \cup \left(k\pi + \frac{\pi}{6}, k\pi + \frac{\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z},$$

die Ungleichung.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

Lösung 031115:



Da $g_{SG} \neq g_{EF}$ ist, gilt auch $g_{SG} \neq g_{AB}$ und $g_{SG} \neq g_{CD}$. Daher schneidet g_{SG} die Geraden g_{AB} und g_{CD} in je einem Punkt L bzw. K. Wegen $G \neq E$ gilt $K \neq C$ und $L \neq B$.

Aus den Strahlensätzen folgt dann:

$$\frac{|KG|}{|GL|} = \frac{|CE|}{|EB|} = \frac{|CH|}{|HA|} = \frac{|CD|}{|AB|} \text{ und} \qquad (1)$$

$$\frac{|SC|}{|SB|} = \frac{|KC|}{|LB|} = \frac{|CD|}{|AB|}. \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt

$$\frac{|KG|}{|GL|} = \frac{|KC|}{|LB|} \text{ bzw. } \frac{|KG|}{|KC|} = \frac{|GL|}{|LB|}.$$

Da außerdem die Winkel $\sphericalangle CKG$ und $\sphericalangle GLB$ rechte sind, sind alle Dreiecke KGC und GLB ähnlich. Daher gilt: $\sphericalangle BGL \cong \sphericalangle KGC$.

Da weiter die Winkel $\sphericalangle SGE$ und $\sphericalangle EGL$ rechte sind, folgt $\sphericalangle BGE \cong \sphericalangle EGC$. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 031116:

Sei a die kleinste der 100 Zahlen, dann ist $a+99$ die größte der Zahlen. Die Summe der 100 Zahlen beträgt

$$\begin{aligned}&a + (a+1) + \ldots + (a+98) + (a+99)\\ &= (a + (a+99)) + ((a+1) + (a+98)) + \ldots + ((a+49) + (a+50))\\ &= \underbrace{(2a+99) + \ldots + (2a+99)}_{\text{50 Summanden}} = 100a + 4\,950,\end{aligned}$$

d.h. $100a = 995\,100$ bzw. $a = 9\,951$ und $a + 99 = 10\,050$. Also ist 9 951 die kleinste und 10 050 die größte der 100 Zahlen.

Aufgeschrieben und gelöst von Steffen Weber

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 031121:
Für jedes ungerade n gibt es eine natürliche Zahl (Null eingeschlossen) k mit $n = 2k + 1$.

$$\begin{aligned} n^3 + 3n^2 - n - 3 &= (n^2 - 1)(n + 3) \\ &= (n - 1)(n + 1)(n + 3) \\ &= 2k(2k + 2)(2k + 4) \\ &= 8 \cdot k(k + 1)(k + 2) \end{aligned}$$

Von den zwei aufeinanderfolgenden Zahlen k und $k + 1$ ist immer eine gerade und von den drei aufeinanderfolgenden Zahlen k, $k + 1$ und $k + 2$ ist immer eine durch drei teilbar. Da 2 und 3 teilerfremd sind, ist $k(k + 1)(k + 2)$ durch 6 teilbar und damit der ganze Ausdruck durch 48.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 031122:
Wende das Additionstheorem

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

auf $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}x$ und $\beta = \frac{3}{2}x$ an und erhalte:

$$\begin{aligned} \cos\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3}{2}x\right) - \sin\left(\frac{3}{2}x\right) \\ &= 2\cos\frac{\pi+6x}{4}\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\cos\frac{\pi+6x}{4} \\ \left(\cos\frac{3}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right)^2 &= 2\cos^2\frac{\pi+6x}{4} = 1 + \cos\frac{\pi+6x}{2} \\ &= 1 - \sin 3x \end{aligned}$$

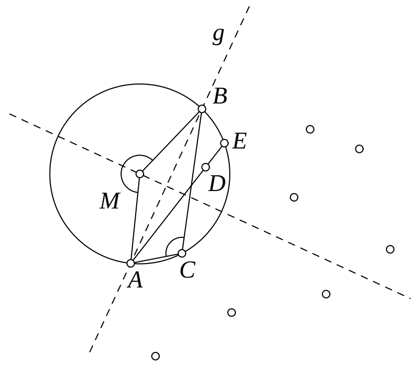
Damit wird die ursprüngliche Gleichung zu

$$\begin{aligned} 1 - \sin 5x &= 1 - \sin 3x \\ \sin 5x &= \sin 3x \end{aligned}$$

Die linke Seite wird genau dann null, wenn x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{5}$ ist und die rechte Seite, genau dann wenn x ein Vielfaches von $\frac{\pi}{3}$ ist. Das kleinste gemeinsame Vielfache von $\frac{\pi}{5}$ und $\frac{\pi}{3}$ ist π, folglich ist die Gleichung genau dann erfüllt, wenn x Vielfaches von π ist.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 031123:



In der Punktmenge gibt es immer zwei Punkte A und B, durch die eine Gerade g verläuft, so dass alle Punkte der Menge auf derselben Seite von g liegen. Das trifft zum Beispiel für zwei benachbarte Punkte auf der konvexen Hülle zu. Diejenige Seite von g, auf der sich kein Punkt befindet betrachte als außen. Alle Kreise, die durch A und B verlaufen, haben ihren Mittelpunkt auf der Mittelsenkrechten zu der Strecke AB.

Da keine 3 Punkte der Punktmenge auf einer Geraden liegen, existiert zu jeder dreielementigen Untermenge genau ein Kreis, der durch alle Punkte der Untermenge verläuft.

Von allen Punkten außer A und B nenne denjenigen Punkt C, der den größtmöglichen Winkel $\sphericalangle BCA$ aufweist.

Behauptung: Der Kreis durch A, B und C enthält keinen weiteren Punkt der Punktmenge.

Beweis: Angenommen, es gäbe noch einen Punkt D in dem Kreis.

Da sich alle Punkte der Menge auf der gleichen Seite der Geraden g befinden, muss sich D im Kreisabschnitt zwischen der Sehne AB und dem Bogen durch C befinden. Deswegen kann man die Strecke AD über D hinaus verlängern bis sie diesen Bogen im Punkt E schneidet.

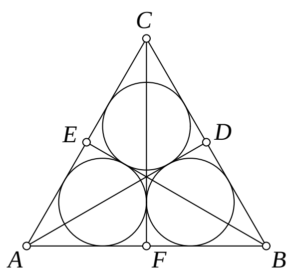
Der Winkel $\sphericalangle BEA$ ist so groß wie $\sphericalangle BCA$ weil beide Peripheriewinkel über der gleichen Sehne auf derselben Seite sind.

Die Dreiecke ABE und ABD haben den Winkel $\sphericalangle BAD$ gemeinsam, aber $\sphericalangle ABD$ ist kleiner als $\sphericalangle ABE$ und wegen der konstanten Innenwinkelsumme in Dreiecken ist $\sphericalangle BDA$ größer als $\sphericalangle BCA$.

Das ist aber ein Widerspruch, denn $\sphericalangle BCA$ sollte der größtmögliche Winkel sein. □

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 031124:



Bezeichne das Dreieck mit ABC und die Lotfußpunkte der Lote von A, B, C auf die jeweils gegenüberliegende Seite mit D, E, F.

Der Inkreis vom Dreieck ACF berührt den Inkreis von BCF weil CF Symmetrieachse von ABC ist.

AD ist ebenfalls Symmetrieachse, deswegen ist der Inkreis von ACF gleichzeitig Inkreis von AEB und der Inkreis von BCE berührt den Inkreis von AEB. Analog folgt, dass sich die Inkreise von BCE und BCF berühren.

Die betrachteten Inkreise sind folglich die in der Aufgabenstellung gesuchten.

a) $|AB| = a$ (Aufgabenstellung)
$|CF| = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ (Höhe im gleichseitigen Dreieck)
$|AF| = \frac{a}{2}$

b) Die naheliegendste Konstruktion ist wohl, einen Inkreis zum Beispiel den von ACF zu konstruieren und dessen Radius zu bestimmen.

1. Bestimme den Inkreismittelpunkt als Schnittpunkt zweier Winkelhalbierender
2. Bestimme den Radius des Kreises als Lot des Mittelpunktes auf eine Dreiecksseite.

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

Lösung 031125:

Die Aufgabe lässt sich formulieren als die Suche nach zwei natürlichen Zahlen n und k mit $n \cdot n = 10\,000k + n$ oder auch $n \cdot (n-1) = 10\,000k$. Das wiederum entspricht der Suche nach einem ganzen n mit $10\,000 \mid n(n-1)$.

Es gilt $10/s000 = 10^4 = 2^4 \cdot 5^4 = 16 \cdot 625$.

Von den zwei aufeinanderfolgenden Zahlen $n-1$ und n kann nur eine durch 2 teilbar sein, folglich muss entweder $2^4|(n-1)$ oder $2^4|n$ gelten. Analog kann von $n-1$ und n nur eine Zahl durch 5 teilbar sein, mithin entweder $5^4|(n-1)$ oder $5^4|n$.

Fallunterscheidung:

1. $625|n$ und $16|n$
   das bedeutet $10\,000|n$ und $n \geq 10\,000$, damit ist n aber nicht mehr vierstellig

2. $625|(n-1)$ und $16|(n-1)$
   das bedeutet $10\,000|(n-1)$, daraus folgt $n = 1$ oder $n \geq 10\,001$ und n ist wiederum nicht vierstellig

3. $625|n$ und $16|(n-1)$
   Die durch 625 teilbaren Zahlen lassen sich als $625m$ mit $m \in \mathbb{N}$ darstellen.

$$\begin{aligned} n-1 &\equiv 625m - 1 \quad && \text{mod } 16 \\ &\equiv m - 1 && \text{mod } 16 \end{aligned}$$

   Mit anderen Worten: Falls n durch 625 teilbar ist, ist $n-1$ genau dann durch 16 teilbar, falls m beim Teilen durch 16 den Rest 1 lässt, also $m \in \{1, 17, 33, \dots\}$. Für $m = 1$ ist $n = 625$ zu klein ($A = 0$) und für $m \geq 17$ ist $n \geq 17 \cdot 625 = 16 \cdot 625 + 625 = 10\,625$ zu groß.

4. $625|(n-1)$ und $16|n$
   Setze $n = 625m + 1$

$$\begin{aligned} n &\equiv 625m + 1 \quad && \text{mod } 16 \\ &\equiv m + 1 && \text{mod } 16 \\ &\equiv m - 15 && \text{mod } 16 \end{aligned}$$

   Daraus folgt $m \in \{15, 31, \dots\}$, wobei sich für $m = 15$ ergibt, dass $n = 15 \cdot 625 + 1 = 16 \cdot 625 - 625 + 1 = 10\,000 - 624 = 9\,376$ und für $m \geq 31$, dass $n \geq 19\,376$, was nicht vierstellig ist.

Lösung: ATOM $= 9\,376$

Aufgeschrieben und gelöst von Henning Thielemann

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 11
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 041111:
Die Anzahl der Fahrten pro Jahr des LKW L_i zum Betrieb B_j wird mit x_{ij} bezeichnet ($i = 1, 2; j = 1, 2$).

Es gilt dann:

$$x_{11} + 4x_{21} \geq 600 \geq x_{11} + 1 + 4(x_{21} - 1) \quad (1)$$
$$x_{12} + 4x_{22} \geq 400 \geq x_{12} + 1 + 4(x_{22} - 1) \quad (2)$$
$$x_{11} + x_{12} \leq 300 \quad (3)$$
$$x_{21} + x_{22} \leq 200 \quad (4)$$
$$x_{ij} \geq 0 \text{ und ganzzahlig.} \quad (5)$$

Bezeichnet man die gesamten Transportkosten mit K, dann gilt

$$K = 10x_{11} + 20x_{21} + 30x_{12} + 60x_{22}. \quad (6)$$

Es ist zu untersuchen, für welche Werte x_{ij} die Kosten unter Berücksichtigung der Beziehungen (1) bis (5) möglichst gering werden. Aus (1) folgt:

$$600 - 4x_{21} \leq x_{11} \leq 603 - 4x_{21} \quad (7)$$

und aus (2)

$$400 - 4x_{22} \leq x_{12} \leq 403 - 4x_{22}. \quad (8)$$

Wegen (7) und (8) folgt aus (6)

$$18000 - 20x_{21} - 60x_{22} \leq K \leq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22}$$

und hieraus wegen (4)

$$14000 - 40x_{22} \leq K \leq 18120 - 20x_{21} - 60x_{22} \quad (9)$$

Aus (8) folgt

$$x_{22} \leq \frac{403 - x_{12}}{4}$$

und daraus wegen (5)

$$x_{22} \leq 100. \quad (10)$$

Wegen (9) werden die Transportkosten genau dann möglichst gering, wenn x_{22} möglichst groß, wenn also x_{22} wegen (10) gleich 100 ist. Aus den Bedingungen der Aufgabe ergibt sich daher $x_{12} = 0$. Daher kann K keinen kleineren Wert als 1000 annehmen. Für $K = 1000$ müßte wegen (6)

$$10x_{11} + 20x_{21} = 4000,$$

also

$$x_{11} + 2x_{21} = 400 \tag{11}$$

sein. Aus (1) und (11) folgt dann weiter $x_{21} \leq 100$ und aus (4) wegen $x_{22} = 100$: $x_{21} \leq 100$. Daher müßte $x_{21} = 100$ und wegen (11) $x_{11} = 200$ sein. Daher kann nur in dem Fall

	L_1	L_2
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_1	200	100
Anzahl der jährlichen Fahrten zu B_2	0	100

$K = 1000$ sein. Wie man leicht nachprüft, ist in diesem Fall auch tatsächlich $K = 1000$, womit die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 041112:
Es gilt

$$\begin{aligned}&|P_0M| = |P_1M| = |P_2M| = ... = r \quad \text{und}\\ &|\sphericalangle P_1P_0M| = |\sphericalangle MP_1P_0| = |\sphericalangle P_2P_1M| = |\sphericalangle MP_2P_1| = ... = \alpha,\end{aligned}$$

da die Größe des Einfallswinkels gleich der Größe des Reflexionswinkels ist, Basiswinkel in jedem gleichschenkligen Dreieck kongruent sind und $|\sphericalangle P_1P_0M| = \alpha$ (Scheitelwinkel) ist.

Daher sind die Dreiecke P_0MP_1, P_1MP_2, P_2MP_3 u.s.w. untereinander kongruent, und es gilt für die Bögen:

$$\overset{\frown}{P_0P_1} \simeq \overset{\frown}{P_1P_2} \simeq \overset{\frown}{P_2P_3} \simeq ...$$

und

$$|\sphericalangle P_0MP_1| = |\sphericalangle P_1MP_2| = |\sphericalangle P_2MP_3| = ... = \pi - 2\alpha.$$

a) Dann ist

$$\begin{aligned}|\overset{\frown}{P_0P_n}| &= |\overset{\frown}{P_0P_1}| + |\overset{\frown}{P_1P_2}| + ... + |\overset{\frown}{P_{n-1}P_n}|\\ &= (\pi - 2\alpha)r + (\pi - 2\alpha)r + ... + (\pi - 2\alpha)r\\ &= n(\pi - 2\alpha)r.\end{aligned}$$

b) Für $n = 10$ gilt in diesem Falle:

$$\begin{aligned}|\overset{\frown}{P_0P_{10}}| &= 10(\pi - 2\alpha)r = 2\pi r, \text{ also}\\ \alpha &= \frac{2}{5}\pi.\end{aligned}$$

c) Fällt P_n mit P_0 zusammen und ist $\alpha = \frac{5}{18}\pi$, so gilt:

$$n\left(\pi - \frac{5}{9}\pi\right) r = k2\pi r \quad (k = 1, 2, 3, ...). \tag{1}$$

(1) ist äquivalent mit

$$n = \frac{9}{2}k. \tag{2}$$

Da n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist, wird (2) genau dann erfüllt, wenn $k = 2k'$ mit $k' > 0$ und k' ganzzahlig gilt. Daher ist $n = 9k'$ (k'=1,2,3,...).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 041113:

Der Inhalt p der gerasterten Fläche ist gleich der Differenz aus dem Inhalt πr^2 des Kreises k und dem Inhalt f der in k gelegenen nicht-gerasterten Fläche

$$p = \pi r^2 - f.$$

Der Flächeninhalt s der schraffierten Fläche ist gleich der Differenz aus der Summe der Inhalte der vier Kreisscheiben k_ν und f. Da die genannte Summe gleich

$$4\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \pi r^2 \qquad \text{ist, ergibt sich}$$

$$s = \pi r^2 - f \qquad \text{und damit}$$

$$s = p.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 041114:

Wir beweisen zunächst folgenden Hilfssatz:

Sind a_i und b_i die vorletzte bzw. die letzte Ziffer der natürlichen Zahl z_i im Dezimalsystem, $i = 1, 2$, so stimmt die vorletzte bzw. die letzte Ziffer von $z_1 \cdot z_2$ mit der entsprechenden Ziffer von $(10a_1+b_1)(10a_2+b_2)$ überein.

Beweis:

Auf Grund der Voraussetzungen gibt es zwei natürliche Zahlen c_1 und c_2 derart, daß

$$z_i = 100c_i + 10a_i + b_i, \quad i = 1, 2,$$

gilt. Daraus folgt

$$z_1 \cdot z_2 = 100[100c_1c_2 + (10a_1 + b_1)c_2 + (10a_2 + b_2)c_1] + (10a_1 + b_1)(10a_2 + b_2),$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt.

Berechnet man die letzten beiden Ziffern der Potenz 3^n für $n = 1, 2, 3, ...20$, so erkennt man die letzten beiden Ziffern von 3^{19} gleich 67 und die von 3^{20} gleich 01 sind.

Wegen $3^{999} = (3^{20})^{49} \cdot 3^{19}$ sind dann die letzten beiden Ziffern von 3^{999} gleich 67. Durch Berechnung der letzten beiden Ziffern von 2^m für $m = 1, 2, 3, ..., 22$ erkennt man, daß die letzten beiden Ziffern von 2^{22} gleich 04 sind. Es gilt:

$$2^{999} = (2^{22})^{45} \cdot 2^9.$$

Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^{45}$ sind also gleich den letzten beiden Ziffern von

$$4^{45} = 2^{90} = (2^{22})^4 \cdot 2^2.$$

Die letzten beiden Ziffern von $(2^{22})^4$ sind dieselben wie die von $4^4 = 2^8$, und zwar 56, und die letzten beiden Ziffern von 2^9 lauten 12.

Daher sind die letzten beiden Ziffern von 2^{999} gleich den letzten beiden Ziffern des Produktes $56 \cdot 4 \cdot 12$. Die letzten beiden Ziffern dieses Produktes lauten 88, und damit sind die letzten beiden Ziffern von $3^{999} - 2^{999}$ gleich 79.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (11)

Lösung 041115:

Zu dieser Aufgabe präsentieren wir zwei sehr unterschiedliche Lösungen, eine mit brachialer Rechengewalt und eine mit etwas mehr Überlegung.

Lösung 1

Die „geradlinigste“ Methode ist, beide Gleichungen zu lösen und nachzusehen, welche Zahlen in beiden Lösungsmengen vorkommen. Das ist machbar, denn für Polynome bis zum Grad 4 gibt es explizite Lösungsformeln. Allerdings macht das keinen Spaß, denn die Formel für Grad 4 ist erheblich unhandlicher als die bekannte „$p - q$-Formel“ für Grad 2. Es ist auch ziemlich sinnlos, das von Hand auszurechnen, denn jedes Computeralgebraprogramm sollte das können. Maple z.B. berechnet als Lösungsmengen

$$\left\{-1,\, -\frac{7}{3},\, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\} \qquad \text{bzw.} \qquad \left\{1,\, -\frac{7}{3},\, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

(wer sich langweilt, möge das von Hand ausrechnen). Man sieht, dass die Lösung der Aufgabenstellung $\{-\frac{7}{3}\}$ ist.

Bemerkung: Ob diese Lösung als „vollständig“ anerkannt würde, ist fraglich, da die eigentliche Berechnung nicht von Hand erfolgte, aber im Prinzip ist dieser Lösungsweg gangbar.

Lösung 2

Wir definieren Polynome $p_1(x) := 3x^4 + 13x^3 + 20x^2 + 17x + 7$ und $p_2(x) := 3x^4 + x^3 - 8x^2 + 11x - 7$. Sei x eine Lösung der gegebenen Gleichungen, $p_1(x) = p_2(x) = 0$. Dann gilt

$$0 = p_1(x) - p_2(x) = 12x^3 + 28x^2 + 6x + 14 =: p_3(x)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 4p_2(x) - (x - 2)p_3(x) = 18x^2 + 42x =: p_4(x)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = 3p_3(x) - 2xp_4(x) = 18x + 42 =: p_5(x)$$

Umgekehrt folgt wegen $p_4(x) = xp_5(x)$ aus $p_5(x) = 0$, dass auch $p_3(x) = 0$ ist (denn $p_3(x) = \frac{1}{3}(p_5(x) + 2xp_4(x))$) und ebenso, dass auch $p_1(x)$ und $p_2(x)$ Null sind. Die gesuchten gemeinsamen Lösungen der Gleichungen sind also genau die Nullstellen von p_5, also $\{-\frac{7}{3}\}$.

Bemerkung: was gemacht wurde, ist praktisch die Berechnung des größten gemeinsamen Teilers der beiden gegebenen Polynome mit dem euklidischen Algorithmus. Dass die gemeinsamen Nullstellen genau die Nullstellen des ggT sind, liegt daran, dass Polynome in einer Variablen über $\mathbb{C}$ vollständig in Linearfaktoren zerlegbar sind. Bei mehr als einer Variablen funktioniert das nicht.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Lösung 041116:

Mit den Abkürzungen $a = 1\,620$, $b = 12\sqrt{17\,457}$ ist $z = \sqrt[3]{a+b} + \sqrt[3]{a-b}$, also

$$\begin{aligned} z^3 &= a + b + 3(a+b)^{\frac{2}{3}}(a-b)^{\frac{1}{3}} + 3(a+b)^{\frac{1}{3}}(a-b)^{\frac{2}{3}} + a - b \\ &= 2a + 3\Big((a+b)(a-b)\Big)^{\frac{1}{3}}\Big((a+b)^{\frac{1}{3}} + (a-b)^{\frac{1}{3}}\Big) \\ &= 2a + 3\sqrt[3]{a^2-b^2}\cdot z \;=\; 3\,240 + 3\sqrt[3]{110\,592}\cdot z \;=\; 3\,240 + 144z \end{aligned}$$

(wegen $110\,592 = 2^{12}\cdot 3^3 = (2^4\cdot 3)^3$ braucht man für $\sqrt[3]{110\,592}$ keinen evtl. ungenauen Taschenrechner (und muss auch keinen Rechenstab aus dem Museum klauen)).

Demnach ist z eine reelle Nullstelle des Polynoms

$$\begin{aligned} p := x^3 - 144x - 3\,240 \;&=\; (x-18)(x^2+18x+180) \\ &=\; (x-18)(x+9+\sqrt{-99})(x+9-\sqrt{-99}). \end{aligned}$$

Da 18 die einzige reelle Nullstelle von p ist, muss z gleich 18 sein.

Aufgeschrieben und gelöst von Rainer Müller

Quellenverzeichnis

(2) Engel, W./Pirl, U. Aufgaben mit Lösungen aus Olympiaden Junger Mathematiker der DDR, Band I. Verlag Volk und Wissen, 1972

(11) Buch: Mathematische Olympiade-Aufgaben von Engel/Pirl, 1979, Aulis-Verlag