1. - 34. Olympiade - Klasse 9

Aufgaben

Gewidmet meinen Kindern Cosima, Elias und Adrian

Vorwort

Im vorliegenden Band befinden sich Texte vergangener Mathematikolympiaden, die ich vor einigen Jahren zum Üben gern selbst besessen hätte. Als Schüler träumte ich von einer kompletten Sammlung aller Aufgaben und Lösungen, allerdings wurde dieser Traum erst viele Jahre später wahr. Zu DDR-Zeiten war es äußerst schwer, an diese Dokumente zu gelangen, aber selbst jetzt gibt es nur wenig öffentlich zugängiges Material aus jener Zeit.

Die einst von der Aufgabenkommission erfundenen Texte wurden mir größtenteils von Herrn Umlauft zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm sehr danke. Ebenso möchte ich aber auch stellvertretend für all die Menschen, die zur Erweiterung meiner Sammlung beigetragen und mich bei meinem Unterfangen begleitet haben, folgende Namen nennen: O. Döhring, H. Thielemann, H. Winkelvoss, E. Specht, E. Keller, G. Thiel, B. Mulansky, H. Ocholt, M. Worel, R. Labahn, S. Ryl, H.-G. Gräbe.

Ein herzlicher Dank gilt meiner Familie, ganz besonders natürlich meinem Mann, der mir stets mit viel Verständnis für meine zeitraubenden Interessen zur Seite steht. Außerdem möchte ich meinen Eltern und Schwiegereltern danken, die sich immer wieder gern um die Kinder kümmern und mir damit kleine Freiräume verschaffen.

Copyright

Hinweise

Die Numerierung der Aufgaben erfolgt nach dem Schema: $jjkksa$, wobei jj der Aufgabenjahrgang, kk die Klassenstufe, s die Olympiadestufe und a die Aufgabennummer darstellt. Bei Wahlaufgaben folgt der Aufgabennummer noch ein A oder B.

Die Texte entsprechen den Originaltexten der jeweiligen Olympiaden - es wurden daher weder auf die neue deutsche Rechtschreibung Rücksicht genommen noch ideologische Phrasen umformuliert.

Dresden, 31. März 2014 *Manuela Kugel*

1. Mathematik-Olympiade 1961/62
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010911:
Berechnen Sie:

$$\left(\frac{9}{10}m^4 - 3\frac{211}{360}m^2 + 5\frac{1}{4}m - 4\frac{1}{2}\right) : \left(1\frac{1}{2}m^2 + 1\frac{2}{3}m - 6\right).$$

Aufgabe 010912:
In der Ballistik verwendet man häufig den Begriff "mittlere Präzision" p_m. Nimmt man p_m als Radius eines Kreises, dann liegen in diesem Kreis etwa 20 Prozent aller Treffer. Sämtliche Treffer erfaßt man mit einem Kreis, der einen etwa $4\frac{1}{2}$mal so großen Radius hat. Westliche Militärexperten rechnen z. Zt. mit einer mittleren Präzision (bei Raketen) von $p_\mathrm{m} = 0{,}5$ Prozent der Schußweite. Später wollen sie Werte von $p_\mathrm{m} = 0{,}1$ Prozent und in ferner Zukunft sogar $p_\mathrm{m} = 0{,}05$ Prozent erreichen.

a) Wie groß wäre bei diesen Werten der Radius des 20 Prozent-Kreises bzw. der des alle Treffer enthaltenden Kreises, wenn die Schußweite 12 500 km beträgt?

b) Welche mittlere Präzision p_m wurde von der Sowjetunion erreicht, wenn man berücksichtigt, daß der Radius des alle Treffer enthaltenden Kreises bei den im Oktober 1961 durchgeführten Versuchen kleiner als 1 km war?

Aufgabe 010913:
Um beim Zerspanen von Metallen die Schneidfähigkeit der Werkzeuge zu erhalten, wird vielfach mit einer Emulsion aus gefettetem Mineralöl (Dichte 0,98 g/cm^3) und möglichst weichem Wasser (Dichte 1,0 g/cm^3) gekühlt. Die Mischung muß für Schneidwerkzeuge höherer Festigkeit die Dichte 0,996 g/cm^3, bei Schleifarbeiten die Dichte 0,992 g/cm^3 haben. Wieviel Liter gefettetes Mineralöl und wieviel Liter weiches Wasser braucht man für jeweils 10 Liter Emulsion?

Aufgabe 010914:
Jeder Buchstabe entspricht einer der Ziffern von 0 bis 9, gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

```
 OTTO    MAIS    OTTO    MAIS    OTTO
-ROSE   -SALZ   -SALZ   -ROSE   -MAIS
 4709    2963    3497    4175     534
```

Aufgabe 010915:

Bei welchen Dreiecken liegen die Mitten der drei Höhen auf einer Geraden?

Die Behauptung ist zu beweisen!

Aufgabe 010916:

Schlagen Sie einen Kreis mit dem Radius $r = 3$ cm! Konstruieren Sie in diesen Kreis ein beliebiges Parallelogramm so, daß dessen Eckpunkte auf der Kreisperipherie liegen! Halbieren Sie die Seiten des Parallelogramms und verbinden Sie die Halbierungspunkte fortlaufend!

Wie groß ist der Umfang der so entstehenden Figur? Die Behauptung ist zu beweisen!

1. Mathematik-Olympiade 1961/62
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010921:

Von den gesamten Kohlenvorräten der Welt liegen etwa $\frac{3}{5}$ in der Sowjetunion, $\frac{2}{9}$ der Vorräte der UdSSR betragen die Kohlenvorräte der USA, während die restlichen Länder 5 Billionen Tonnen weniger als die UdSSR besitzen.

a) Wie groß sind die Kohlenvorräte der Sowjetunion und die der USA?

b) Wie groß sind die Vorräte der ganzen Welt?

Aufgabe 010922:

a) Ein Hanfseil von 15 mm Durchmesser verträgt eine Belastung von 175 kp, ohne zu reißen. Welcher Länge des Seiles entspricht diese Belastung, d. h. wann reißt das Seil unter seinem eigenen Gewicht, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 1 p wiegt?

b) Ein Dederonseil vom gleichen Querschnitt hält eine weitaus größere Belastung aus, nämlich 400 kp. Welcher Länge des Seils entspricht diese Belastung, wenn ein Seil von 1 m Länge je mm^2 Querschnitt 0,8 p wiegt?

Aufgabe 010923:

Man wähle zwei beliebige, aber verschiedene natürliche Zahlen und bilde ihre Summe, ihre Differenz und ihr Produkt.

Es ist zu beweisen, daß unter diesen drei Zahlen wenigstens eine durch 3 teilbar ist!

Aufgabe 010924:

Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist gleich 93 024. Wie heißen die Zahlen?

Aufgabe 010925:

Zeichnen Sie zwei ähnliche Dreiecke mit den Seiten a_1, b_1, c_1 bzw. a_2, b_2, c_2! Bilden Sie $a_1 + a_2$, $b_1 + b_2$ und $c_1 + c_2$! Konstruieren Sie mit diesen Strecken ein Dreieck! Ist es zu den ursprünglichen Dreiecken ähnlich? Beweisen Sie Ihre Behauptung: a) geometrisch, b) arithmetisch!

1. Mathematik-Olympiade 1961/62
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010931:

In den ersten $2\frac{1}{2}$ Jahren des Siebenjahrplans erzeugten die Stahlwerker der Sowjetunion insgesamt 113 Prozent der gesamten italienischen Stahlproduktion des Jahres 1959 über den Plan hinaus. Jährlich wurden dabei im Durchschnitt nur 310 000 t Stahl weniger zusätzlich produziert als in einem halben Jahr (1959) in Italien.

Wieviel Tonnen Stahl produzierten die Stahlwerker der Sowjetunion zusätzlich? Wieviel Tonnen Stahl wurde 1959 in Italien produziert?

Aufgabe 010932:

Kurt fährt mit der Straßenbahn eine lange gerade Straße entlang. Plötzlich sieht er seinen Freund auf gleicher Höhe in entgegengesetzter Richtung auf dieser Straße gehen. Nach einer Minute hält die Straßenbahn. Kurt steigt aus und läuft doppelt so schnell wie sein Freund, jedoch nur mit einem Viertel der Durchschnittsgeschwindigkeit der Straßenbahn hinter seinem Freund her.

Nach wieviel Minuten holt er ihn ein? Wie haben Sie das Ergebnis ermittelt?

Aufgabe 010933:

Es ist der Bruch zu finden, der gleich 0,4 ist und dessen Zähler und Nenner als Summe eine zweistellige Quadratzahl ergeben!

Wie haben Sie die Lösung gefunden?

Aufgabe 010934:

Gegeben seien ein Winkel mit dem Scheitelpunkt S sowie ein zwischen den Schenkeln dieses Winkels, aber nicht auf der Winkelhalbierenden liegender Punkt P.

Konstruieren Sie eine durch P verlaufende Gerade, die die Schenkel des Winkels in den Punkten A und B so schneidet, daß $\overline{PA} = \overline{PB}$ wird! Die Konstruktion ist zu begründen!

Aufgabe 010935:

In einem Abteil des Pannonia-Expreß sitzen sechs Fahrgäste, die in Berlin, Rostock, Schwerin, Erfurt, Cottbus und Suhl ihren Wohnsitz haben. Die Anfangsbuchstaben ihrer Namen sind A, B, C, D, E, und F (die Reihenfolge der Namen entspricht nicht der Reihenfolge der Wohnsitze). Aus Gesprächsfetzen entnehmen wir folgende Tatsachen:

(1) Zwei Fahrgäste, und zwar A und der Berliner, sind Ingenieure.

(2) Zwei Fahrgäste, und zwar E und der Rostocker, sind Dreher.

(3) Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Schweriner, sind Kranführer.

(4) B und F sind aktive Sportler, der Schweriner treibt nicht Sport.

(5) Der Fahrgast aus Cottbus ist älter als A, der Fahrgast aus Suhl ist jünger als C.

(6) Zwei Fahrgäste, und zwar B und der Berliner, wollen in Prag aussteigen. Zwei Fahrgäste, und zwar C und der Cottbusser, wollen bis Budapest fahren.

Welches sind die Namen, Berufe und Wohnsitze der einzelnen Fahrgäste?

2. Mathematik-Olympiade 1962/63
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020911:

Für die Lagerung des Erdöls wurden im Rostocker Ölhafen Rolltanks aus der Sowjetunion aufgestellt. Ein solcher Tank hat die Form eines Zylinders mit dem Durchmesser $d = 23$ m und der Höhe $h = 21$ m.

a) Berechnen Sie unter Vernachlässigung der Wanddicke das Volumen eines Tanks!

b) Wieviel Tonnen Erdöl faßt ein Rolltank (Dichte des Erdöls etwa 0,85 g/cm^3)?

c) Der in Leningrad für die DDR gebaute Tanker Leuna I hat ein Gesamtfassungsvermögen von 10 200 t Erdöl. Seine vier Pumpen besitzen eine Leistung von je 250 t/h. In welcher Zeit wird der Tanker von ihnen leergepumpt?

d) Wieviel Zeit wird benötigt, um mit Hilfe dieser Pumpen einen Rolltank zu füllen?

Aufgabe 020912:

Im VEB Uhren- und Maschinenfabrik „Klement Gottwald“ senkte eine Jugendabteilung die Ausschußquote um 6 Prozent der Produktionsmenge, und sparte dabei fast 800 Arbeitsstunden ein. Danach betrug die Ausschußquote nur noch $\frac{2}{5}$ ihres bisherigen Wertes. Gleichzeitig entstand ein ökonomischer Nutzen von 3 351,– M.

a) Wieviel Prozent der Produktionsmenge betrug der Ausschuß vorher?

b) Wieviel Prozent beträgt er jetzt?

c) Welchem Wert (in M) entspricht der Ausschuß jetzt noch?

Aufgabe 020913:

Es ist zu beweisen, daß ein Dreieck, bei dem zwei Seitenhalbierende gleich groß sind, stets gleichschenklig ist!

Aufgabe 020914:

Welche zweistelligen Zahlen xy haben ein Quadrat von der Form zxy (x, y und z sind eine der Ziffern 0 bis 9)?

Es ist zu beweisen, daß die Lösung vollständig ist!

Aufgabe 020915:

Gegeben ist ein Dreieck ABC und sein Umkreis. Man konstruiere die Tangenten in A und B. Ihr Schnittpunkt sei D. Nun ziehe man durch D die Parallele zu der Tangente in C. Die Verlängerungen der Seiten CA und CB schneiden diese Parallelen in A' bzw. B'.

Es ist zu beweisen, daß

a) die Dreiecke $AA'D$ und $DB'B$ gleichschenklig sind und

b) es einen Kreis gibt, der durch A, A', B, B' geht!

Aufgabe 020916:

Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

```
* * * * * * * * : * * * = * * * * *
  * * *
  -----
      * * * *
        * * *
      -------
        * * * *
        8 * * *
        -------
              0
```

2. Mathematik-Olympiade 1962/63
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020921:

Bei dem Gruppenflug der sowjetischen Kosmonauten Andrijan Nikolajew und Pawel Popowitsch hatten die Raumschiffe Wostok III und Wostok IV zeitweilig einen Abstand von nur 6,5 km voneinander. Der Einfachheit halber sei angenommen, daß sie genau hintereinander flogen. Dabei legten sie eine Erdumrundung (41 000 km) in rund 88 Minuten zurück.

Welchen Abstand müßten zwei mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h auf der Autobahn fahrende Autos haben, wenn ihr Zeitabstand der gleiche wie bei den Raumschiffen wäre?

Aufgabe 020922:

Ein Auto fährt mit einer Geschwindigkeit von 100 km/h. Es wird gebremst.

a) In welcher Zeit kommt es zum Stehen, wenn durch die Bremsung seine Geschwindigkeit in jeder Sekunde um 5 m/s abnimmt?

b) Welchen Bremsweg legt es in dieser Zeit zurück?

Aufgabe 020923:

Peter macht mit Jürgen eine Wette. Er will nach einem 10 000 Schritte entfernten Ort hin- und zurückgehen, bevor Jürgen 150 Murmeln in ein Körbchen gesammelt hat. Die Murmeln sollen dabei in einer Reihe mit je einem Schritt Abstand voneinander liegen und einzeln in das Körbchen gebracht werden, das in einem Schritt Abstand vor der ersten Murmel steht. Beide Jungen sollen genau gleich schnell gehen.

Wer gewinnt die Wette? Begründen Sie die Behauptung!

Aufgabe 020924:

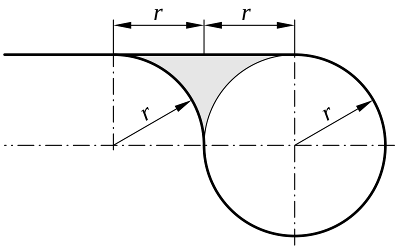
Gegeben sei ein Kreis. In diesem Kreis seien ein Trapez und ein Dreieck so einbeschrieben, daß eine Seite des Trapezes ein Durchmesser des Kreises ist und die Seiten des Dreiecks parallel zu den Trapezseiten verlaufen.

Es ist zu beweisen, daß Trapez und Dreieck in diesem Falle gleichen Flächeninhalt haben!

Aufgabe 020925:

Zeichnen Sie eine Gerade g und auf derselben Seite von g zwei Punkte A und B, die verschiedenen Abstand von g haben und deren Verbindungsstrecke verlängert die Gerade g nicht unter einem rechten Winkel schneidet! Konstruieren Sie auf g einen Punkt P, für den der Winkel zwischen AP und g gleich dem Winkel zwischen BP und g ist! Begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 020926:



An der Endstation einer Straßenbahnlinie soll eine Gleisschleife gebaut werden. Sie wird so angelegt, daß die gerade Strecke in einen Kreis mündet, dessen letztes Viertel als Gegenkurve zur geraden Strecke zurückführt.

a) Berechnen Sie die Gleislänge von Weichenspitze bis wieder zur Weichenspitze!

b) Wie groß ist das Flächenstück, das von der Schleife eingeschlossen wird?

2. Mathematik-Olympiade 1962/63
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020931:

Vermindert man die siebente Potenz einer positiven ganzen Zahl um diese Zahl, so ist die Differenz stets durch die Summe aus der 1., 2. und 3. Potenz dieser Zahl teilbar.

Aufgabe 020932:

Eine Aufgabe aus dem Jahre 1494:

Oben auf einem Baum, der 60 Ellen hoch ist, sitzt eine Maus, unten auf der Erde eine Katze. Die Maus klettert jeden Tag $\frac{1}{2}$ Elle herunter und in der Nacht wieder $\frac{1}{6}$ Elle in die Höhe. Die Katze klettert jeden Tag 1 Elle hinauf und in der Nacht $\frac{1}{4}$ hinunter.

Nach wieviel Tagen erreicht die Katze die Maus?

Aufgabe 020933:

Von einem Punkt P auf der Peripherie eines Kreises gehen zwei Sehnen aus, die einen Winkel von $135°$ miteinander bilden. Zwei weitere Sehnen, die ebenfalls von P ausgehen, zerlegen diesen Winkel in 3 Winkel von je $45°$.

Beweisen Sie, daß die 4 Endpunkte der Sehnen (außer P) die Eckpunkte eines Quadrates sind!

Aufgabe 020934:

Ein Schnellzug legt die 120 km lange Teilstrecke Leipzig–Riesa–Dresden mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 60 km/h zurück. Infolge Bauarbeiten muß der Zug während einiger Tage die erste Hälfte der Strecke (Leipzig–Bornitz) mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 km/h zurücklegen. Um den Zeitverlust möglichst wettzumachen, wird auf der zweiten Hälfte der Strecke (Bornitz–Dresden) die Durchschnittsgeschwindigkeit auf 70 km/h erhöht.

Kommt der Zug pünktlich in Dresden an?

Aufgabe 020935:

Über den Seiten a, b, c und d eines konvexen Vierecks, dessen Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, sind gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke mit den Flächeninhalten F_1, F_2, F_3 und F_4 in dieser Reihenfolge errichtet.

Beweisen Sie, daß $F_1 + F_3 = F_2 + F_4$ ist!

Aufgabe 020936:

In einem Schaufenster sind bunte, gleichgroße Bälle zu einer dreiseitigen regelmäßigen Pyramide aufgeschichtet. Die Bälle der untersten Schicht werden durch 3 verbundene Latten am Wegrollen gehindert. Die Bälle der anderen Schichten liegen jeweils in den Vertiefungen der darunter liegenden Schicht. In der untersten Schicht zählt man an jeder Seite 8 Bälle.

Wieviel Bälle liegen in den einzelnen Schichten und wieviel in der ganzen Pyramide?

3. Mathematik-Olympiade 1963/64
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030911:

Die erste Kosmonautin der Welt, Valentina Tereschkowa, startete mit ihrem Raumschiff Wostock 6 am 16. Juni 1963 um 10.30 Uhr und landete nach 48 Erdumkreisungen am 19. Juni 1963 um 9.20 Uhr. Die durchschnittliche Flughöhe betrug 200 km. (Mittlerer Erdradius $R = 6\,370$ km.)

a) Wieviel Kilometer legte die Kosmonautin auf ihrem Raumflug zurück? (Zur Vereinfachung sei angenommen, daß der Start- und Landeplatz übereinstimmten und der Flug auf einer Kreisbahn erfolgte.)

b) Wie groß war die durchschnittliche Geschwindigkeit während des Raumfluges?

Aufgabe 030912:

Wolfgang befindet sich in einem Zug, dessen Eigengeschwindigkeit er mit 60 km/h gemessen hat. Er will die Geschwindigkeit eines entgegenkommenden Doppelstock-Gliederzuges ermitteln. Er weiß, daß dieser Doppelstock-Gliederzug einschließlich Lokomotive rund 120 m lang ist, und stoppt die Zeit, die der Zug zur Vorbeifahrt benötigt, mit genau 3,0 s.

Mit welcher Geschwindigkeit fährt der Gegenzug?

Aufgabe 030913:

a) Konstruieren Sie ein Dreieck aus $a = 5{,}6$ cm, $r = 3{,}5$ cm (Radius des Umkreises) und $\gamma = 60°$!

b) Beschreiben Sie die Konstruktion!

c) Berechnen Sie den Abstand des Umkreismittelpunktes von der Seite a!

d) Untersuchen Sie, für welche Maße des Umkreisradius die Konstruktion eines Dreiecks mit $a = 5{,}6$ cm und $\gamma = 60°$ nicht möglich ist!

Aufgabe 030914:

Beweisen Sie, daß die Summe von 1 000 beliebigen, aber aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen keine Primzahl ist!

Aufgabe 030915:

Beweisen Sie den folgenden Satz:

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Katheten gleich der Summe der Durchmesser von Um- und Inkreis.

Aufgabe 030916:

a) Auf einem Kreisumfang liegen 5 verschiedene Punkte beliebig verteilt. Wieviel Strecken kann man einzeichnen, die je zwei Punkte miteinander verbinden?

b) Welche Anzahl von Strecken wird ermittelt, wenn 10 Punkte auf dem Kreisumfang liegen?

c) Die Anzahl der Punkte sei n. Wieviel Strecken lassen sich einzeichnen? (Begründung!)

3. Mathematik-Olympiade 1963/64
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030921:

Von einem Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD sind gegeben:

$$\overline{AB} = 6\text{ cm}, \quad \overline{BC} = 4\text{ cm}, \quad \overline{CD} = 4{,}5\text{ cm}, \quad \overline{DA} = 3\text{ cm}.$$

Konstruieren Sie das Trapez und begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 030922:

Bei einem Preisschießen hat ein Schütze mit 5 Schuß auf einer Zehner-Ringscheibe 40 Ringe erzielt. Bei jedem Schuß hat er mindestens 7 Ringe getroffen.

Wieviele Möglichkeiten gibt es für die bei den einzelnen Schüssen erzielten Ringe?

Anmerkung: Die Reihenfolge ist zu berücksichtigen. So gelten z. B. 7, 7, 7, 9, 10 und 7, 7, 7, 10, 9 als verschiedene Möglichkeiten.

Aufgabe 030923:

Einem spitzwinkligen Dreieck ABC soll ein gleichseitiges Dreieck so einbeschrieben werden, daß eine seiner Seiten parallel zur Seite BC verläuft und die Eckpunkte des einbeschriebenen Dreiecks auf den Seiten des Dreiecks ABC liegen.

Begründen Sie die Konstruktion!

Aufgabe 030924:

Geben Sie alle Paare reeller Zahlen an, deren Summe, Produkt und Quotient untereinander gleich sind!

Aufgabe 030925:

a) Wie müssen 1 023 Kugeln auf 10 Säckchen verteilt werden, damit man jede Anzahl von 1 bis 1 023 Kugeln zusammenstellen kann, ohne ein Säckchen zu öffnen.

b) Wieviel Säckchen werden mindestens benötigt, damit man jede Anzahl von 1 bis 3 000 Kugeln zusammenstellen kann?

3. Mathematik-Olympiade 1963/64
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030931:

Gesucht sind alle aus verschiedenen Ziffern bestehenden dreistelligen Zahlen, bei denen die Summe aller aus je zwei ihrer Ziffern zu bildenden zweistelligen Zahlen gleich dem Doppelten der Zahl ist.

Aufgabe 030932:

Jeder von vier Kreisen in einer Ebene habe mit den drei anderen genau je einen Punkt gemeinsam. Drei von ihnen haben den gleichen Radius r.

a) Führen Sie die Konstruktion durch ($r = 3$ cm) und geben Sie eine Konstruktionsbeschreibung!

b) Berechnen Sie den Radius des vierten Kreises (Fallunterscheidungen)!

Aufgabe 030933:

Welche Punkte $P(x; 0)$ sind von dem Punkt $P_1(a; 0)$ doppelt so weit entfernt wie von $P_2(b; 0)$?

Bestimmen Sie die Abszissen dieser Punkte! ($b > a$)

Aufgabe 030934:

Das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist 110 355 024.

Wie lauten die Zahlen? Der Lösungsweg ist ausführlich zu begründen!

Aufgabe 030935:

Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn in einem Trapez die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen, so ist die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Quadrat der Summe der Grundseiten (Parallelseiten).

Aufgabe 030936:

Bei einem Spiel verstecken drei Schülerinnen Anna, Brigitte und Claudia in ihren Handtaschen je einen Gegenstand, und zwar einen Ball, einen Bleistift und eine Schere. Dieter soll feststellen, wer den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere hat.

Auf seine Fragen erhält er folgende Antworten, von denen verabredungsgemäß nur eine wahr, die beiden anderen aber falsch sind:

(1) Anna hat den Ball.

(2) Brigitte hat den Ball nicht.

(3) Claudia hat die Schere nicht.

Wer hat den Ball, wer den Bleistift und wer die Schere?

4. Mathematik-Olympiade 1964/65
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040911:

Martina stellt ihrer Freundin in einem Jahr, das kein Schaltjahr ist, folgende Aufgabe:

"Wenn man zur Hälfte der Zahl der bis heute verflossenen Tage dieses Jahres ein Drittel der Zahl der restlichen Tage des Jahres addiert, erhält man die Zahl der verflossenen Tage. Den heutigen Tag habe ich zu den verflossenen gezählt."

Geben Sie das Datum (Tag und Monat) an, an dem das geschieht!

Aufgabe 040912:

Beim Schulsportfest hatten sich Christian (C), Bernd (B), Alfred (A) und Dieter (D) für den Endlauf über 100 m qualifiziert. Auf Grund der Vorlaufzeiten rechnete man mit einem Einlauf ins Ziel in der Reihenfolge CBAD. Damit hatte man aber weder den Platz eines Läufers noch ein Paar direkt aufeinanderfolgender Läufer richtig vermutet. Der Sportlehrer erwartete die Reihenfolge ADBC. Das war gut geschätzt; denn es kamen zwei Läufer auf den erwarteten Plätzen ein.

In welcher Reihenfolge gingen die Läufer ins Ziel?

Aufgabe 040913:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Hypotenuse $\overline{AB}$ 25 mm und dessen Kathete $\overline{BC}$ 20 mm lang ist. Auf dieser Kathete wird die Strecke $\overline{BD}$ von der Länge 15 mm abgetragen, und vom Punkt D aus wird das Lot $\overline{DE}$ auf die Hypotenuse gefällt.

Berechnen Sie den Umfang des Dreiecks BDE!

Aufgabe 040914:

Von den natürlichen Zahlen p und q ist bekannt, daß $0 < p < q$ gilt.

a) Ordnen Sie die Zahlen 1, $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ der Größe nach! Beginnen Sie mit der kleinsten Zahl!

b) Stellen Sie fest, welche der beiden Zahlen $\frac{p}{q}$ und $\frac{q}{p}$ näher an 1 liegt!

Aufgabe 040915:

In den Eckpunkten eines Sehnenvierecks werden an den Umkreis die Tangenten gezeichnet.

a) Beweisen Sie, daß das so entstandene Tangentenviereck ein Rhombus ist, wenn das Sehnenviereck ein Rechteck ist!

b) Gilt die Umkehrung dieser Aussage ebenfalls?

Aufgabe 040916:

Setzt man vor eine beliebige dreistellige Zahl ihr Doppeltes, so entsteht eine sechs- oder siebenstellige Zahl, die durch 23 und 29 teilbar ist.

Ist diese Aussage richtig?

4. Mathematik-Olympiade 1964/65
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040921:

In einer Abteilung eines Werkes soll ein neues, zeisparendes Arbeitsverfahren eingeführt werden. Wenn 4 Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten, erhöht sich die Produktion um 20 Prozent. Wenn 60 Prozent der Arbeiter der Abteilung dieses Verfahren anwenden, kann die Produktion auf das Zweieinhalbfache gesteigert werden.

a) Wieviel Arbeiter hat die Abteilung?

b) Auf wieviel Prozent würde sich die Produktion erhöhen, wenn alle Arbeiter der Abteilung nach diesem Verfahren arbeiten würden? (Alle Arbeiter der Abteilung führen die gleiche Tätigkeit aus.)

Aufgabe 040922:

Der ungarische Rechenkünstler Pataki berechnet das Produkt $95 \cdot 97$ auf folgende Weise:

(1) Er addiert die Faktoren. $95 + 97 = 192$

(2) Er streicht die erste Stelle der Summe. 92

(3) Er bildet die Differenz jedes der beiden Faktoren und der Zahl 100 und multipliziert diese beiden Zahlen miteinander. $5 \cdot 3 = 15$

(4) Er schreibt das Ergebnis von (3) hinter das Ergebnis von (2) und erhält 9215.

Untersuchen Sie, ob dieses Verfahren für alle Faktoren zwischen 90 und 100 gültig ist!

Aufgabe 040923:

Gegeben sind drei verschiedene, nicht auf einer Geraden liegende Punkte. Um jeden dieser Punkte ist ein Kreis so zu konstruieren, daß sich diese Kreise paarweise außen berühren.

Aufgabe 040924:

Jutta, Günter und Klaus nehmen an der zweiten Stufe der Mathematikolympiade teil.

(1) Sie arbeiten (nicht notwendig in dieser Reihenfolge) in den Räumen 48, 49, 50.

(2) Jutta und Günter sind gleichaltrig, Klaus ist ein Jahr älter als Jutta.

(3) Ihre drei Mathematiklehrer, Herr Adler, Herr Bär und Herr Drossel, führen in diesen drei Räumen während der Arbeit Aufsicht, keiner jedoch in dem Raum, in dem sein Schüler arbeitet.

(4) Herr Bär hat den gleichen Vornamen wie sein Schüler.

(5) Die Nummer des Raumes, in dem Herr Drossel Aufsicht führt, entspricht dem Eineinhalbfachen seines Alters.

(6) Günters Raum hat eine höhere Nummer als der von Klaus.

(7) Die drei Schüler sind zusammen gerade so alt, wie die Nummer des Raumes angibt, in dem Jutta arbeitet.

(8) Jutta kennt Herrn Drossel nicht.

Welchen Vornamen hat Herr Bär? In welchem Raum führt er Aufsicht? (Bei der Altersangabe sind nur die vollen Jahre berücksichtigt worden.)

4. Mathematik-Olympiade 1964/65
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040931:

Zwei Betriebe A und B übernahmen die Herstellung von Ersatzteilen für Traktoren. Die Arbeit sollte in 12 Tagen ausgeführt werden. Zwei Tage nach dem Beginn der Arbeiten, die in beiden Betrieben gleichzeitig begannen, wurden im Werk A umfangreiche Reparaturen durchgeführt, so daß es für die Fortführung der Arbeiten ausfiel.

In wieviel Tagen kann das Werk B allein den Auftrag abschließen, wenn seine Kapazität $66\frac{2}{3}\%$ von der des Werkes A beträgt.

Aufgabe 040932:

Die Glieder der folgenden Summe sind nach einer bestimmten Gesetzmäßigkeit gebildet.

Suchen Sie diese Gesetzmäßigkeit, und berechnen Sie x möglichst einfach!

$$x = \frac{6}{5\cdot 7} + \frac{6}{7\cdot 9} + \frac{6}{9\cdot 11} + \frac{6}{11\cdot 13} + ... + \frac{6}{31\cdot 33}$$

Aufgabe 040933:

Konstruieren Sie zu einem gegebenen Halbkreis mit dem Radius r das einbeschriebene Quadrat!

Aufgabe 040934:

Ist die folgende Aussage richtig?

Vermehrt man das Produkt von vier beliebigen unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man eine Quadratzahl.

Aufgabe 040935:

Bei einem Rätselnachmittag wird dem besten Jungen Mathematiker der Klasse die Aufgabe gestellt, eine bestimmte reelle Zahl zu erraten. Dazu werden von seinen Mitschülern nacheinander Eigenschaften dieser Zahl genannt:

Klaus:	"Die Zahl ist durch 4 ohne Rest teilbar."
Inge:	"Die Zahl ist der Radius eines Kreises, dessen Umfang die Länge 2 hat."
Günter:	"Die Zahl ist kleiner als 3."
Monika:	"Die Zahl ist die Länge der Diagonalen eines Quadrates, dessen Seite die Länge 2 hat."
Bärbel:	"Die Zahl ist irrational."
Peter:	"Die Zahl ist der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite die Länge 2 hat."

Ferner erfährt er, daß von den Schülern Klaus und Inge, Günter und Monika sowie Bärbel und Peter jeweils genau einer die Wahrheit gesagt hat.

Wie heißt die Zahl?

Aufgabe 040936:

Auf die Flächen eines Würfels sind Pyramiden aufgesetzt, deren Grundflächen den Flächen des Würfels kongruent sind und deren Seitenflächen mit der Grundfläche Winkel von 45° bilden.

a) Wieviel Flächen hat der neue Körper, und welche Form haben diese Flächen?

b) Geben Sie das Volumen des zusammengesetzten Körpers als Funktion der Würfelkante a an!

5. Mathematik-Olympiade 1965/66
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050911:

Ein Dreher braucht zur Anfertigung eines bestimmten Werkstücks eine halbe Stunde. Da mehrere gleiche Teile anzufertigen sind, überlegt er, ob er eine Vorrichtung bauen soll, die es erlaubt, jedes solche Werkstück in 20 Minuten anzufertigen. Die Herstellung dieser Vorrichtung würde 4 Stunden dauern.

Wie groß müßte die Zahl der herzustellenden Werkstücke mindestens sein, damit der Bau der Vorrichtung eine Zeitersparnis bringen würde?

Aufgabe 050912:

Es ist zu beweisen, daß 77 Telefone nicht so miteinander verbunden werden können, daß jedes mit genau 15 anderen verbunden ist.

Aufgabe 050913:

Vergleichen Sie die beiden Zahlen!

$$A = \frac{5\,678\,901\,234}{6\,789\,012\,345} \quad \text{und} \quad B = \frac{5\,678\,901\,235}{6\,789\,012\,347}$$

Aufgabe 050914:

Beweisen Sie folgenden Satz:

Der Flächeninhalt jedes Dreiecks ist gleich dem Produkt der Seiten dieses Dreiecks dividiert durch den vierfachen Umkreisradius des Dreiecks.

5. Mathematik-Olympiade 1965/66
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050921:

Man ermittle sämtliche rationalen Zahlen a und b, für die $(a+b)^3 = a^3 + b^3$ gilt.

Aufgabe 050922:

28 Schüler einer Klasse beteiligten sich an einem Sportfest. Jeder nimmt an mindestens einer der drei Disziplinen Kugelstoßen, Weitsprung und 100-m-Lauf teil. Die Anzahl derjenigen, die sowohl am Kugelstoßen als auch am Weitsprung, aber nicht am 100-m-Lauf teilnehmen, ist gleich der Zahl derer, die nur am Kugelstoßen beteiligt sind, und größer als 1. Kein Teilnehmer tritt nur im Weitsprung oder nur im 100-m-Lauf an.

Sechs Schüler starten in den beiden Disziplinen Kugelstoßen und 100-m-Lauf und nehmen nicht am Weitsprung teil. Die Anzahl derjenigen, die sowohl beim Weitsprung als auch beim 100-m-Lauf starten, ist fünfmal so groß wie die Anzahl derer, die in allen drei Disziplinen starten. Die Anzahl derjenigen, die in allen drei Disziplinen teilnehmen, ist gerade, aber nicht Null.

Wieviel Schüler treten insgesamt in den einzelnen der drei Disziplinen an?

Aufgabe 050923:

Ein Bruder sagt zu seiner Schwester:

"Als Tante Katja so alt war, wie wir beide zusammen jetzt sind, warst du so alt, wie ich jetzt bin. Aber als Tante Katja so alt war, wie du jetzt bist, da warst du... ."

a) Wie alt war da die Schwester?

b) Wievielmal so alt wie die Schwester ist Tante Katja jetzt?

Aufgabe 050924:

In einer Ebene ϵ ist ein Rechteck $ABCD$ gegeben. P sei ein beliebiger Punkt auf der Senkrechten zur Ebene ϵ durch A.

Es ist zu beweisen, daß die Punkte A, B, D auf der Kugel mit dem Durchmesser $\overline{PC}$ liegen.

5. Mathematik-Olympiade 1965/66
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050931:
Beweisen Sie die folgende Behauptung!

Jede nicht durch 9 teilbare (ganzzahlige) Quadratzahl läßt bei Division durch 3 den Rest 1.

Aufgabe 050932:

a) Konstruieren Sie das Dreieck ΔABC, wenn α, a und s_c gegeben sind! Dabei bedeutet α das Maß des Winkels $\sphericalangle CAB$, a die Länge der Seite BC und s_c die Länge der Seitenhalbierenden CD, wobei D der Mittelpunkt der Seite AB ist.

b) Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Aufgabe 050933:
Die positive ganze Zahl x ende auf die Ziffern a und b (in dieser Reihenfolge).

Man ermittle alle geordneten Paare (a, b), für die x^2 auf dieselben Ziffern a und b (auch in bezug auf die Reihenfolge) endet!

Aufgabe 050934:
Man ermittle für die reellen Zahlen a und b, $a \neq 0$, die dem Betrag nach kleinere Lösung der Gleichung

$$x^2 + 2ax - b^2 = 0.$$

Aufgabe 050935:
In dem Parallelogramm $ABCD$ sei $\overline{AB} = \overline{CD} = a$, $\overline{BC} = \overline{AD} = b$, $(a > b)$ und $\overline{AE} = h_a$, wobei E der Fußpunkt des vom Punkt A des auf die Seite CD bzw. ihre Verlängerung gefällten Lotes ist. Ferner sei eine Kreisscheibe mit einem Radius der Länge r gegeben. Der Mittelpunkt der Kreisscheibe durchlaufe sämtliche Seiten des Parallelogramms.

Berechnen Sie den Inhalt der Fläche F, die von der Kreisscheibe überstrichen wird!

Aufgabe 050936:
Eine Mutter stellt ihren drei Kindern Jürgen, Renate und Christine eine Schüssel mit Kirschen auf den Tisch mit dem Bemerken, daß sich jeder nach der Rückkehr ein Drittel der Kirschen nehmen möge.

Jürgen, der als erster nach Hause kommt, nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch 3 teilbar ist, zunächst eine Kirsche und dann von den Restlichen den dritten Teil.

Als Renate heimkommt, meint sie, die erste zu sein. Sie nimmt sich, da die Zahl der Kirschen nicht durch drei teilbar ist, zunächst zwei Kirschen und von den Übrigen den dritten Teil.

Auch Christine glaubt, als sie heimkehrt, erste zu sein, und nimmt sich den dritten Teil der in der Schüssel befindlichen Kirschen.

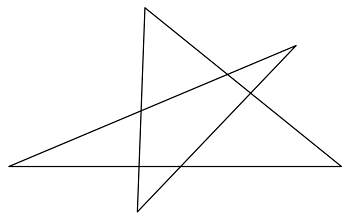
Die Mutter stellt danach fest, das insgesamt 42 Kirschen gegessen wurden. Wieviel Kirschen waren anfangs in der Schüssel?

6. Mathematik-Olympiade 1966/67
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060911:

Ermitteln Sie ohne Messung die Summe der Größen der Innenwinkel an den fünf Spitzen des in der Abb. dargestellten fünfzackigen Sternes.



Aufgabe 060912:

Bildet man von einer natürlichen Zahl die Quersumme und von dieser (wenn möglich) wieder die Quersumme usw., so erhält man schließlich eine einstellige Zahl, die wir die "letzte Quersumme" nennen wollen. Dabei wird die Quersumme einer einstelligen Zahl nach Definition der Zahl gleichgesetzt.

Berechnen Sie, wie viel natürliche Zahlen von 1 bis 1000 die "letzte Quersumme" 9 haben!

Aufgabe 060913:

In einem Viereck $ABCD$ wird die Seite AB über B hinaus bis zum Punkt E so verlängert, daß $\overline{BE} = \overline{AB}$ ist.

Von jeder der folgenden Bedingungen ist zu untersuchen, ob sie dafür notwendig ist, daß der Winkel $\sphericalangle ACE$ ein rechter Winkel ist.

Das Viereck $ABCD$ hat

a) vier kongruente Winkel,

b) vier kongruente Seiten,

c) zwei Paare kongruenter Seiten,

d) zwei kongruente Seiten mit gemeinsamen Eckpunkt,

e) zwei kongruente Winkel.

Aufgabe 060914:

Bei einem Schachturnier mit 8 Teilnehmern spielte jeder gegen jeden genau eine Partie. Am Ende des Turniers haben alle Teilnehmer verschiedene Punktzahlen erzielt. Der Spieler auf dem zweiten Platz hat genau so viele Punkte gewonnen wie die letzten vier zusammen. Dabei erhielt man für einen Sieg 1 Punkt, für jedes Unentschieden $\frac{1}{2}$ Punkt und für eine Niederlage keinen Punkt.

Wie endete die Partie zwischen den Spielern, die den 4. bzw. 6. Platz belegten?

6. Mathematik-Olympiade 1966/67
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060921:

Geben Sie vier verschiedene Paare (a, b) positiver, ganzer Zahlen an, so daß die Differenz der Quadrate der beiden Zahlen jedes Paares 105 beträgt!

(Je zwei Paare (a, b) und (b, a) gelten dabei als nicht verschieden voneinander.)

Aufgabe 060922:

Innerhalb eines Kreises k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius von der Länge r liege der von M verschiedene Punkt P.

Konstruieren Sie unter allen Sehnen durch P die kürzeste!

Aufgabe 060923:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

> Die Diagonalen des ebenen konvexen Vierecks $ABCD$ schneiden einander genau dann rechtwinklig, wenn $a^2 + c^2 = b^2 + d^2$ gilt, wobei a, b, c und d die Seitenlängen des Vierecks sind.

Aufgabe 060924:

Die Schülerinnen Brigitte, Christina, Dorothea, Eva, Inge und Monika und die Schüler Anton, Fred, Günter, Helmut, Jürgen und Kurt einer Laienspielgruppe wollen einen Tanz aufführen. Dabei wird zu Paaren getanzt.

(1) In keinem Paar soll der männliche Partner kleiner als der weibliche sein.

Außerdem haben einige Teilnehmer noch verschiedene Wünsche:

(2) Christina möchte nicht mit Anton tanzen, der kleiner als Brigitte ist.

(3) Jürgen möchte nur mit Dorothea oder Monika tanzen.

(4) Fred, der größer als Helmut, aber kleiner als Anton ist, möchte nur mit Eva oder Monika tanzen.

(5) Kurt, der weiß, daß Eva größer als Anton ist, versucht, eine Einteilung zu finden, die allen Wünschen gerecht wird.

Geben Sie alle Möglichkeiten der Zusammenstellung dieser Schüler zu Tanzpaaren an, die die genannten Wünsche und Bedingung (1) erfüllen!

Die Aufgabe ist dahingehend zu verstehen, daß sämtliche Zusammenstellungen zu Tanzpaaren angegeben werden sollen, die auf Grund der Angaben nicht als unverträglich mit einer oder mehreren der gestellten Bedingungen (1) bis (5) ausgeschlossen werden müssen.

6. Mathematik-Olympiade 1966/67
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060931:

Zwei Primzahlen p_1 und p_2 (mit $p_1 > p_2$) heißen Primzahlzwillinge, wenn $p_1 - p_2 = 2$ gilt.

Beweisen Sie, daß für alle Primzahlzwillinge p_1 und p_2, für die $p_2 > 3$ ist, stets die Summe $p_1 + p_2$ durch 12 teilbar ist!

Aufgabe 060932:

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

Sind bei einem (nicht notwendigerweise regelmäßigen) Tetraeder $ABCD$ die Umfänge aller seiner vier Seitenflächen untereinander gleich, dann sind diese Flächen zueinander kongruent.

Aufgabe 060933:

Beweisen Sie die folgende Behauptung:

In keinem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Hypotenuse kleiner als das $\frac{1}{\sqrt{2}}$fache der Summe der Kathetenlängen.

Aufgabe 060934:

Zeigen Sie, daß es unter allen Zahlen der Form $2p + 1$, wobei p eine Primzahl ist, genau eine Kubikzahl gibt!

Aufgabe 060935:

Auf dem Kreis k bewegen sich der Punkt A mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_1 und der Punkt B mit der gleichförmigen Geschwindigkeit v_2, wobei $v_1 \neq v_2$ ist.

Bewegen sich beide Punkte im gleichen Umlaufsinn (etwa im Uhrzeigersinn), so überholt der Punkt A den Punkt B jeweils nach 56 min. Bewegen sich beide Punkte in verschiedenem Umlaufsinn, so begegnen sie einander jeweils nach 8 min. Dabei verringert bzw. vergrößert sich ihr auf der Kreislinie gemessener Abstand voneinander in je 24 s um 14 m.

a) Wie lang ist der Kreisumfang?

b) Wie groß sind die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 (in m/min)?

Aufgabe 060936:

In einer Ebene sind ein Kreis k, eine Gerade g sowie ein Punkt A auf g gegeben.

Man konstruiere einen Kreis k', der erstens k berührt und zweitens g in A berührt. Man untersuche, wie viele solcher Kreise k' es bei den verschiedenen Lagemöglichkeiten von k, g und A geben kann.

7. Mathematik-Olympiade 1967/68
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070911:

Gegeben sei ein beliebiges konvexes Viereck.

Konstruieren Sie ein Parallelogramm, das die folgenden Bedingungen erfüllt!

(1) Je zwei gegenüberliegende Seiten des Parallelogramms sind parallel zu einer Diagonalen des Vierecks, und jede von ihnen ist halb so lang wie diese.

(2) Die Eckpunkte des Parallelogramms liegen auf den Seiten des Vierecks.

Aufgabe 070912:

Es ist x eine (im Dezimalsystem) sechsstellige Zahl, die mit der Ziffer 5 endet. Setzt man diese Ziffer von der sechsten an die erste Stelle, also vor die unverändert gebliebenen fünf übrigen Ziffern, so erhält man eine sechsstellige Zahl, die viermal so groß ist wie x.

Wie lautet die Zahl im Dezimalsystem?

Aufgabe 070913:

Für jede ganze Zahl $n \geq 3$ ist die größtmögliche Anzahl von rechten Winkeln zu ermitteln, die ein konvexes n-Eck haben kann.

Aufgabe 070914:

Vier Mannschaften A, B, C und D tragen ein Fußballturnier aus. Dabei spielt jede Mannschaft genau einmal gegen jede andere, und es werden den einzelnen Mannschaften für ein gewonnenes, unentschieden ausgegangenes bzw. verlorenes Spiel 2, 1 bzw. 0 "Pluspunkte" gegeben.

Am Tag nach dem Abschluß des Turniers hört Peter den Schluß einer Radiomeldung: "...Vierter wurde die Mannschaft D. Damit erhielten keine zwei Mannschaften gleiche Punktzahl. Das Spiel A gegen B endete als einziges unentschieden."

Peter ist enttäuscht, daß seine Lieblingsmannschaft in diesem Teil der Meldung überhaupt nicht erwähnt wurde. Dennoch kann er aus den gehörten Angaben und der Kenntnis des Austragungsmodus nicht nur die Plazierung, sondern auch den Punktstand dieser Mannschaft ermitteln.

Wie ist das möglich?

7. Mathematik-Olympiade 1967/68
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070921:
Man ermittle die Anzahl aller Paare zweistelliger natürlicher Zahlen (m, n), für die $m + n = 111$ gilt.

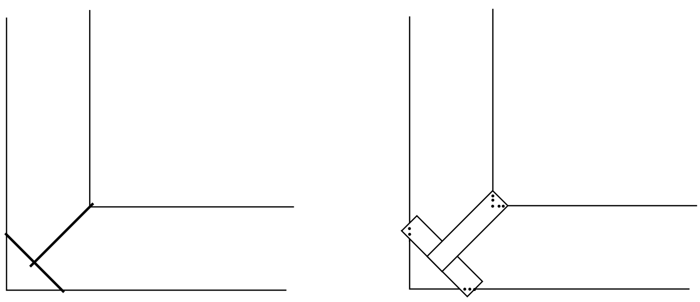
Aufgabe 070922:
Für zwei rationale Zahlen a und b gelten die vier Ungleichungen

$$a + b \neq 3; \qquad a - b \neq 10; \qquad a \cdot b \neq 5; \qquad a : b \neq 18,75.$$

Die Zahlen 3; 10; 5 und 18,75 stimmen jedoch (in anderer Reihenfolge) mit je einer der Zahlen $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ und $a : b$ überein.

Ermitteln Sie die Zahlen a und b!

Aufgabe 070923:
In einer alten Denksportaufgabe soll man einen Graben, der überall gleich breit ist und einen rechtwinkligen Knick macht, mit Hilfe von zwei Bohlen überqueren, die genau so lang sind, wie der Graben breit ist. Die gesuchte Lösung (ohne Berücksichtigung der Breite der Bretter) ist die in der Abbildung gezeichnete.



a) Zeigen Sie durch eine Rechnung, daß diese Lösung richtig ist!

b) Die Breite des Grabens und die Länge der Bohlen sei a, die Breite der Bohlen sei b. Welchen Wert hat das Verhältnis $b : a$, wenn die Bretter die in der Abbildung gezeigte Lage haben?

(Ein Durchbiegen der Bohlen und eine bedingte Tragfähigkeit des Grabenrandes sollen nicht berücksichtigt werden.)

Aufgabe 070924:
Einem regelmäßigen Oktaeder ist eine Kugel umschrieben.

Berechnen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte beider Figuren!

7. Mathematik-Olympiade 1967/68
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070931:
Es sind ohne Benutzung der Zahlentafel alle vierstelligen Quadratzahlen zu ermitteln, deren erste zwei und letzte zwei Grundziffern jeweils gleich sind.

Aufgabe 070932:
Auf einem (rechtwinkligen) Billardtisch $ABCD$ befindet sich im Punkt P eine Kugel.

Nach welchem Punkt von AB muß diese gestoßen werden, damit sie erst der Reihe nach genau je einmal an den Seiten AB, BC, CD und DA des Tisches reflektiert wird und dann genau wieder im Punkt P eintrifft?

Aufgabe 070933:
Man denke sich die natürlichen Zahlen von 1 bis 100, aufsteigend der Größe nach geordnet, angeschrieben. Die dabei insgesamt aufgeschriebenen Ziffern denke man sich in unveränderter Reihenfolge zur Ziffernfolge der hiermit erklärten Zahl

$$1234567891011121314...979899100$$

zusammengestellt. Aus ihr sollen genau 100 Ziffern so gestrichen werden, daß die restlichen Ziffern in gleicher Reihenfolge eine möglichst große Zahl bilden.

Wie lautet diese?

Aufgabe 070934:
Man ermittle alle geordneten Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen a, b und c, für die $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ gilt.

Zwei Tripel (a_1, b_1, c_1) und (a_2, b_2, c_2) heißen dabei genau dann gleich, wenn $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$ und $c_1 = c_2$ ist.

Aufgabe 070935:
Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen a, b und c bekannt.

Berechnen Sie die Länge s_c der Seitenhalbierenden der Seite AB!

Aufgabe 070936:
Man ermittle alle reellen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{3}{2x-1} - \frac{2}{x-\frac{1}{2}} > -\frac{1}{3} \quad \text{erfüllen.}$$

8. Mathematik-Olympiade 1968/69
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

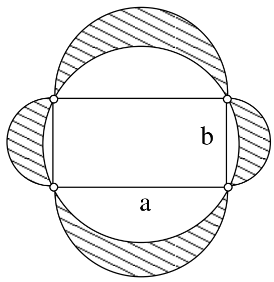
Aufgabe 080911:

Eine FDJ-Versammlung wurde so stark besucht, daß genau 75 Prozent der FDJler Platz fanden. Daher wurde beschlossen, eine zweite Versammlung in einem anderen Raum zu veranstalten. Es gingen 150 der Jugendfreunde dorthin. Die übrigen blieben im ersten Raum. Dadurch wurden in diesem genau 5 Plätze frei.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Jugendfreunde, die zu der ursprünglich angesetzten Veranstaltung erschienen waren!

Aufgabe 080912:

Gegeben sei ein Rechteck mit den Seitenlängen a und b. Über jeder Seite werde außerhalb des Rechtecks ein Halbkreis gezeichnet. Ferner konstruiere man den Umkreis des Rechtecks (siehe Abbildung).



Berechnen Sie die Summe der Flächeninhalte der vier schraffierten sichelförmigen Flächen!

Aufgabe 080913:

Konstruieren Sie ein Trapez aus a, b, c und d!

Dabei seien a die Länge der Seite AB, b die Länge der Seite BC, c die Länge der Seite CD und d die Länge der Seite DA. Weiterhin soll $AB \parallel CD$ und $a > c$ gelten.

Aufgabe 080914:

In

$$\begin{array}{cccccc}
1 & * & * & \cdot & * & * \\
\hline
 & * & * & * & 1 & \\
 & & * & * & * & 1 \\
\hline
 & * & * & * & 1 & *
\end{array}$$

sind die Sternchen durch (nicht notwendig einander gleiche) Ziffern so zu ersetzen, daß eine richtig gelöste Multiplikationsaufgabe entsteht.

Geben Sie alle Möglichkeiten hierfür an!

8. Mathematik-Olympiade 1968/69
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080921:
Gesucht werden fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, deren jede größer als 1 ist und von denen die kleinste durch 2 und die nächstfolgenden der Reihe nach durch 3, durch 4, durch 5 und durch 6 teilbar sein sollen.

a) Nennen Sie ein Beispiel für fünf derartige Zahlen!

b) Wie kann man alle Lösungen der Aufgabe erhalten?

Aufgabe 080922:
Von einem Dreieck ΔABC seien die Längen zweier Seiten und die Länge der Winkelhalbierenden des von diesen beiden Seiten eingeschlossenen Winkels bekannt.

Berechnen Sie die Länge derjenigen Sehne des Umkreises des Dreiecks, die durch Verlängerung der erwähnten Winkelhalbierenden entsteht!

Aufgabe 080923:
Geben Sie alle Paare (x, y) natürlicher Zahlen an, für die $x^3 - y^3 = 999$ ist!

Aufgabe 080924:
Vier Personen A, B, C und D machen je drei Angaben über eine gleiche Zahl x. Nach Vereinbarung soll bei jedem mindestens eine Angabe wahr und mindestens eine Angabe falsch sein.

A sagt:

(1) Das Reziproke von x ist nicht kleiner als 1.
(2) x enthält in der dekadischen Darstellung keine 6.
(3) Die 3. Potenz von x ist kleiner als 221.

B sagt:

(1) x ist eine gerade Zahl.
(2) x ist eine Primzahl.
(3) x ist ein ganzzahliges Vielfaches von 5.

C sagt:

(1) x ist irrational.
(2) x ist kleiner als 6.
(3) x ist Quadrat einer natürlichen Zahl.

D sagt:

(1) x ist größer als 20.
(2) x ist eine positive ganze Zahl, deren dekadische Darstellung mindestens 3 Stellen enthält.
(3) x ist nicht kleiner als 10.

Ermitteln Sie x!

8. Mathematik-Olympiade 1968/69
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080931:

Marlies erklärt Claus-Peter ein Verfahren, nach dem man, wie sie meint, die Quadrate der natürlichen Zahlen von 26 bis 50 leicht ermitteln kann, wenn man die Quadrate der natürlichen Zahlen bis 25 auswendig weiß.

> ”Wenn du beispielsweise das Quadrat von 42 berechnen willst, dann bildest du die Ergänzung dieser Zahl bis 50 und quadrierst sie. Das wäre in diesem Falle 64. Davor setzt du die Differenz zwischen deiner Zahl und 25, in deinem Falle also 17. Die so gebildete Zahl, hier also 1 764, ist bereits das gesuchte Quadrat von 42.”

Prüfen Sie die Richtigkeit dieses Verfahrens für alle Zahlen des angegebenen Bereichs!

Aufgabe 080932:

Konstruieren Sie ein Dreieck ΔABC aus a, $b+c$ und α!

Dabei sind a, b, c die Längen der Dreiecksseiten und α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$.

Aufgabe 080933:

Geben Sie alle Zahlentripel (a,b,c) an, die die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} a+b+c=s_1 & \qquad a-b+c=s_3 \\ a+b-c=s_2 & \qquad a-b-c=s_4 \end{array}$$

unter der zusätzlichen Bedingung erfüllen, daß die Menge der vier Zahlen s_1, s_2, s_3, s_4 (ohne Rücksicht auf ihre Reihenfolge) mit der Menge der vier Zahlen 1, 2, 3, 4 übereinstimmt!

Aufgabe 080934:

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck ΔABC.

Man ermittle das Verhältnis der Inhalte von In- und Umkreisfläche dieses Dreiecks zueinander!

Aufgabe 080935:

Es ist zu beweisen, daß für jede ungerade Zahl n die Zahl $n^{12}-n^8-n^4+1$ durch 512 teilbar ist.

Aufgabe 080936:

Es sei $ABCD$ ein Rechteck, und es sei P ein Punkt, der nicht notwendig in der Ebene des Rechtecks zu liegen braucht. P habe vom Eckpunkt A den Abstand a, vom Punkt B den Abstand b und vom Punkt C den Abstand c.

Man berechne den Abstand d des Punktes P vom Eckpunkt D und zeige dabei, daß zur Ermittlung dieses Abstandes d die Kenntnis der drei Abstände a, b, c ausreicht.

9. Mathematik-Olympiade 1969/70
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090911:

Auf der Siegerehrung einer Kreisolympiade wurde folgendes mitgeteilt:

Genau ein Neuntel aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade errangen einen Preis. Genau ein Zehntel aller Teilnehmer der Kreisolympiade sind Mitglieder des Kreisklubs Junge Mathematiker. Von den Preisträgern stammen genau 75 Prozent aus dem Kreisklub. Genau 6 derjenigen Schüler, die an der Kreisolympiade teilnahmen und Mitglieder des Kreisklubs sind, erhielten keinen Preis.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Teilnehmer an dieser Kreisolympiade!

Aufgabe 090912:

Aus je 12 geradlinigen Hölzern von je 1 dm Länge sollen die Ränder ebener Figuren gelegt werden, deren Flächeninhalte der Reihe nach

$$I_1 = 9\,\text{dm}^2;\quad I_2 = 8\,\text{dm}^2;\quad I_3 = 7\,\text{dm}^2;\quad I_4 = 6\,\text{dm}^2;\quad I_5 = 5\,\text{dm}^2;\quad I_6 = 4\,\text{dm}^2;\quad I_7 = 3\,\text{dm}^2$$

groß sind. Dabei sollen in jedem Fall alle 12 Hölzer zur Herstellung der Berandung der betreffenden Figur gebraucht und keines geteilt oder geknickt werden; keine zwei Hölzer sollen (ganz oder teilweise) übereinanderliegen oder sich überkreuzen.

Geben Sie für jeden Fall eine Lösung an!

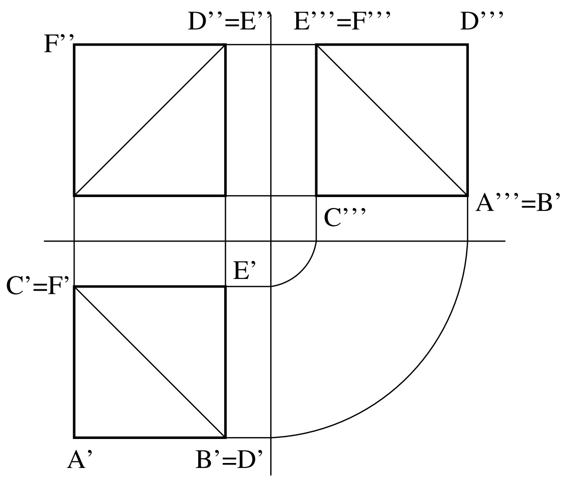
Aufgabe 090913:

In der Abbildung ist ein konvexer, durch ebene Flächen begrenzter Körper im Grund-, Auf- und Seitenriß dargestellt.

Ein durch ebene Flächen begrenzter Körper K heißt konvex, wenn für jede seiner Begrenzungsflächen F gilt: Ist ε die Ebene, in der F liegt, so befindet sich K ganz in einem der beiden Halbräume, in die der Raum durch ε zerlegt wird.

Die Umrisse des dargestellten Körpers sind im Grund-, Auf- und Seitenriß Quadrate mit der Seitenlänge a.

Bauen oder beschreiben Sie einen solchen Körper, und berechnen Sie sein Volumen!



Aufgabe 090914:

Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl z sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als die zweite Quersumme von z bezeichnet.

Beispiele: Die erste Quersumme von 98 ist $9 + 8 = 17$, die zweite Quersumme von 98 ist $1 + 7 = 8$. Die erste Quersumme von 43 ist $4 + 3 = 7$, eine zweite Quersumme von 43 wird nicht erklärt.

Ist die zweite Quersumme von z eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße deren Quersumme die dritte Quersumme von z. In entsprechender Weise werden gegebenenfalls höhere Quersummen erklärt.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1 000, für die keine zweite Quersumme erklärt ist!

b) Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 10 bis 1 000, für die die zweite, aber nicht die dritte Quersumme erklärt ist!

c) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl, für die eine vierte Quersumme erklärt ist!

9. Mathematik-Olympiade 1969/70
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090921:
Bei einem Klassenfest stellen die Schüler ihrem Mathematiklehrer die folgende Aufgabe:

Die Schüler teilen ihrem Lehrer mit, daß sie sich insgeheim so in drei Gruppen aufgeteilt haben, daß jeder Schüler der Klasse genau einer Gruppe angehört. Die Schüler der ersten Gruppe nennen sich die "Wahren", weil sie jede Frage wahrheitsgemäß beantworten. Die Schüler der zweiten Gruppe nennen sich die "Unwahren", weil sie jede Frage falsch beantworten. Die Schüler der dritten Gruppe schließlich nennen sich die "Unbeständigen", weil jeder von ihnen Serien aufeinanderfolgender Fragen alternierend (abwechselnd) wahr und falsch beantwortet; dabei ist aber ungewiß, ob er jeweils die erste Frage einer Serie wahr oder falsch beantwortet.

Jeder Schüler antwortet auf eine gestellte Frage nur mit ja oder nur mit nein; Fragen, die andere Antworten erfordern, werden nicht zugelassen. Der Lehrer soll nun von einem beliebigen Schüler der Klasse durch Fragen, die er an diesen Schüler richtet und die sich nur auf die Zugehörigkeit zu einer der genannten Gruppe beziehen, feststellen, ob der Schüler ein "Wahrer", ein "Unwahrer" oder ein "Unbeständiger" ist.

a) Welches ist die kleinste Anzahl von Fragen, die dazu ausreicht?

b) Geben Sie eine Möglichkeit an, die Zugehörigkeit eines Schülers mit dieser kleinsten Anzahl von Fragen zu ermitteln!

Aufgabe 090922:
Gegeben sei ein Würfel mit der Kantenlänge a_1 und dem Volumen V_1 sowie ein reguläres Tetraeder mit der Kantenlänge a_2 und dem Volumen V_2. Für die Kantenlängen gelte $a_1 : a_2 = 1 : \sqrt{2}$.

Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2$!

Aufgabe 090923:
Jemand hat sieben Kärtchen mit jeweils einer der Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6 und 7.

Man zeige, daß sich unter allen denjenigen siebenstelligen Zahlen, die unter Verwendung jeweils genau dieser sieben Kärtchen gelegt werden können (wobei ein z.B. durch Umdrehen bewirktes "Verwandeln" der 6 in eine 9 verboten ist), keine zwei befinden, deren eine ein ganzzahliges Vielfaches der anderen ist!

Aufgabe 090924:
Es ist zu beweisen:

Verbindet man in einem Parallelogramm $ABCD$ den Eckpunkt C mit den Mittelpunkten der Seiten AB und AD, so teilen diese Verbindungsstrecken die Diagonale BD in drei gleich lange Teilstrecken.

9. Mathematik-Olympiade 1969/70
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090931:

Es sei $ABCDEFGH$ ein regelmäßiges Achteck. Man denke sich alle Dreiecke gebildet, deren Ecken je drei der Punkte A, B, C, D, E, F, G, H sind. Jemand will nun einige dieser Dreiecke aufschreiben, und zwar so, daß keine zwei der aufgeschriebenen Dreiecke einander kongruent sind.

Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die er unter dieser Bedingung aufschreiben kann!

Aufgabe 090932:

Konstruieren Sie ein Dreieck ΔABC aus $s_a = 9,6\,\text{cm}$, $s_b = 12,6\,\text{cm}$ und $s_c = 11,1\,\text{cm}$! Dabei sind s_a, s_b und s_c die Längen der drei Seitenhalbierenden des Dreiecks.

Beschreiben und diskutieren Sie die Konstruktion!

Aufgabe 090933:

Für eine bestimmte Arbeit benötigt A genau m-mal so lange Zeit wie B und C zusammen; B benötigt genau n-mal so lange wie C und A zusammen und C genau p-mal so lange wie A und B zusammen.

Berechnen Sie p in Abhängigkeit von m und n!

Aufgabe 090934:

Man beweise:

Wenn zwei ganze Zahlen a und b die Bedingung erfüllen, daß die Zahl $11a + 2b$ durch 19 teilbar ist, dann ist auch die Zahl $18a + 5b$ durch 19 teilbar.

Aufgabe 090935:

Die Fläche des Dreiecks ΔABC werde durch eine Parallele zur Seite AB in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie das Verhältnis, in dem die zur Seite AB gehörende Höhe des Dreiecks durch die Parallele geteilt wird!

Aufgabe 090936:

Es sei $f(x)$ die für alle reellen x definierte Funktion $f(x) = \frac{(x-1)\,x}{2}$.

Ferner sei x_0 eine beliebig gegebene, von 0 verschiedene reelle Zahl. Wie üblich seien die Funktionswerte der Funktion $f(x)$ an den Stellen $x_0 + 1$ und $x_0 + 2$ mit $f(x_0 + 1)$ bzw. $f(x_0 + 2)$ bezeichnet.

Man beweise, daß dann

$$f(x_0 + 2) = \frac{(x_0 + 2)\,f(x_0 + 1)}{x_0} \quad \text{gilt.}$$

10. Mathematik-Olympiade 1970/71
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100911:

Auf die Frage nach seinem Alter sagte Herr X:

"Die Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre beträgt genau ein Drittel dieser Anzahl. Das Quadrat der Quersumme der Anzahl meiner Lebensjahre ist genau dreimal so groß wie die Anzahl meiner Lebensjahre."

Können die Angaben von Herrn X zutreffen? Wenn ja, wie alt ist Herr X? (Angaben in vollen Lebensjahren)

Aufgabe 100912:

Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$, $\overline{BC} = b$. Ferner sei S ein Punkt der in A auf ε errichteten Senkrechten, wobei $\overline{AS} = c$ gelte.

Man beweise, daß es dann genau eine Kugel gibt, auf der die Punkte A, B, C, D, S liegen, und berechne aus den gegebenen Längen a, b, c die Länge des Durchmessers dieser Kugel!

Aufgabe 100913:

Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 fortlaufend auf folgende Weise hintereinandergeschrieben:

$$12345678910111213...9989991000.$$

Es ist zu beweisen, daß die so entstandene Zahl nicht durch 1 971 teilbar ist.

Aufgabe 100914:

In einer alten Aufgabensammlung wird das *Urteil des Paris* folgendermaßen beschrieben:

Die Göttinnen Hera, Aphrodite und Athene fragen den klugen Paris, wer von ihnen die Schönste sei. Sie machen dabei folgende Aussagen:

Aphrodite:	*Ich bin die Schönste.*	(1)
Athene:	*Aphrodite ist nicht die Schönste.*	(2)
Hera:	*Ich bin die Schönste.*	(3)
Aphrodite:	*Hera ist nicht die Schönste.*	(4)
Athene:	*Ich bin die Schönste.*	(5)

Paris, der am Wegrand ausruht, hält es nicht der Mühe wert, das Tuch, das seine Augen vor den Sonnenstrahlen schützt, zu entfernen. Er soll aber genau eine der drei Göttinnen als die Schönste feststellen. Dabei setzt er voraus, daß alle Aussagen dieser Schönsten wahr, alle Aussagen der beiden anderen Göttinnen jedoch falsch sind.

Kann Paris unter dieser Voraussetzung die von ihm geforderte Feststellung erhalten? Wenn ja, wie lautet diese?

10. Mathematik-Olympiade 1970/71
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100921:
Vier Freunde A, B, C und D verstecken einen Brief. Einer von ihnen nimmt ihn an sich. Anschließend macht jeder von ihnen die folgenden genannten drei Aussagen, von denen wenigstens je zwei wahr sind.

A (1) "Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn C."
(2) "Ich habe den Brief nicht."
(3) "Mein Freund hat den Brief."

B (1) "Entweder A oder C hat den Brief."
(2) "Alle Aussagen von A sind wahr."
(3) "D hat den Brief nicht."

C (1) "Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn B."
(2) "Ich habe den Brief."
(3) "B macht keine falschen Aussagen."

D (1) "Ich habe den Brief nicht."
(2) "Entweder hat A den Brief, oder er hat ihn nicht."
(3) "B hat das Spiel ausgedacht."

Wer hat den Brief?

Aufgabe 100922:
Jemand behauptet:

Wenn von zwei natürlichen Zahlen a und b jede die Eigenschaft hat, sich als Summe der Quadrate zweier natürlicher Zahlen darstellen zu lassen, dann hat auch das Produkt von a und b diese Eigenschaft.

a) Geben Sie ein Zahlenbeispiel an!

b) Beweisen Sie diesen Satz!

Aufgabe 100923:
Gegeben seien zwei reelle Zahlen $m \neq 0$ und n. Ferner sei f die durch $f(x) = mx + n$ für alle reellen Zahlen definierte Funktion.

a) Ermitteln Sie für $m = 1$ und $n = 0$ alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt (d.h. für die der Funktionswert an der Stelle $x_0 + 2$ doppelt so groß ist wie der an der Stelle x_0)!

b) Ermitteln Sie bei beliebig gegebenen reellen Zahlen $m \neq 0$ und n alle Zahlen x_0, für die $2 \cdot f(x_0) = f(x_0 + 2)$ gilt!

Aufgabe 100924:

Eine regelmäßige gerade dreiseitige Pyramide ist eine Pyramide, deren Grundfläche eine gleichseitige Dreiecksfläche ist und deren Höhenfußpunkt mit dem Schwerpunkt der Grundfläche zusammenfällt.

In der regelmäßigen Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D sei der Neigungswinkel zwischen jeder der drei Seitenflächen und der Grundfläche $60°$ groß. Die Grundfläche habe die Seitenlänge a.

Berechnen Sie das Volumen V dieser Pyramide!

Anmerkung: Haben zwei ebene Flächen eine gemeinsame Kante und ist P ein von den Endpunkten verschiedener Punkt dieser Kante, dann ist der Winkel, den zwei in P auf der Kante errichtete und in den beiden Flächen gelegene senkrecht stehende Strecken miteinander bilden, gleich dem Neigungswinkel der beiden Flächen zueinander.

10. Mathematik-Olympiade 1970/71
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100931:

Günter verbrachte in seinen Ferien eine Anzahl von Tagen mit seiner FDJ-Gruppe in einem Lager. An jedem Tage wurden aus seiner Gruppe genau zwei Schüler vormittags und genau zwei Schüler nachmittags zum Tischdienst eingeteilt. Im Laufe der Tage wurden alle Schüler seiner Gruppe gleich oft zu diesem Tischdienst eingesetzt. Ferner ist folgendes bekannt:

(1) Günter war an genau 6 Tagen zum Tischdienst eingeteilt.

(2) Wenn er nachmittags Tischdienst hatte, hatte er vormittags keinen.

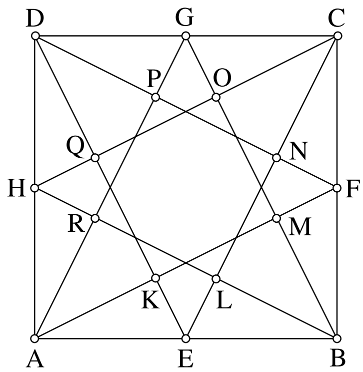
(3) Er hatte an diesen Tagen genau 13mal nachmittags keinen Tischdienst.

(4) Er hatte an diesen Tagen genau 11mal vormittags keinen Tischdienst.

Aus wieviel Schülern bestand Günters Gruppe?

Aufgabe 100932:

In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a seien die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA mit E, F, G, H bezeichnet. In dem Streckenzug $AFDECHBGA$ auftretenden Schnittpunkte seien so mit K, L, M, N, O, P, R bezeichnet, daß $AKELBMFNCOGPDQHR$ ein (nicht konvexes) Sechzehneck ist, auf dessen Seiten keine weiteren Schnittpunkte des obengenannten Streckenzuges mit sich selbst liegen (siehe Abbildung).



Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Sechzehnecks!

Aufgabe 100933:

Wenn x eine reelle Zahl ist, so bedeute $[x]$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist.

(So ist z.B. $[3,7] = 3$, $[-3,7] = -4$, $[4] = 4$.)

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die $\left[\frac{10+3x}{6}\right] = \frac{5x+3}{7}$ gilt!

Aufgabe 100934:

Gesucht sind alle geordneten Tripel reeller Zahlen (x, y, z), welche Lösungen des Gleichungssystems

(1) $\quad x + y = 2$

(2) $\quad xy - z^2 = 1$ sind!

Aufgabe 100935:

Eine dreiseitige Pyramide mit den Ecken A, B, C, D und der Spitze D habe die Kantenlängen $\overline{AB} = 4$ cm, $\overline{AC} = 3$ cm, $\overline{BC} = 5$ cm, $\overline{BD} = 12$ cm, $\overline{CD} = 13$ cm, und $\sphericalangle ABD$ sei ein rechter Winkel.

Man berechne das Volumen V dieser Pyramide.

Aufgabe 100936:

Es sei ein Dreieck ΔABC aus $a + b + c$, α, γ zu konstruieren. Dabei bedeuten wie üblich a, b, c die Längen der Seiten BC, AC, AB und α, γ die Größen der Winkel $\sphericalangle CAB$, $\sphericalangle ACB$.

Beschreiben, begründen und diskutieren Sie Ihre Konstruktion!

11. Mathematik-Olympiade 1971/72
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110911:

Jörg schreibt die folgende Gleichung auf:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{c+d} = \frac{1}{(a+b)(c+d)}. \qquad (1)$$

Michael meint, daß sie "falsch" sei. Jörg, der sich nicht so leicht "überzeugen" läßt, wählt für die Variablen a, b, c und d Zahlen, setzt sie in die Gleichung (1) ein und erhält zu Michaels Überraschung eine wahre Aussage.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, nur aus den Zahlen -1, 0, 1 für a, b, c und d je eine so auszuwählen, daß die Gleichung (1) erfüllt wird!

Aufgabe 110912:

Jede Seitenhalbierende eines Dreiecks zerlegt die Dreiecksfläche in zwei Dreiecksflächen, die gleich lange Grundseiten und gleich lange Höhen haben und somit inhaltsgleich sind. Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden heißt Schwerpunkt des Dreiecks.

Untersuchen Sie, ob jede Gerade durch den Schwerpunkt S eines Dreiecks ΔABC dessen Fläche in zwei inhaltsgleiche Teilflächen zerlegt!

Aufgabe 110913:

Ermitteln Sie alle natürlichen Zahlen a, für die der Term

$$t = \frac{a+11}{a-9}$$

eine natürliche Zahl ist!

Aufgabe 110914:

In einer Ebene ε liege ein Rechteck $ABCD$. S sei ein Punkt der Senkrechten in A auf ε.

Ermitteln Sie die Größe des Winkels $\sphericalangle CDS$!

11. Mathematik-Olympiade 1971/72
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110921:

Bei einem geraden Kreiszylinder sollen die Maßzahlen des Umfangs seiner Grundfläche (in cm), des Inhalts seiner Mantelfläche (in cm^2) und seines Volumens (in cm^3) untereinander gleich sein.

Ermitteln Sie den Grundkreisradius und die Höhenlänge jedes derartigen Zylinders!

Aufgabe 110922:

Ermitteln Sie alle geordneten Paare (a, b) ganzer Zahlen a und b ($b \neq 0$) mit folgender Eigenschaft:

Ersetzt man den Zähler a des Bruches $\frac{a}{b}$ durch die Summe aus a und einer geeigneten natürlichen Zahl n ($n \neq 0$) und ersetzt man zugleich den Nenner b dieses Bruches durch das Produkt aus b und der gleichen Zahl n, so erhält man einen Bruch, der dem zu Anfang genannten Bruch $\frac{a}{b}$ gleich ist.

Aufgabe 110923:

Eine Kreislinie sei in 30 gleich große Bögen geteilt. Die Teilpunkte seien der Reihe nach mit P_1 bis P_{30} bezeichnet.

Berechnen Sie die Größe jedes der vier Winkel, unter denen sich die Strecken P_7P_{18} und $P_{12}P_{21}$ schneiden!

Aufgabe 110924:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Sind p_1 und p_2 Primzahlen, für die $3 < p_1 < p_2$ gilt, dann gibt es stets zwei natürliche Zahlen a und b, so daß die Gleichungen

(1) $a + b = p_2$ und

(2) $a - b = p_1$

gleichzeitig erfüllt sind und das Produkt $a \cdot b$ durch 6 teilbar ist.

11. Mathematik-Olympiade 1971/72
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

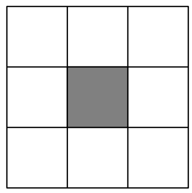
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110931:
Günter erzählt:

> "Die sechsstellige Telefonnummer unserer Schule merke ich mir folgendermaßen: Ich schreibe unsere zweistellige Hausnummer hin. Dahinter schreibe ich die Quersumme der Hausnummer und füge nun jeweils die Summe aus den letzten beiden hingeschriebenen Zahlen an, bis sechs Ziffern dastehen. Übrigens kommt in der Telefonnummer unserer Schule keine Eins vor, und unsere Hausnummer ist eine durch 3 teilbare Zahl."

Wie lautet Günters Hausnummer und wie die Telefonnummer seiner Schule?

Aufgabe 110932:
In die nebenstehende Figur sollen neun aufeinanderfolgende natürliche Zahlen so eingetragen werden, daß in jedem Feld genau eine steht und die drei "Zeilensummen", die drei "Spaltensummen" und die zwei "Diagonalsummen" sämtlich einander gleich sind (magisches Quadrat). Beweisen Sie, daß eine derartige Belegung genau dann möglich ist, wenn in dem grauen Feld die fünfte der der Größe nach geordneten Zahlen steht!



Aufgabe 110933:
Beweisen Sie den folgenden Satz!

Verhalten sich die Seitenlängen eines Dreiecks ΔABC wie $\sqrt{3} : \sqrt{2} : 1$, dann stehen zwei Seitenhalbierende dieses Dreiecks senkrecht aufeinander.

Aufgabe 110934:
In einem Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} = \overline{CD} = a$ und $\overline{BC} = \overline{DA} = b$, $(a > b)$ schneide die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$ die Seite CD in S_1. Weiter sei S_2 der Mittelpunkt von AB.

Ermitteln Sie das Verhältnis $a : b$ der Seitenlängen eines solchen Rechtecks, bei dem die Halbierende des Winkels $\sphericalangle AS_2C$ die Seite CD in S_1 schneidet!

Aufgabe 110935:
Es seien a, b, c positive reelle Zahlen. Man beweise, daß dann

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} \geq 2 \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \text{ gilt!}$$

Man gebe alle Fälle an, in denen Gleichheit eintritt!

Aufgabe 110936:

Ermitteln Sie alle geordneten Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die Lösungen der folgenden Gleichung sind!

$$2x^2 - 2xy - 5x - y + 19 = 0$$

12. Mathematik-Olympiade 1972/73
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120911:

Zeigen Sie, daß es für jede ganze Zahl $n \geq 4$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit genau n Ecken und genau n Flächen gibt! (Es genügt die Angabe je eines Beispiels.)

Aufgabe 120912:

Während einer GST-Übung schätzten Andreas und Frank die Länge einer Strecke. Wenn Andreas um 10 % weniger geschätzt hätte, hätte er die genaue Länge getroffen. Wenn Franks Schätzwert um 10 % höher gelegen hätte, hätte er die genaue Länge der Strecke getroffen.

Bei welcher der beiden Schätzungen ist der absolute Betrag des absoluten Fehlers geringer?

Aufgabe 120913:

Ein Durchmesser AB eines Kreises werde von einer Sehne CD in einem Punkt E geschnitten, der AB innen im Verhältnis $2 : 5$ teilt. Dabei schneide die Sehne CD den Durchmesser AB unter einem Winkel von $30°$.

Ermitteln Sie den Abstand der Sehne vom Mittelpunkt M des Kreises, wenn die Länge d des Durchmessers gegeben ist!

Aufgabe 120914:

Es ist die größte siebenstellige Zahl zu ermitteln, die mit paarweise verschiedenen Ziffern dargestellt werden kann und durch 72 teilbar ist.

12. Mathematik-Olympiade 1972/73
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120921:
Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe der Kuben dreier beliebiger aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen ist durch 3 teilbar.

Aufgabe 120922:
Ermitteln Sie alle reellen Zahlen x, für die der Quotient

$$\frac{8-3x}{7x-2} \quad \text{negativ ist!}$$

Aufgabe 120923:
Zu Dekorationszwecken sollen gleich große Konservenbüchsen verschiedener Sorten so in mehreren Reihen übereinander aufgebaut werden, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jede Reihe soll genau eine Büchse mehr enthalten als die Reihe unmittelbar über ihr.

(2) Die oberste Reihe enthält genau eine Büchse.

(3) Es werden genau drei verschiedene Sorten Büchsen verwendet.

(4) Von jeder der drei Sorten findet genau dieselbe Anzahl von Büchsen Verwendung.

(5) Jede Reihe besteht aus Büchsen von genau einer Sorte.

(6) Keine zwei unmittelbar übereinanderstehenden Reihen enthalten Büchsen derselben Sorte.

Ermitteln Sie die kleinste Anzahl von Büchsen, für die es möglich ist, die Bedingungen (1) bis (6) gleichzeitig zu erfüllen!

Aufgabe 120924:
Ein konvexes Tangentenviereck $ABCD$ (ein Viereck, in das ein Kreis so einbeschrieben werden kann, daß er jede der vier Seiten des Vierecks in je einem Punkt berührt) habe den Umfang u, der Radius seines Inkreises sei r.

Berechnen Sie den Flächeninhalt F dieses Tangentenvierecks!

12. Mathematik-Olympiade 1972/73
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

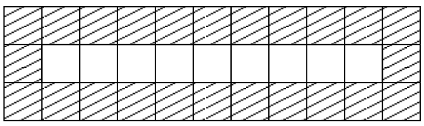
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120931:

Man beweise, daß für jede natürliche Zahl n die Zahl $n^6 - n^2$ durch 10 teilbar ist.

Aufgabe 120932:

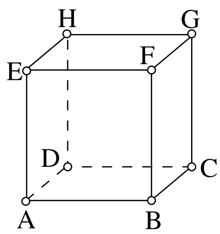
Karlheinz will aus gleich großen roten und weißen Quadratflächen lückenlos eine Rechteckfläche derartig zusammensetzen, daß sämtliche an den Rand dieses Rechtecks grenzenden Quadratflächen rot sind (in der Abbildung gestrichelt gezeichnet), während alle übrigen (im Innern gelegenen) Quadratflächen weiß sein sollen. Dabei soll die Anzahl der roten Quadratflächen gleich der der weißen sein.



Geben Sie (durch Angabe der Anzahl der in je einer Zeile und in je einer Spalte angeordneten Quadratflächen) alle Rechteckflächen an, die Karlheinz unter diesen Bedingungen bilden könnte!

Aufgabe 120933:

Ein Würfel mit der Kantenlänge a und den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) wird von sechs Ebenen geschnitten, die jeweils durch die Punkte A, B, G, H; D, C, F, E; A, D, G, F; B, C, H, E; A, E, G, C und B, H, F, D gehen.



Man ermittle die Anzahl der Teilkörper, in die der Würfelkörper dadurch zerlegt wird. Außerdem gebe man das Volumen der einzelnen Teilkörper an.

Aufgabe 120934:

Zwei Fußgänger A und B legten dieselbe Strecke zurück. Sie starteten zur gleichen Zeit. Ein Beobachter stellte fest:

A ging die Hälfte der Strecke mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, den Rest mit 5 km/h. B ging während der Hälfte der von ihm für die ganze Strecke aufgewandten Zeit mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 4 km/h, während der übrigen Zeit mit 5 km/h.

Wer von den beiden erreichte zuerst das Ziel?

Aufgabe 120935:

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, k sein Umkreis, und es gelte für die Bogenlänge derjenigen zwischen den Eckpunkten des Sehnenvierecks liegenden Kreisbögen von k, auf denen jeweils kein anderer Eckpunkt liegt, die Gleichung $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{DA}$.

Man beweise, daß dann $AC \perp BD$ gilt!

Aufgabe 120936:

a) Man ermittle die Anzahl aller verschiedenen Tripel (k, n, m) natürlicher Zahlen k, n, m, für die $k \cdot n^2 \cdot (2m + 1) = 3\,808$ gilt.

b) Man gebe von den unter a) genannten Tripeln alle diejenigen an, für die das Produkt knm den kleinsten Wert annimmt.

13. Mathematik-Olympiade 1973/74
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130911:

Zwei in gleicher Höhe über den Erdboden liegende Punkte A und B befinden sich in gleichem Abstand und auf derselben Seite von einer geradlinig verlaufenden hohen Wand. Die Strecke AB ist 51 m lang. Ein in A erzeugter Schall trifft in B auf direktem Wege um genau $\frac{1}{10}$s früher ein als auf dem Wege über die Reflexion an der Wand.

Man ermittle den Abstand jedes der beiden Punkte A und B von der Wand, wobei angenommen sei, daß der Schall in jeder Sekunde genau 340 m zurücklegt.

Aufgabe 130912:

Jemand will aus einer Mischung, die zu 99 % aus Wasser besteht, eine neue Mischung mit einem Wasseranteil von 98 % dadurch herstellen, daß er aus der ursprünglichen Mischung Wasser entzieht.

Man ermittle, wieviel Prozent der in der ursprünglichen Mischung enthaltenen Wassermenge er ihr zu diesem Zweck insgesamt entziehen muß.

Aufgabe 130913:

In das nebenstehende Quadrat sollen die Zahlen 1, 2, 3 und 4 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen jede der vier Zahlen genau einmal vorkommt. An drei Stellen sind bereits Zahlen eingetragen und sollen unverändert stehenbleiben.

a	1			
b			2	
c				3
d				
	A	B	C	D

Man untersuche, ob eine solche Eintragung möglich ist und ob nur eine einzige Eintragungsmöglichkeit existiert. Ist dies der Fall, so führe man die Eintragung durch.

Hinweis: Zur Beschreibung des Lösungsweges sind die am Rand des Quadrates eingetragenen Buchstaben zu benutzen. Beispiel: Im Feld bC ist bereits die Zahl 2 eingetragen.

Aufgabe 130914:

Unter $n!$ (gelesen n-Fakultät) versteht man das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n; d.h., es gilt

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n-3) \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n.$$

Man ermittle für $n = 1\,000$ die Anzahl der Nullen, auf die die Zahl $n!$ endigt (Endnullen).

13. Mathematik-Olympiade 1973/74
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130921:

Eine Turmuhr zeigt genau 13 Uhr an. Stellen Sie fest, wie oft insgesamt bei gleichförmiger Zeigerbewegung der Minutenzeiger und der Sekundenzeiger innerhalb der nächsten 12 Stunden einen rechten Winkel miteinander bilden!

Aufgabe 130922:

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC, in dem die Winkel ABC und BAC die Größe 90° bzw. 60° haben, schneide die Halbierende des Winkels BAC die Gegenseite im Punkt D.

Beweisen Sie, daß D die Seite BC im Verhältnis 1 : 2 teilt!

Aufgabe 130923:

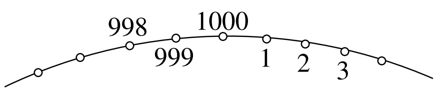
Ein konvexes gleichschenkliges Trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$; $\overline{AD} = \overline{BC}$; $\overline{AB} > \overline{CD}$) soll folgende Eigenschaften haben:

Es soll sich einem Kreis mit dem Radius $r = 12$ cm umbeschreiben lassen; der Umfang des Trapezes soll $u = 100$ cm betragen.

Untersuchen Sie, ob es solche Trapeze gibt und berechnen Sie die Seitenlängen jedes derartigen Trapezes!

Aufgabe 130924:

Man denke sich eine Kreislinie in 1 000 gleich lange Teilbögen zerlegt und jeden der 1 000 Teilpunkte der Reihe nach mit den natürlichen Zahlen 1 bis 1 000 bezeichnet.



Es sollen nun nacheinander die Zahl 1 und jede weitere 15. Zahl, also 1, 16, 31, 46, ..., durchgestrichen werden. Dabei sind bei wiederholten "Umläufen" auch die bereits gestrichenen Zahlen mitzuzählen. Dieses Durchstreichen ist so lange fortzusetzen, bis nur noch Zahlen durchgestrichen werden müßten, die bereits gestrichen sind.

Ermitteln Sie die Anzahl aller Zahlen, die bei diesem Verfahren nicht durchgestrichen werden!

13. Mathematik-Olympiade 1973/74
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130931:

Wie man an Beispielen sehen kann, gibt es Paare (x, y), worin x und y je eine zweistellige natürliche Zahl mit folgender Eigenschaft sind:

Tauscht man die Ziffern dieser Zahl gegeneinander aus und addiert 9 zu der so entstandenen Zahl, so erhält man die andere Zahl des Paares. (Ein solches Paar ist z.B. (25; 61), denn es gilt $52+9 = 61$ und $16+9 = 25$.)

Hinweis: Entsteht beim Vertauschen der Ziffern eine mit 0 beginnende Ziffernfolge (etwa aus 30 die "03"), so ist statt dessen für die weiteren Operationen die (einstellige) Zahl zu nehmen, die nach dem Streichen der Null entsteht (in unserem Beispiel "3").

Wir nennen die Zahlen x, y eines solchen Paares $(x; y)$ einander zugeordnet.

a) Geben Sie alle zweistelligen Zahlen an, die als Elemente solcher Paare auftreten können!

b) Ermitteln Sie alle zweistelligen Zahlen, die auf diese Weise sich selbst zugeordnet sind!

Aufgabe 130932:

Man gebe alle natürlichen Zahlen n an, für die $(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$ durch 10 teilbar ist!

Aufgabe 130933:

Auf einer Geraden g seien in dieser Reihenfolge sechs Punkte A, B, C, D, E, F gelegen. Ein Punkt P außerhalb von g sei so gelegen, daß PC das Lot von P auf g ist. Dabei gelte $\overline{PC} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF}$.

Man beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle APF} = 135°$ gilt.

Hinweis: Es genügt nicht, diese Gleichheit nur mit Rechentafelgenauigkeit nachzuweisen.

Aufgabe 130934:

In einer Ebene sollen regelmäßige n-Ecke (mit einheitlicher Eckenzahl) so um einen Eckpunkt herum aneinandergelegt werden, daß die Summe der Größen der an diesem Eckpunkt liegenden Innenwinkel 360° beträgt.

Geben Sie alle natürlichen Zahlen n an, für die das möglich ist; geben Sie dabei jeweils die Anzahl der insgesamt benötigten n-Ecke an!

Aufgabe 130935:
Beweisen Sie den folgenden Satz!

Wenn für rationale Zahlen a, b, c mit a, b, $c \neq 0$ und $a + b + c \neq 0$ die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$$

gilt, so sind zwei der Zahlen a, b, c zueinander entgegengesetzt.

(Rationale Zahlen x, y heißen genau dann zueinander entgegengesetzt, wenn $x = -y$ gilt.)

Aufgabe 130936:
Gegeben sei ein regelmäßiges Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D und der Kantenlänge a. Ein Punkt D' soll folgende Eigenschaften haben:

a) Das Tetraeder mit den Eckpunkten A, B, C, D' ist volumengleich zu dem gegebenen Tetraeder,

b) $\overline{BD'} = \overline{CD'} = a$,

c) $\overline{AD'} \neq a$.

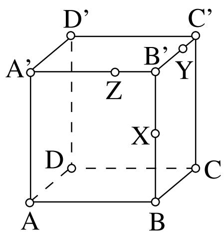
Man untersuche, ob es solche Punkte D' gibt, und ermittle für jedes solche D' die Länge der Kante AD'.

14. Mathematik-Olympiade 1974/75
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140911:

Gegeben sei ein Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, A', B', C', D' und der Kantenlänge a (siehe Abbildung). Auf BB' liege ein Punkt X, auf $B'C'$ ein Punkt Y und auf $A'B'$ ein Punkt Z, wobei diese Punkte beliebig gelegen, aber von B' verschieden sein sollen.



Wir betrachten dann für jede solche Wahl von X, Y, Z den geschlossenen Streckenzug $XYZX$. Als Länge dieses Streckenzuges bezeichnet man die Summe der Längen $\overline{XY}$, $\overline{YZ}$ und $\overline{ZX}$.

a) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit größter Länge gibt!

b) Ermitteln Sie, ob es unter diesen Streckenzügen einen mit kleinster Länge gibt!

c) Falls es bei a) oder b) einen solchen Streckenzug gibt, so ermitteln Sie seine Länge!

Aufgabe 140912:

Peter behauptet, man könne bei einem beliebig gegebenen Dreieck ABC, in dem D der Mittelpunkt der Seite AB ist, allein durch Längenvergleich der Seitenhalbierenden CD und der halben Seite AD feststellen, ob das Dreieck bei C einen spitzen, rechten oder stumpfen Innenwinkel hat.

Untersuchen Sie, ob Peters Behauptung richtig ist!

Aufgabe 140913:

An eine im dekadischen System geschriebene natürliche Zahl z werden folgende Forderungen gestellt:

(1) Die Quersumme von z soll 11 betragen.

(2) Die Ziffern von z sollen paarweise verschieden sein.

(3) Die Zahl z soll durch 11 teilbar sein.

Ermitteln Sie alle Zahlen z, die die Forderungen (1) bis (3) erfüllen! len!

Aufgabe 140914:

Bettina und Axel sind beide Briefmarkensammler, nun schlägt Axel Bettina folgendes Spiel um Briefmarken vor:

Jeder schreibt, unabhängig von dem anderen (ohne dem anderen Einsicht zu gewähren) genau eine der drei Zahlen 1, 2 oder 3 auf einen Zettel. Danach werden die Zettel aufgedeckt. Ist nun die von Axel notierte Zahl kleiner oder gleich der von Bettina notierten, so wird die von Axel notierte Zahl von der von Bettina notierten Zahl subtrahiert, in den anderen Fällen werden die Zahlen addiert.

Ist die so entstandene Zahl kleiner als 3, so darf sich Axel so viele Briefmarken von Bettina nehmen, wie diese Zahl angibt; in den anderen Fällen darf sich entsprechend Bettina von Axel Briefmarken nehmen. Nachdem sich Bettina diese komplizierten Regeln genau durchdacht hat, sagt sie zu Axel, daß dieses Spiel keinen Zweck hätte. Es könne nämlich jeder von beiden so spielen, daß er mit Sicherheit nicht verliert. Das würde aber bedeuten, daß keiner vom anderen eine Marke nehmen dürfte.

Ist diese Meinung Bettinas richtig?

14. Mathematik-Olympiade 1974/75
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140921:

An einer Fußballmeisterschaft der DDR beteiligen sich 14 Mannschaften der Oberliga. In der ersten Halbserie spielen je zwei dieser Mannschaften genau einmal gegeneinander.

Es ist zu beweisen, daß es in der Zeit dieser Halbserie nach jedem Spieltag zwei Mannschaften der Oberliga gibt, die die gleiche Anzahl von Spielen ausgetragen haben.

Aufgabe 140922:

Es sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck, H sei der Schnittpunkt seiner Höhen und D, E, F deren Fußpunkte, wobei D auf BC, E auf CA und F auf AB liegen mögen.

Man beweise, daß dann $\overline{AH} \cdot \overline{HD} = \overline{BH} \cdot \overline{HE} = \overline{CH} \cdot \overline{HF}$ gilt.

Aufgabe 140923:

Es ist die kleinste positive ganze Zahl zu ermitteln, deren dritte Potenz ein ganzzahliges Vielfaches von 588 ist.

Aufgabe 140924:

AB sei eine in der Ebene ε gegebene Strecke der Länge a. In ε sei g die Gerade durch A, die senkrecht zu AB ist. In B sei die Senkrechte s auf die Ebene ε errichtet. Schließlich seien C ein von A verschiedener Punkt auf g und D ein von B verschiedener Punkt auf s.

a) Man beweise, daß es eine Kugel gibt, die durch die Punkte A, B, C und D geht.

b) Man berechne den Radius einer solchen Kugel für den Fall, daß $\overline{CA} = a\sqrt{2}$ und $\overline{BD} = a\sqrt{3}$ gilt.

14. Mathematik-Olympiade 1974/75
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140931:

Gesucht ist die kleinste natürliche Zahl x (wobei x nicht unbedingt einstellig sein soll), die folgende Eigenschaft hat:

Die Zahl $83 \cdot x$ (das Produkt aus 83 und x) hat als Darstellung die Ziffernfolge $3x8$ (d.h., vor die Ziffer oder Ziffernfolge der Zahl x ist eine 3, hinter die so gebildete Ziffernfolge eine 8 zu setzen).

Aufgabe 140932:

Man gebe alle geordneten Quadrupel (a_1, a_2, a_3, a_4) aus vier unmittelbar aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen a_1, a_2, a_3, a_4 mit $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$ an, die folgender Bedingung genügen:

Die Summe der dritten Potenz der ersten beiden Zahlen des Quadrupels ist gleich der Differenz der dritten Potenz der letzten und vorletzten Zahl des Quadrupels.

Aufgabe 140933:

Von einem beliebigen Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ seien die Längen $a = \overline{AB}$, $c = \overline{CD}$ seiner Parallelseiten sowie der Abstand h der diese beide Parallelseiten enthaltenen Geraden gegeben. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S.

Man berechne aus den gegebenen Längen a, c, h die Flächeninhalte F_1, F_2, F_3, F_4 der Dreiecke ABS, BCS, CDS bzw. ADS.

Aufgabe 140934:

Man beweise, daß für beliebige reelle Zahlen x, y, z die folgende Beziehung gilt: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$.

Ferner gebe man für x, y, z Bedingungen an, die gleichwertig damit sind, daß in der genannten Beziehung das Gleichheitszeichen gilt.

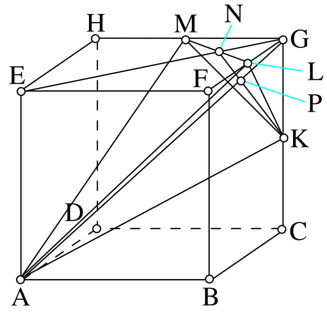
Aufgabe 140935:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Auf dem Umkreis k des Dreiecks liege auf dem Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$, der C nicht enthält, ein von A und B verschiedener Punkt P. Symmetrisch zu P bezüglich der Geraden durch A und C bzw. der durch B und C mögen die Punkte P_1 und P_2 liegen.

a) Man beweise, daß C auf der Geraden g durch P_1 und P_2 liegt.

b) Man beweise, daß g genau dann die Tangente im Punkt C an den Umkreis k ist, wenn $CP \perp AB$ gilt.

Aufgabe 140936:



In einem Würfel mit den Eckpunkten A, B, C, D, E, F, G, H (siehe Abbildung) und der Kantenlänge a seien K, L, M die Mittelpunkte der Seiten CG, FG bzw. HG.

Man ermittle das Volumen des Pyramidenkörpers mit den Eckpunkten A, K, L, M.

15. Mathematik-Olympiade 1975/76
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150911:

Ermitteln Sie alle im dekadischen Zahlensystem geschriebenen vierstelligen natürlichen Zahlen, die gleichzeitig folgende Bedingungen erfüllen!

(1) Die Zahl wird mit vier Ziffern geschrieben, die, einzeln für sich gelesen, vier unmittelbar aufeinanderfolgende Zahlen bezeichnen. An die Reihenfolge dieser Ziffern werden hier keine Anforderungen gestellt.

(2) Die Zahl ist durch 99 teilbar.

Aufgabe 150912:

In

$$\begin{array}{ccccc} & H & A & U & S \\ & H & A & U & S \\ \hline S & T & A & D & T \end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern ersetzt werden, daß eine richtig gelöste Additionsaufgabe entsteht. Dabei sollen für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern eingesetzt werden.

Geben Sie alle Lösungen dafür an!

Aufgabe 150913:

Gegeben seien zwei verschiedene zueinander parallele Geraden g und h. Außerhalb des von ihnen eingeschlossenen Streifens seien ferner zwei voneinander verschiedene Punkte A und B so gegeben, daß auch kein Punkt der Strecke AB in diesem Streifen liegt und daß der Abstand von A zu g kleiner ist als der Abstand von A zu h. Für jeden Punkt P auf h bezeichne A' bzw. B' den Schnittpunkt von g mit PA bzw. PB.

Konstruieren Sie alle diejenigen Punkte P auf h, für die mit diesen Bezeichnungen $\overline{A'P} = \overline{B'P}$ gilt!

Begründen Sie die Konstruktion; diskutieren Sie, ob alle Punkte P mit der genannten Eigenschaft erhalten werden können und wie viele solcher Punkte es je nach der Lage der gegebenen g, h, A, B geben kann!

Aufgabe 150914:

Als Herr T. am 30.12.1973 seinen Geburtstag beging, sagte er zu seiner Frau: "Jetzt bin ich genau 8 mal so alt wie unser Sohn, wenn ich als Altersangabe jeweils nur die vollen (vollendeten) Lebensjahre rechne."

Darauf entgegnete seine Frau: "Im Jahre 1974 wird der Fall eintreten, daß du 5 mal so alt wie unser Sohn bist, wenn auch ich nur die vollen Lebensjahre berücksichtige."

Untersuchen Sie, ob es genau ein Datum gibt, für das - als Geburtsdatum des Sohnes - alle diese Angaben zutreffen! Ist das der Fall, so geben Sie das genaue Geburtsdatum des Sohnes an (Tag, Monat, Jahr)!

15. Mathematik-Olympiade 1975/76
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150921:

Klaus hat bei einer Hausaufgabe $4^2 - 3^2$ auszurechnen. Ihm fällt dabei auf, daß das Ergebnis 7 gleich der Summe der beiden benutzten Zahlen 4 und 3 ist. Als er seine Entdeckung an den Zahlen 10 und 11 überprüft, stellt er fest, daß auch hier $11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$ ist.

Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen mit $a > b$, für die die (positive) Differenz der Quadrate der beiden Zahlen gleich der Summe beider Zahlen ist!

Aufgabe 150922:

In das abgebildete Quadrat sollen die Ziffern 1, 2, 3, 4 und 5 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile und Spalte und in den beiden Diagonalen jede der Ziffern von 1 bis 5 genau einmal vertreten ist. Die bereits eingetragenen Ziffern sollen dabei nicht verändert werden.

	A	B	C	D	E
a	1	2	3		
b					
c				5	
d					4
e					

a) Geben Sie eine den Bedingungen entsprechende Eintragung an!

b) Untersuchen Sie, ob voneinander verschiedene den Bedingungen entsprechende Eintragungen möglich sind, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle derartigen Eintragungen!

Die Buchstaben an den Rändern des Quadrates sollen die Beschreibungen des Lösungsweges erleichtern. So steht z.B. im Feld cD bereits die Ziffer 5, Kurzschreibweise cD:5.

Aufgabe 150923:

Gegeben seien die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$ sowie eine Länge m, für die $m \leq a$ gilt. Es sei M derjenige Punkt auf der Seite CD, für den $\overline{MD} = m$ gilt.

Gesucht ist ein Punkt N auf der Seite AD so, daß sich der Flächeninhalt des Dreiecks NMD zu dem des Quadrates $ABCD$ wie $1 : 7$ verhält.

Man ermittle alle diejenigen Werte von m, für die ein solcher Punkt N auf AD existiert, und hierzu jeweils die Länge der Strecke DN.

Aufgabe 150924:

Bei der Lösung der Aufgabe, ein Dreieck ABC aus $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ und $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$ zu konstruieren, seien zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC_1 und ABC_2 entstanden, die den Bedingungen genügen.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle AC_1B$, wenn außerdem bekannt ist, daß er viermal so groß ist wie der Winkel $\sphericalangle AC_2B$!

15. Mathematik-Olympiade 1975/76
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150931:

Es sind drei aufeinanderfolgende ungerade natürliche Zahlen zu ermitteln, bei denen die Summe ihrer Quadrate eine vierstellige Zahl ist, die aus vier gleichen Ziffern besteht.

Aufgabe 150932:

Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $\overline{BC} = a$ und die Höhenlänge $\overline{AD} = h_a$ bekannt. Eine Gerade g verläuft so, daß BC auf g liegt.

Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch Rotation der Dreiecksfläche um die Gerade g beschrieben wird!

Aufgabe 150933:

Über eine Zahl x werden die folgenden vier Paare (A_1, A_2), (B_1, B_2), (C_1, C_2), (D_1, D_2) von Aussagen gemacht, von denen genau eine wahr und genau eine falsch ist.

Untersuchen Sie, ob es eine Zahl x gibt, die dieser Forderung genügt! Ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, jede solche Zahl x!

A_1) Es gibt außer x keine Zahl, die der Forderung dieser Aufgabe genügt.
A_2) x ist eine natürliche Zahl, in deren (dekadischer) Darstellung eine Ziffer zweimal auftritt.

B_1) $x - 5$ ist eine ganze, durch 6 teilbare Zahl.
B_2) $x + 1$ ist eine ganze, durch 12 teilbare Zahl.

C_1) x ist eine natürliche Zahl, deren (dekadische) Darstellung mit der Ziffer 3 beginnt.
C_2) x ist die Zahl 389.

D_1) x ist eine dreistellige Primzahl mit $300 < x < 399$, also eine der Zahlen 307, 311, 313, 317, 331, 337, 347, 349, 353, 359, 367, 373, 379, 383, 389, 397.
D_2) x ist eine natürliche Zahl, die aus drei gleichen Ziffern besteht.

Aufgabe 150934:

Man ermittle alle Möglichkeiten, die Zahl 60 als Summe von mindestens zwei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen darzustellen.

Aufgabe 150935:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

In jedem Dreieck teilt die Halbierende jedes Innenwinkels die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der beiden anliegenden Seiten.

Aufgabe 150936:

Beweisen Sie, daß für alle Tripel (a, b, c) positiver reeller Zahlen mit $abc = 1$ die Ungleichung

$$(1 + a)\,(1 + b)\,(1 + c) \geq 8 \quad \text{gilt!}$$

Wann gilt das Gleichheitszeichen?

16. Mathematik-Olympiade 1976/77
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160911:

Frank und Jens spielen ein Spiel, das sie "Autorennen" nennen. Sie haben dazu auf quadratisch-kariertem Papier eine Spielfläche durch einen Streckenzug $ABCDEFGA$ eingeschlossen, wobei A, B, C, D, E, F, G Gitterpunkte bezeichnen. Jeder Spieler soll von der "Startlinie" AG zur "Ziellinie" DE oder über sie hinaus gelangen, indem er nach folgenden Regeln einen Streckenzug $P_0P_1P_2...P_n$ bildet, der den Weg des Fahrzeuges darstellen soll, wobei die P_0, P_1, ..., P_n Gitterpunkte sind. Keine der Teilstrecken P_0P_1, P_1P_2, ... , $P_{n-1}P_n$ des Streckenzuges darf dabei die Randlinie des Spielfeldes (mit Ausnahme der Start- und Ziellinie) berühren oder schneiden. Unter einem "Zug" wird der Übergang von einem Punkt P_k zu dem nächsten Punkt P_{k+1} verstanden.

Die Spielregeln lauten:

(1) P_0 liegt auf AB

(2) Der erste "Zug" besteht aus der Strecke P_0P_1, wobei $\overline{P_0P_1} = 1$ (Seitenlänge des Grundquadrates) ist.

(3) Wenn bereits ein "Zug" $P_{k-1}P_k$ ausgeführt wurde, so findet man den nächsten "Zug" P_kP_{k+1} folgendermaßen:

   a) Man verlängert die Strecke $P_{k-1}P_k$ über P_k hinaus um sich selbst bis zu einem Punkt, der Q_k genannt sei.

   b) Man wählt entweder den Punkt Q_k oder einen seiner acht benachbarten Gitterpunkte als Punkt P_{k+1}.

   Hinweis: P_{k+1} muß innerhalb des Spielfeldes liegen, aber nicht notwendig Q_k.

Geben Sie für ein Spielfeld mit $A(0;0)$, $B(0;14)$, $C(7;21)$, $D(16;21)$, $E(16;18)$, $F(7;18)$, $G(7;0)$ einen "Fahrweg", d.h. einen Streckenzug $P_0P_1P_2...P_9$ an, bei dem die Ziellinie von der Teilstrecke P_8P_9 erreicht oder geschnitten wird!

Als Lösung genügt eine zeichnerische Darstellung oder die Angabe der Koordinaten der Punkte P_i ($i = 0, 1, 2, ..., 9$) ohne Begründung.

Aufgabe 160912:

Jemand behauptet, daß es möglich sei, aus 7 Papierstücken auf folgende Weise genau 1 976 Stücke herzustellen:

Man teilt einige der 7 Papierstücke jeweils in genau 7 Teile, danach wieder einige der nunmehr vorhandenen Papierstücke jeweils in genau 7 Teile u.s.w.

Ist es möglich, daß man auf diese Weise, indem man also das beschriebene Verfahren genügend lange fortsetzt, genau 1 976 Papierstücke erhält?

Aufgabe 160913:

Es sei ΔABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB, der Länge $\overline{AB} = b$ und der Schenkellänge $2b$. Die Punkte D bzw. E seien die inneren Punkte von AC bzw. BC, in denen die Schenkel den Kreis mit dem Durchmesser AB schneiden. Man ermittle den Umfang des Vierecks $ABED$.

Aufgabe 160914:

Stellen Sie fest, ob Körper existieren, für die folgendes gilt!

	Kantenlänge bzw. Durchmesser in cm	Oberflächeninhalt in cm^2	Volumen in cm^3
Würfel	a	b	b
Kugel	c	d	d
reguläres Tetraeder	e	f	f

Ermitteln Sie alle reellen Zahlen a, c, e, die diesen Bedingungen genügen! Dabei bezeichnen gleiche Buchstaben gleiche reelle Zahlen, während verschiedene Buchstaben nicht notwendig verschiedene Zahlen bezeichnen müssen.

16. Mathematik-Olympiade 1976/77
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

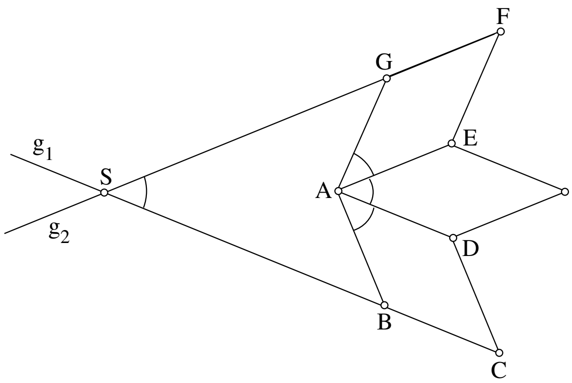
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160921:

Karlheinz betrachtet die in der Abbildung dargestellte, aus drei kongruenten Rhomben bestehende Figur. Dabei stellt er fest, daß der Winkel $\sphericalangle BSG$ genau so groß ist wie jeder der Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAE$, $\sphericalangle EAG$.

Nach einigem Nachdenken behauptet er, daß der folgende Satz gilt:

"Sind zwei Parallelogramme $ABCD$ und $AEFG$, die genau den Punkt A gemeinsam haben, so gegeben, daß die Winkel $\sphericalangle BAD$, $\sphericalangle DAE$ und $\sphericalangle EAG$ gleich groß und kleiner als 120° sind, dann hat auch der Winkel $\sphericalangle BSG$, den die Gerade g_1 durch B und C mit der Geraden g_2 durch F und G einschließt, die gleiche Größe wie jeder dieser drei Winkel."



Beweisen Sie diesen Satz!

Aufgabe 160922:

Die Zahl $\frac{20}{21}$ soll so in zwei Summanden zerlegt werden, daß

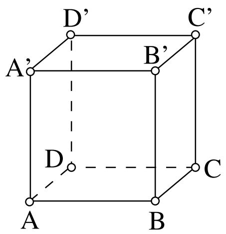
a) die beiden Summanden Brüche mit gleichem, von 21 verschiedenem Nenner und mit unterschiedlichen Zählern sind,

b) die beiden Summanden Brüche mit gleichem Zähler und mit unterschiedlichen Nennern sind.

Dabei sollen in jedem Bruch, der als Summand auftritt, jeweils der Zähler und der Nenner natürliche Zahlen sein, die zueinander teilerfremd sind.

Geben Sie für a) und b) je ein Beispiel einer derartigen Zerlegung an, und weisen Sie nach, daß es alle verlangten Eigenschaften hat!

Aufgabe 160923:



Gegeben sei ein Würfel $ABCDA'B'C'D'$ (siehe Abbildung). Wir betrachten alle geschlossenen Streckenzüge $XYZTX$, wobei X, Y, Z und T in dieser Reihenfolge beliebige innere Punkte der Kanten AA', BB', CC' bzw. DD' seien.

Untersuchen Sie, ob es eine Lage derartiger Punkte X, Y, Z, T so gibt, daß der Streckenzug $XYZTX$ unter allen betrachteten Streckenzügen

a) minimale,

b) maximale

Gesamtlänge besitzt!

Aufgabe 160924:

In der folgenden Anordnung von Zeichen

$$\begin{array}{cccccr} ab & X & ab & = & cad \\ Y & & Y & & Z \\ ae & X & ae & = & ffe \\ \hline ff & Y & ff & = & gg \end{array}$$

sollen die einzelnen Symbole so durch Elemente des jeweiligen Grundbereichs ersetzt werden, daß jeweils wahre Aussagen entstehen.

Dabei ist der Grundbereich für die Kleinbuchstaben b, d, e die Menge der Ziffern von 0 bis 9, für a, c, f, g die Menge der Ziffern von 1 bis 9, und der Grundbereich für die Großbuchstaben X, Y, Z ist die Menge der Operationszeichen "+", "−", "·" und ":". Gleiche Symbole bedeuten dabei gleiche, verschiedene Symbole verschiedene Elemente des jeweiligen Grundbereichs.

Untersuchen Sie, ob eine solche Ersetzung möglich ist, und ermitteln Sie, wenn dies zutrifft, alle Ersetzungen mit den geforderten Eigenschaften!

16. Mathematik-Olympiade 1976/77
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160931:

Ein dem Einheitskreis einbeschriebenes n-Eck habe die Eigenschaft, daß es bei einer Drehung um 180° um den Mittelpunkt des Einheitskreises in sich übergeht. Auf der Peripherie des Einheitskreises sei irgendein Punkt P gegeben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus der gegebenen Zahl n die Summe s der Quadrate der Abstände des Punktes P zu allen Punkten des n-Ecks!

Aufgabe 160932:

Man beweise folgenden Satz:

Sind a und b positive reelle Zahlen, für die $ab = 1$ gilt, dann gilt

$$(a + 1) \cdot (b + 1) \geq 4 \tag{1}$$

Untersuchen Sie ferner, in welchen Fällen in (1) das Gleichheitszeichen gilt!

Aufgabe 160933:

Wir betrachten die Menge aller Tetraeder, für die folgendes gilt:

(1) Eine der Flächen des Tetraeders ist die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks.

(2) Von den Kanten des Tetraeders haben drei die (gegebene) Länge a und drei die Länge $a\sqrt{2}$.

a) Zeigen Sie, daß zwei zueinander nicht kongruente Tetraeder existieren, die dieser Menge angehören!

b) Geben Sie für jedes dieser Tetraeder den Oberflächeninhalt an!

Aufgabe 160934:

Beweisen Sie, daß für keine Primzahl $p \neq 3$ und für keine natürliche Zahl $n \geq 1$ die Zahl $(3n - 1) \cdot p^2 + 1$ Primzahl ist!

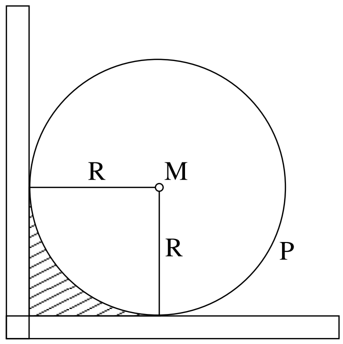
Aufgabe 160935:

Es sei ΔABC ein beliebiges Dreieck. Von allen Geraden, die die Fläche des Dreiecks ABC in zwei Teilflächen zerlegen, seien diejenigen Geraden ausgewählt, die zwei zueinander inhaltsgleiche Teilflächen erzeugen.

Untersuchen Sie, ob es einen Punkt P gibt, durch den alle diese Geraden gehen!

Aufgabe 160936:

Zwei Holzleisten sind so aneinandergeleimt, daß sie einen rechten Winkel bilden. In diesen rechten Winkel ist eine kreisförmige Pappscheibe P gelegt, die beide Schenkel des rechten Winkels berührt; der Radius R dieser Scheibe ist bekannt (siehe Abbildung). In den durch Schraffur gekennzeichneten Teil zwischen dem rechten Winkel und der Pappscheibe P soll eine weitere Pappscheibe gelegt werden, die die Schenkel des rechten Winkels und die Scheibe P berührt.



a) Man zeige: Es gibt genau einen Punkt für die Lage des Mittelpunktes der zweiten Pappscheibe.

b) Man ermittle den Radius dieser Pappscheibe.

17. Mathematik-Olympiade 1977/78
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170911:

Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn sich zwei natürliche Zahlen (≥ 1) um 1 977 unterscheiden, dann besitzt die (positive) Differenz ihrer Quadrate mindestens acht verschiedene netürliche Zahlen als Teiler.

Aufgabe 170912:

Ein Fahrzeug, dessen Querschnitt vereinfacht als ein Rechteck angenommen werden soll, soll durch einen Tunnel mit halbkreisförmigem Querschnitt fahren, dessen Höhe 3 m beträgt.

Ermitteln Sie die größtmögliche Höhe des Fahrzeuges, wenn es eine Breite von 3 m hat und wenn bei der Durchfahrt überall ein Spielraum von mindestens einem halben Meter zwischen der Tunnelwand und dem Fahrzeug vorhanden sein soll, d.h. wenn jeder Punkt des Fahrzeuges einen Abstand von mindestens einem halben Meter zur Tunnelwand haben soll!

Hinweis: Unter dem Abstand eines Punktes P im Innern des Tunnels zur Tunnelwand versteht man die Länge der Strecke PQ, wobei Q folgendermaßen definiert ist: Man lege durch P einen Querschnitt des Tunnels, wobei dieser als ein Halbkreis k mit den Endpunkten A und B erscheint. Ist M der Mittelpunkt von AB, so sei Q der Schnittpunkt von k mit der Geraden durch M und P.

Aufgabe 170913:

Herr A kaufte in einer Buchhandlung einige gleiche Bücher. Er hätte für jedes dieser Bücher einen ganzzahligen Betrag in Mark zu zahlen gehabt, der genau so groß war wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher. Wegen seines Sammeleinkaufs erhielt er jedoch für jedes Buch eine Mark Preisnachlaß.

Als er zahlen wollte, stellte er fest, daß er nur 10-Mark-Scheine bei sich hatte; zwar so viele, daß das zum Bezahlen gereicht hätte, doch betrug der Gesamtpreis kein ganzzahliges Vielfaches von 10 Mark. Der Verkäufer konnte ihm auch nicht herausgeben.

Herr B, ein Bekannter von Herrn A, hielt sich zur gleichen Zeit in der Buchhandlung auf. Auch er hatte einige (andere) gleiche Bücher gekauft, und auch bei ihm betrug der Preis jedes einzelnen Buches genau so viel Mark, wie die Anzahl der von ihm gekauften Bücher ausmachte. Er erhielt keinen Preisnachlaß.

Da seine Rechnung zusammen mit der von Herrn A einen Betrag ergab, der ausnahmslos mit 10-Mark-Scheinen beglichen werden konnte, bezahlte Herr A denjenigen Teilbetrag für Herrn B mit, der diesem noch fehlte, nachdem er einen möglichst großen Anteil seiner Rechnung mit 10-Mark-Scheinen beglichen hatte.

Wieviel Mark hatte Herr A für Herrn B damit ausgelegt?

Aufgabe 170914:

Ein Rechenautomat sei in der Lage, nach bestimmten Regeln "Zeichenreihen" umzuformen. Eine "Zeichenreihe" sei eine Aneinanderreihung der Zeichen A, B, S, a, b in beliebiger Reihenfolge und mit beliebiger Häufigkeit. Es seien folgende Regeln zur Umformung zugelassen:

(1) S wird ersetzt durch A.

(2) A wird ersetzt durch aAB.

(3) A wird ersetzt durch a.

(4) B wird ersetzt durch b.

Der Automat wendet bei jedem Umformungsschritt genau eine dieser Regeln auf genau ein Zeichen der Zeichenreihe an. Ist es möglich, daß auf eine vorliegende Zeichenreihe mehrere Regeln angewendet werden könnten, so entscheidet der Automat zufällig darüber, welche der Regeln angewendet wird. Ist keine der angegebenen Regeln auf eine Zeichenreihe anwendbar, so bleibt der Automat stehen und gibt die letzte Zeichenreihe aus.

Wir geben dem Automaten das Zeichen S ein.

a) Ist es möglich, daß der Automat 10 Umformungsschritte ausführt, ohne danach stehenzubleiben? Wenn das möglich ist, dann geben Sie für einen solchen Fall an, welche der Regeln bei diesen 10 Umformungsschritten angewendet wurden und wie oft dies für jede dieser Regeln der Fall war!

b) Wie viele Umformungsschritte wurden von dem Automaten insgesamt durchgeführt, falls er eine Zeichenreihe aus genau 5 Zeichen ausgibt?

c) Geben Sie alle Zeichenreihen aus 5 Zeichen an, die vom Automaten ausgegeben werden könnten!

17. Mathematik-Olympiade 1977/78
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170921:

Für jede reelle Zahl m und jede reelle Zahl n wird durch $y = f(x) = mx + n$ (x reell) eine Funktion f definiert, deren Graph eine Gerade g ist.

a) Es sei $m = \frac{1}{2}$ und n beliebig reell.

Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse!

b) Es seien m und n beliebig reell.

Ermitteln Sie die Koordinaten aller derjenigen Punkte auf g, deren Ordinate doppelt so groß ist wie ihre Abszisse! (Stellen Sie insbesondere fest, für welche m und n überhaupt ein solcher Punkt auf g existiert!)

Aufgabe 170922:

Jens sagt zu Christa: ”Ich kann die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau dreimal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen enthält.”

Nach kurzem Besinnen sagt Christa: ”Man kann sogar für jede natürliche Zahl $n > 2$ die Zahl 30 durch einen Term darstellen, der genau n-mal die Zahl 5 und außerdem nur Zeichen von Grundrechenoperationen und Klammern enthält.”

Beweisen Sie, daß Christas Aussage wahr ist!

Aufgabe 170923:

Gegeben seien ein Kreis k und ein Durchmesser AB von k. Der Mittelpunkt von k sei M. Sind C und D so auf k gelegen, daß $ABCD$ ein konvexes Viereck mit $AB \parallel DC$ ist, so sei α die Größe des Winkels $\sphericalangle CMB$ und β die Größe desjenigen spitzen Winkels, den die Sehne DC mit der Tangente t an k in D einschließt.

Man ermittle diejenigen Werte des Abstandes zwischen AB und CD, für die

a) $2\alpha = \beta$,

b) $\alpha = \beta$

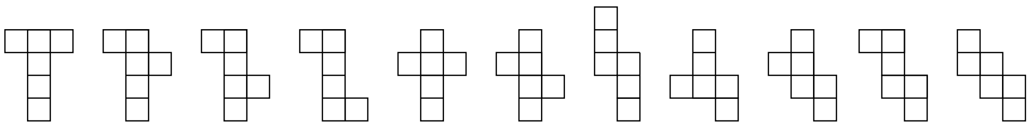
gilt.

Aufgabe 170924:

Die folgende Abbildung zeigt 11 Würfelnetze

a) Ermitteln Sie davon diejenigen, die sich in einem Zuge zeichnen lassen, d.h. als ein zusammenhängender Streckenzug, bei dem jede im Netz auftretende Strecke genau einmal durchlaufen wird!

b) Geben Sie für diese Netze je einen Anfangs- und Endpunkt eines solchen Streckenzuges an!



(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8) (9) (10) (11)

17. Mathematik-Olympiade 1977/78
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170931:

Ermitteln Sie die Anzahl der natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 (einschließlich dieser Grenzen), die weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar sind!

Aufgabe 170932:

Es sei $ABCD$ ein nicht überschlagenes Viereck, das die Seitenlängen $\overline{AB} = 9$ cm, $\overline{BC} = 6$ cm, $\overline{CD} = 11$ cm, $\overline{AD} = 8$ cm hat und in dem der Innenwinkel bei B die Größe 110° hat.

Untersuchen Sie durch Konstruktion, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist!

Von einem Rechteck $EFGH$ werden nun folgende Eigenschaften gefordert:

(1) Das Rechteck $EFGH$ ist flächengleich dem Viereck $ABCD$.

(2) A liegt auf der Rechteckseite EH zwischen E und H, und C liegt auf der Rechteckseite FG.

(3) Die Rechteckseite EH steht auf AC senkrecht.

Begründen und beschreiben Sie, wie sich alle diejenigen Punkte konstruieren lassen, die als Eckpunkt E eines Rechtecks $EFGH$ mit den geforderten Eigenschaften (1), (2), (3) auftreten können!

Aufgabe 170933:

In einem Dreieck ABC sei $\overline{AC} = b = 13$ cm und $\overline{BC} = a = 15$ cm. Das Lot von C auf die Gerade durch A und B sei CD, und es gelte $\overline{CD} = h_c = 12$ cm.

Ermitteln Sie für alle Dreiecke ABC, die diesen Bedingungen entsprechen, den Flächeninhalt I!

Aufgabe 170934:

Für ein gleichschenkliges Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ gelte $\overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA} = a$ sowie $\overline{AB} > a$.

a) Beweisen Sie, daß die Diagonale AC den Innenwinkel $\sphericalangle DAB$ des Trapezes halbiert!

b) Berechnen Sie die Länge von AB für den Fall, daß $\overline{\sphericalangle DAB} = 60°$ gilt!

Aufgabe 170935:

Beweisen Sie folgende Aussage!

Vergrößert man das Produkt von vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen um 1, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

Aufgabe 170936:

Für jedes $i = 1, 2, 3$ seien x_i und y_i zwei beliebige voneinander verschiedene reelle Zahlen, und es sei mit d_i die größere der beiden Zahlen x_i und y_i bezeichnet.

a) Beweisen Sie!

Wenn $x_1 \leq x_2 + x_3$ und $y_1 \leq y_2 + y_3$ gilt, dann gilt $d_1 \leq d_2 + d_3$.

b) Stellen Sie fest, ob auch die folgende Aussage gilt!

Wenn $d_1 \leq d_2 + d_3$ gilt, dann gilt auch $x_1 \leq x_2 + x_3$.

18. Mathematik-Olympiade 1978/79
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180911:

Aus einer quadratischen Papptafel von 8 dm Seitenlänge sollen 9 Würfelnetze, die nicht kongruent zueinander zu sein brauchen, ausgeschnitten werden. Aus jedem dieser Würfelnetze soll ein Würfel von 1 dm^3 Rauminhalt gefaltet werden können.

Zeigen Sie an einem Beispiel, daß es möglich ist, 9 derartige Netze auf einer solchen Tafel einzuzeichnen!

Es genügt eine solche Zeichnung; Beschreibung und Begründung werden nicht verlangt.

Aufgabe 180912:

Es seien a und b rationale Zahlen, für die folgendes gilt:

> Vermindert man a um 10%, so erhält man 297.
> Vergrößert man b um 10%, so erhält man 297.

Wieviel Prozent von a beträgt dann b? (Angabe des Prozentsatzes auf zwei Dezimalstellen gerundet.)

Aufgabe 180913:

In einem Zirkel Junger Mathematiker versuchen die Teilnehmer, folgende Aufgabe zu lösen:

> Die Zahl 30 soll dargestellt werden, indem dazu genau eine einziffrige Zahl genau neunmal benutzt wird, wobei noch die Zeichen der Grundrechenoperationen und Klammern erlaubt sind und die Potenzschreibweise zulässig ist.

Zeigen Sie, daß das für jede der einziffrigen Zahlen 1; 2; 3; 4, 5; 6; 7; 8 und 9 möglich ist! (Es genügt jeweils die Angabe eines Beispiels.)

Aufgabe 180914:

Gegeben seien zwei Punkte A_0 und A_1. Ihr Abstand voneinander werde mit a bezeichnet.

Man konstruiere die Eckpunkte eines Quadrats mit der Seitenlänge $3a$ unter alleiniger Benutzung eines Zirkels!

18. Mathematik-Olympiade 1978/79
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180921:

Eine Familie fährt mit der Straßenbahn. Der Vater zieht an der Zahlbox vier Fahrscheine, die durch sechsstellige Zahlen fortlaufend numeriert sind.

Der jüngste Sohn meint: "Gleichgültig, wie die erste der vier Zahlen lautet, eine unter diesen Zahlen muß eine durch 4 teilbare Quersumme haben."

Der ältere Sohn behauptet dagegen, daß unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine Zahl vorkommen muß, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.

Wer von beiden hat recht?

Aufgabe 180922:

In einer Wiederholungsstunde über Zahlbereiche werden u.a. folgende Aussagen gemacht:

(1) Das Produkt zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.

(2) Die Summe zweier verschiedener irrationaler Zahlen ist stets wieder eine irrationale Zahl.

(3) Die Summe einer rationalen und einer irrationalen Zahl ist stets eine irrationale Zahl.

Man entscheide von jeder dieser Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist!

Aufgabe 180923:

Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei B und $\overline{\sphericalangle BAC} = 60°$ ist die Länge r des Umkreisradius gegeben.

Berechnen Sie Umfang und Flächeninhalt dieses Dreiecks sowie die Länge der auf seiner Hypotenuse senkrecht stehenden Höhe!

Aufgabe 180924:

Man ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, die die folgenden Eigenschaften (1) bis (4) haben:

(1) z ist eine Primzahl.

(2) Jede Ziffer von z stellt eine Primzahl dar.

(3) Die Quersumme z' von z ist eine zweistellige Primzahl.

(4) Die Quersumme z'' von z' ist eine Primzahl.

18. Mathematik-Olympiade 1978/79
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180931:

Beweisen Sie folgenden Satz!

Wenn a, b, c und d reelle Zahlen sind, für die $ab - cd \neq 0$ gilt, dann gilt $a^2 + b^2 > 0$ oder $c^2 + d^2 > 0$.

Aufgabe 180932:

In der Aufgabe der 2. Stufe war zu zeigen, daß unter vier aufeinanderfolgenden sechsstelligen Zahlen nicht notwendig eine sein muß, deren Quersumme durch 4 teilbar ist.

Man ermittle die größte natürliche Zahl n, für die die folgende Aussage wahr ist:

"Es gibt n aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, unter denen sich keine befindet, deren Quersumme durch 4 teilbar ist."

Aufgabe 180933:

Gegeben sei ein Würfel, dessen Volumen mit V_1 bezeichnet sei. Verbindet man den Mittelpunkt je einer Seitenfläche dieses Würfels mit den Mittelpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines regelmäßigen Oktaeders. Das Volumen dieses Oktaeders sei V_2 genannt. Verbindet man nun wieder den Schwerpunkt je einer Seitenfläche dieses Oktaeders mit den Schwerpunkten aller benachbarten Seitenflächen, so erhält man die Kanten eines zweiten Würfels. Sein Volumen sei V_3 genannt.

Berechnen Sie das Verhältnis $V_1 : V_2 : V_3$!

Aufgabe 180934:

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C teile die von C auf die Hypotenuse AB gefällte Höhe diese im Verhältnis $1 : 3$.

Berechnen Sie die Größe der bei A bzw. B liegenden Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Aufgabe 180935:

Beweisen Sie, daß für jede Primzahl p der Rest, den p bei Division durch 30 läßt, entweder 1 oder eine Primzahl ist!

Aufgabe 180936:

Gegeben seien ein Dreieck ABC sowie zwei Punkte A_1 und B_2 im Innern dieses Dreiecks.

Bei der Verschiebung, die A in A_1 überführt, habe ΔABC das Bilddreieck $A_1B_1C_1$.
Bei der Verschiebung, die B in B_2 überführt, habe ΔABC das Bilddreieck $A_2B_2C_2$.
Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_1B_1C_1)$ sei die Fläche F_1.
Der Durchschnitt der Dreiecksflächen (ABC) und $(A_2B_2C_2)$ sei die Fläche F_2.

Man beweise, daß F_1 entweder durch eine Verschiebung oder durch eine zentrische Streckung in F_2 überführt werden kann.

Hinweis: Ist XYZ ein Dreieck, so verstehen wir unter der Dreiecksfläche (XYZ) die Menge aller Punkte auf dem Rande und im Innern des Dreiecks XYZ.

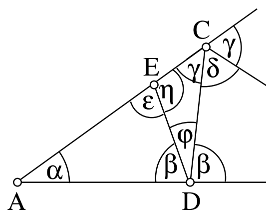
19. Mathematik-Olympiade 1979/80
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190911:

In der dargestellten Figur sei die Größe δ des Winkels $\sphericalangle DCB$ bekannt. Ferner sei vorausgesetzt, daß gleichbezeichnete Winkel auch gleiche Größen haben.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen die Winkelgrößen α, β, γ, ε, η und φ in Abhängigkeit von δ!



Aufgabe 190912:

	3	1	0	1	2	4	2	
3								a
3								b
1								c
2								d
2								e
0								f
2								g
	A	B	C	D	E	F	G	

Von den 49 Feldern in der Abbildung sollen einige angekreuzt werden. Je zwei angekreuzte Felder dürfen dabei höchstens einen Eckpunkt gemeinsam haben. In jeder Zeile und in jeder Spalte der Abbildung sollen genau so viele Felder angekreuzt werden, wie durch die am Rande stehenden Zahlen jeweils angegeben ist.

Ermitteln Sie für die anzukreuzenden Felder alle diejenigen Verteilungen, die diesen Forderungen entsprechen!

(Benutzen Sie zur Beschreibung des Lösungsweges die angegebenen Buchstaben! So erhält z.B. das erste Feld links oben die Bezeichnung aA.)

Aufgabe 190913:

Den Ecken eines ebenflächig begrenzten Körpers sollen Zahlen zugeordnet werden. Ist n die Anzahl der Ecken des Körpers, so soll dabei jeder Ecke genau eine der Zahlen $1, ..., n$ zugeordnet werden. Ferner soll erreicht werden: Wenn zu jeder Seitenfläche des Körpers die Summe derjenigen Zahlen gebildet wird, die den Ecken dieser Seitenfläche zugeordnet wurden, so erhält man für jede Seitenfläche des Körpers die gleiche Summe.

Beweisen Sie, daß eine solche Zuordnung möglich ist, wenn der Körper ein Würfel ist, dagegen nicht beim Tetraeder und nicht beim Oktaeder!

Aufgabe 190914:

Gegeben sei ein gleichseitiges Dreieck ABC.

Beschreiben Sie eine Konstruktion einer Seite eines Quadrates, das denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

In der Konstruktionsbeschreibung sollen wie üblich nur solche Konstruktionsschritte auftreten, die sich unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal ausführen lassen. Daß bei der Durchführung der Konstruktion (nach der von Ihnen gegebenen Beschreibung) eine Seite eines zu dem gegebenen Dreieck ABC flächeninhaltsgleichen Quadrates entsteht, ist zu beweisen.

19. Mathematik-Olympiade 1979/80
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190921:

An einer Kreuzung standen in einer Reihe hintereinander genau 7 Fahrzeuge. Jedes dieser Fahrzeuge war entweder ein Personenkraftwagen oder ein Lastkraftwagen. Über ihre Reihenfolge sei bekannt:

(1) Kein LKW stand direkt vor oder hinter einem anderen LKW.

(2) Genau ein PKW befand sich unmittelbar zwischen zwei LKW.

(3) Genau ein LKW befand sich unmittelbar zwischen zwei PKW.

(4) Genau drei PKW standen unmittelbar hintereinander.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, in welcher Reihenfolge diese 7 Fahrzeuge gestanden haben können!

Aufgabe 190922:

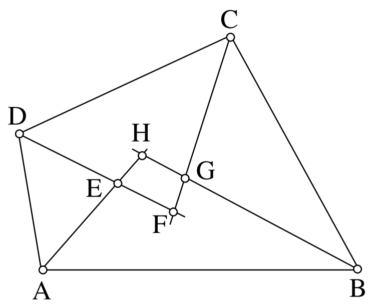
Die Zahlen in einem Zahlentripel (p, q, r) seien genau dann "Primzahldrillinge" genannt, wenn jede der drei Zahlen p, q, r eine Primzahl ist und wenn p, q, r in dieser Reihenfolge drei unmittelbar aufeinanderfolgende ungerade Zahlen sind.

Beweisen Sie, daß es genau ein Zahlentripel (p, q, r) gibt, das alle diese Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 190923:

Von einem konvexen Viereck $ABCD$ werde folgendes vorausgesetzt:

Konstruiert man die Winkelhalbierenden seiner Innenwinkel, so entstehen Schnittpunkte E, F, G, H, die so auf den Winkelhalbierenden angeordnet sind, wie dies aus dem Bild ersichtlich ist.



Beweisen Sie, daß unter dieser Voraussetzung stets in dem Viereck $EFGH$ die Summe zweier gegenüberliegender Innenwinkel 180° beträgt!

Aufgabe 190924:

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen x, für die folgendes gilt!

(1) x ist das Quadrat einer natürlichen Zahl.

(2) Vergrößert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

(3) Vermindert man x um 24, so erhält man das Quadrat einer natürlichen Zahl.

19. Mathematik-Olympiade 1979/80
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190931:

Beim Lösen einer Gleichung der Form $ax - 6 = bx - 4$ mit gegebenen natürlichen Zahlen a und b stellt Matthias fest:

(1) Die Gleichung hat eine natürliche Zahl x als Lösung.

(2) Die gleiche Zahl ergibt sich, wenn man - zur Durchführung der Probe - jeweils auf einer Seite dieser Gleichung die gefundene Lösung x einsetzt.

Ermitteln Sie alle Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die diese Feststellungen (1) und (2) zutreffen!

Aufgabe 190932:

Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, für das $\overline{AB} = a\sqrt{2}$ und $\overline{BC} = a$ gilt. Es sei F der Mittelpunkt der Seite CD.

Beweisen Sie, daß die Strecken AC und BF senkrecht zueinander verlaufen!

Aufgabe 190933:

Von n Kartons (n eine beliebige natürliche Zahl größer als 0) werde vorausgesetzt, daß ihre Abmessungen folgende Eigenschaften haben:

Der erste Karton kann in den zweiten gelegt werden (falls $n \geq 2$ ist);
die ersten beiden Kartons können nebeneinander in den dritten gelegt werden (falls $n \geq 3$ ist);
die ersten drei Kartons können nebeneinander in den vierten gelegt werden (falls $n \geq 4$ ist);
...
die ersten $n - 1$ Kartons können nebeneinander in den n-ten gelegt werden.

Beweisen Sie, daß es möglich ist, derartige n Kartons so ineinanderzulegen, daß folgende Forderungen erfüllt sind:

(1) Jeder Karton enthält in seinem Innern eine gerade Anzahl anderer Karton (wobei auch 0 als gerade Zahl zugelassen ist).

(2) Es gibt höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton enthalten sind.

(3) Betrachtet man für jeden Karton die Menge aller in seinem Inneren enthaltenen Kartons, so gibt es auch in dieser Menge höchstens zwei Kartons, die in keinem anderen Karton dieser Menge enthalten sind.

Aufgabe 190934:

a) Beweisen Sie, daß es im dekadischen Zahlensystem keine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, daß sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

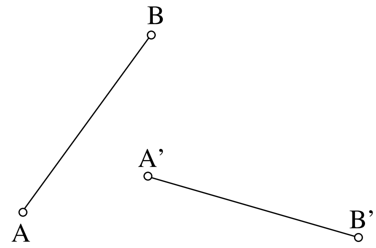
b) Beweisen Sie, daß es für eine geeignete natürliche Zahl $n \geq 3$ im Zahlensystem mit der Basis n eine dreistellige Primzahl gibt, deren drei einzelne Ziffern sich so anordnen lassen, daß sie drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen darstellen!

Aufgabe 190935:

Auf der Abbildung sind zwei zueinander kongruente Strecken AB und $A'B'$ gegeben. Gesucht ist ein Punkt Z der Zeichenebene mit folgender Eigenschaft:

Es gibt eine Drehung um Z, die A in A' und B in B' überführt.

Beschreiben und begründen Sie eine Konstruktion eines solchen Punktes Z (falls ein solcher existiert)! Untersuchen Sie, ob genau ein solcher Punkt Z existiert!



Aufgabe 190936:

Für geeignete natürliche Zahlen n gibt es ebenflächig begrenzte Körper mit n Ecken und weniger als n Flächen. Zum Beispiel ist für $n = 8$ ein Quader ein solcher Körper, da er genau 8 Ecken hat und von genau 6 ebenen Flächen (Rechtecken) begrenzt wird.

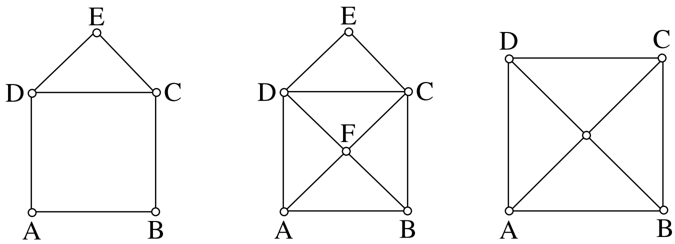
Untersuchen Sie, ob eine natürliche Zahl N die Eigenschaft hat, daß es für *jede* natürliche Zahl $n \geq N$ einen ebenflächig begrenzten Körper mit n Ecken gibt, der von weniger als n ebenen Flächen begrenzt wird! Wenn dies der Fall ist, ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N mit dieser Eigenschaft!

20. Mathematik-Olympiade 1980/81
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200911:

Entscheiden Sie für jede der drei abgebildeten Figuren a, b, c, ob sie in einem Zuge gezeichnet werden kann!



(a) (b) (c)

"In einem Zuge" soll bedeuten, daß beim Zeichnen jede Strecke genau einmal durchlaufen wird, keine anderen Linien als die in der Figur enthaltenen gezeichnet werden und der Bleistift während des Zeichnens nicht abgesetzt werden muß.

Ist ein solches Zeichnen möglich, so genügt als Lösung die Angabe einer Reihenfolge, in der die mit Buchstaben bezeichneten Punkte nacheinander erreicht werden können, um die gestellte Bedingung zu erfüllen. Anderenfalls ist die Nichtausführbarkeit zu begründen.

Aufgabe 200912:

Zwei Personen, A und B, spielen ein Würfelspiel nach folgenden Regeln:

Zunächst wird eine ganze Zahl Z vereinbart. Dann würfelt jeder mit 4 Würfeln, von denen jeder, wie üblich, die Augenzahlen 1 bis 6 trägt. Gelingt es einem Spieler, unter Benutzung der von ihm mit den vier Würfeln gewürfelten Zahlen (wobei die Zahl auf jedem Würfel genau einmal zu benutzen ist) die vereinbarte Zahl Z zu bilden, so erhält er einen Gewinnpunkt.

Dabei ist gestattet, die vier Zahlen unabhängig von ihrer Reihenfolge durch die Grundrechenarten zu verknüpfen, die Potenzschreibweise zu benutzen, in beliebiger Weise Klammern zu setzen und auch, die auftretenden Zahlen als Ziffern benutzend, aus ihnen mehrstellige Zahlen zu bilden.

Als bei einer Durchführung dieses Spieles die vereinbarte Zahl $Z = 12$ lautete, ergab sich:

Die von A gewürfelten Zahlen waren vier unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen. Die von B gewürfelten Zahlen waren alle vier gleich ein und derselben natürlichen Zahl.

Zeigen Sie, daß für alle möglichen Würfe, die diesen Bedingungen entsprechen, sowohl der Spieler A als auch der Spieler B einen Gewinnpunkt erreichen konnte!

Aufgabe 200913:

a) Kann der Bruch $\frac{1\,711}{3\,421}$ durch eine (von 1 verschiedene) natürliche Zahl gekürzt werden?

b) Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n der Zähler und der Nenner des Bruches $\frac{14n+1}{28n+5}$ zueinander teilerfremd sind!

Hinweis: Um die Rechnung zu erleichtern, kann man einen Satz über Teilbarkeit von Differenzen anwenden.

Aufgabe 200914:

Gegeben seien ein Kreis k_1 mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius $r_1 = 4,5$ cm sowie ein Kreis k_2 mit dem Mittelpunkt M_2 und dem Radius $r_2 = 2,5$ cm. Es sei $\overline{M_1M_2} = 7$ cm.

Konstruieren Sie sämtliche gemeinsamen Tangenten der Kreise k_1 und k_2! Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion!

20. Mathematik-Olympiade 1980/81
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200921:

Ermitteln Sie die größte Primzahl p, für die ein Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen a, b und c so existiert, daß $(a + p)(b + p)(c + p) = 1\,980$ gilt!

Ermitteln Sie zu dieser Primzahl p alle verschiedenen zugehörigen Tripel (a, b, c) mit der genannten Eigenschaft!

Aufgabe 200922:

a) Nennen Sie zwei verschiedene ganze Zahlen x, die die Ungleichung $\frac{x+3}{x-1} < 0$ erfüllen und bestätigen Sie das Erfülltsein dieser Ungleichung für die von Ihnen genannten Zahlen!

b) Ermitteln Sie die Menge aller derjenigen reellen Zahlen x, die diese Ungleichung erfüllen!

Aufgabe 200923:

Von zwei Kreisen k_1 und k_2 seien die Radien r_1 bzw. r_2 gegeben, wobei $r_1 > r_2$ gelte. Weiterhin sei vorausgesetzt, daß sich beide Kreise von außen berühren, also genau eine gemeinsame innere Tangente besitzen. Diese innere Tangente schneide die eine gemeinsame äußere Tangente beider Kreise in P und die andere gemeinsame Tangente in Q.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen aus r_1 und r_2 die Länge $\overline{PQ}$!

Aufgabe 200924:

a) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 3$, für die die folgende Aussage gilt!

"Jedes Prisma, das ein konvexes n-Eck als Grundfläche hat, hat genau $20n$ Diagonalen."

b) Ermitteln Sie für jedes Prisma, für das die in a) genannte Aussage gilt, die Anzahl der Flächendiagonalen und die der Raumdiagonalen!

Hinweis: Ein n-Eck heißt genau dann konvex, wenn jeder seiner Innenwinkel kleiner als 180° ist.

20. Mathematik-Olympiade 1980/81
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200931:

In dem folgenden Schema sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe ohne Rest entsteht. Dabei können verschiedene Buchstaben auch durch gleiche Ziffern ersetzt werden. Wie üblich darf eine mehrstellig geschriebene Zahl nicht die Anfangsziffer 0 haben.

Beweisen Sie, daß es genau eine Ersetzung dieser Art gibt, die den Anforderungen der Aufgabe genügt! Ermitteln Sie diese Ersetzung!

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
a & b & c & 5 & 5 & : & 5 & d & e & = & f & 5 & g \\
h & i & 5 & & & & & & & & & & \\
\hline
j & k & m & n & & & & & & & & & \\
p & 5 & k & r & & & & & & & & & \\
\hline
 & s & t & u & v & & & & & & & & \\
 & w & x & y & z & & & & & & & &
\end{array}$$

Aufgabe 200932:

Es seien a, b, c, d positive reelle Zahlen, für die $a > b > c > d$ sowie $a + d = b + c$ vorausgesetzt wird.

Beweisen Sie, daß dann stets $a^2 + d^2 > b^2 + c^2$ gilt!

Aufgabe 200933:

Von einem Rechteck $ABCD$ und einem Punkt P in seinem Innern wird $\overline{PA} = \sqrt{2}\,\text{cm}$, $\overline{PB} = \sqrt{3}\,\text{cm}$, $\overline{PC} = \sqrt{5}\,\text{cm}$ vorausgesetzt.

Beweisen Sie, daß die Länge $\overline{PD}$ durch diese Voraussetzungen eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Länge!

Aufgabe 200934:

Ermitteln Sie alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen a, b mit $a > b$, für die die folgenden Aussagen (1), (2), (3) zutreffen!

(1) Die Zahl a ist (in dekadischer Ziffernschreibweise) zweistellig, die Zahl b ebenfalls.

(2) Vertauscht man die Ziffern von a miteinander, so erhält man b.

(3) Subtrahiert man b^2 von a^2, so erhält man eine Quadratzahl.

Aufgabe 200935:

Beweisen Sie, daß man den Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ so durch eine Ebene schneiden kann, daß die Schnittfläche ein Quadrat ist!

Berechnen Sie aus der gegebenen Kantenlänge a des Tetraeders $ABCD$ den Flächeninhalt I eines solchen Quadrates!

Hinweis: Unter dem Körper eines regulären Tetraeders $ABCD$ versteht man denjenigen Körper, der von den Flächen der Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD begrenzt wird, wobei $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = \overline{BC} = \overline{BD} = \overline{CD}$ gilt.

Aufgabe 200936:

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\beta = 40°$ und $h_b = 5$ cm! Dabei sollen b die Länge der Seite AC, β die Größe des Winkels $\sphericalangle CBA$ und h_b die Länge der von B ausgehenden Höhe bedeuten.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es bis auf Kongruenz genau ein Dreieck ABC gibt, das die geforderten Größen b, β und h_b aufweist!

21. Mathematik-Olympiade 1981/82
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210911:

Während einer Fußballmeisterschaft spielten im Halbfinale die vier Mannschaften A, B, C und D. Über den Ausgang der Spiele und damit die Ermittlung der beiden Mannschaften für das Endspiel machten Kenner der vier Mannschaften folgende Voraussagen:

(1) Das Endspiel wird lauten: B gegen C.

(2) Das Endspiel wird nicht lauten: A gegen B.

(3) Das Endspiel wird lauten: C gegen D.

(4) Wenn A das Endspiel erreicht, dann erreicht B nicht das Endspiel.

(5) Das Endspiel wird von zwei der Mannschaften B, C, D bestritten.

Nach dem Halbfinale stellte sich heraus, daß genau zwei der Voraussagen (1) bis (5) falsch waren.

Zeigen Sie, daß es aufgrund dieser Angaben möglich ist, die beiden Mannschaften zu ermitteln, die das Endspiel erreichten!

Aufgabe 210912:

Herr Schulze trifft nach langer Zeit Herrn Lehmann und lädt ihn zu sich nach Hause ein. Unterwegs erzählt er Herrn Lehmann, daß er Vater von drei Kindern ist. Herr Lehmann möchte wissen, wie alt diese sind; ihm genügen Angaben in vollen Lebensjahren.

Herr Schulze antwortet: "Das Produkt der drei Altersangaben beträgt 72. Die Summe der drei Altersangaben ist meine Hausnummer. Wir sind gerade an unserem Haus angekommen; Sie sehen meine Nummer." Darauf erwidert Herr Lehmann: "Aus diesen Angaben kann man aber die drei Altersangaben nicht eindeutig ermitteln." "Das stimmt", meint Herr Schulze, "aber irgendwann zwischen der Geburt des zweiten und des dritten Kindes hat der Bau dieses Hauses stattgefunden. Ein Jahr und einen Tag lang haben wir an dem Haus gebaut." "Vielen Dank! Nun kann man die Altersangaben eindeutig ermitteln", beschließt Herr Lehmann das Gespräch.

Untersuchen Sie, ob es eine Zusammenstellung von drei Altersangaben gibt, für die alle Aussagen dieses Gespräches zutreffen! Untersuchen Sie, ob es nur eine solche Zusammenstellung, gibt! Wenn das der Fall ist, ermitteln Sie diese!

Aufgabe 210913:

Elsa behauptet:

> "Man kann die Zahl 1981 folgendermaßen darstellen: Man schreibt die natürlichen Zahlen von 1 bis zu einer geeigneten Zahl n der Reihe nach auf und setzt zwischen je zwei dieser Zahlen jeweils genau eines der vier Operationszeichen $+$, $-$, $\cdot$, $:$. Dabei braucht nicht überall dasselbe Operationszeichen gewählt zu werden; es brauchen auch nicht alle vier Operationszeichen vorzukommen. An der Reihenfolge der natürlichen Zahlen darf nichts geändert werden; Klammern und weitere Rechenzeichen sollen nicht auftreten. Das Ergebnis der so aufgeschriebenen Rechenaufgabe ist 1 981."

Ist Elsas Behauptung wahr?

Aufgabe 210914:

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha = 70°$, $\overline{\sphericalangle ACB} = \gamma = 50°$ und $r = 5\,\text{cm}$, wobei r der Radius des Umkreises des Dreiecks ABC ist!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

21. Mathematik-Olympiade 1981/82
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210921:

In der Divisionsaufgabe $a : b = c$ sind a, b, c, so durch natürliche Zahlen zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Divisionsaufgabe entsteht, wobei nur die Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, und zwar jede genau einmal, verwendet werden sollen.

Ermitteln Sie alle Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen, die diesen Anforderungen genügen!

Aufgabe 210922:

Gegeben sei ein beliebiger Quader, für dessen Kantenlängen a, b und c die Beziehung $a < b < c$ gilt.

Untersuchen Sie, ob es einen ebenen Schnitt durch diesen Quader so gibt, daß die Schnittfigur ein Quadrat ist!

Aufgabe 210923:

Beweisen Sie, daß reelle Zahlen x, y, z genau dann das System der drei Ungleichungen

$$\begin{aligned} x + y + z &> 0, \\ x \cdot y \cdot z &> 0, \\ xy + xz + yz &> 0 \end{aligned}$$

erfüllen, wenn x, y und z positiv sind!

Aufgabe 210924:

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.

Konstruieren Sie eine Parallele zu BC so, daß sie die Dreieckseiten AB und AC in Punkten D bzw. E schneidet, für die $\overline{ED} = \overline{DB} + \overline{EC}$ gilt!

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob es (zu dem gegebenen Dreieck ABC) genau eine Parallele der verlangten Art gibt!

21. Mathematik-Olympiade 1981/82
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210931:

Über eine natürliche Zahl x werden vier Paare von Aussagen gemacht:

Paar A: (1) x ist eine zweistellige Zahl.
(2) x ist kleiner als 1 000.

Paar B: (1) Die zweite Ziffer der Zahl x ist eine 0.
(2) Die Quersumme der Zahl x ist 11.

Paar C: (1) x wird mit genau drei Ziffern geschrieben, und zwar mit drei gleichen Ziffern.
(2) x ist durch 37 teilbar.

Paar D: (1) Die Quersumme der Zahl x ist 27.
(2) Das Produkt der Zahlen, die durch die einzelnen Ziffern von x dargestellt werden, beträgt 0.

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen x mit $x \neq 0$ gibt, für die in jedem der vier Paare A, B, C, D eine Aussage wahr und eine Aussage falsch ist! Gibt es solche Zahlen x, so ermitteln Sie alle diese Zahlen!

Aufgabe 210932:

Ist $ABCD$ ein Rechteck, für dessen Seitenlängen $b = \overline{AD} = 6$ cm und $a = \overline{AB} > b$ gilt, so seien E, G diejenigen Punkte auf CD und F, H diejenigen Punkte auf AB, für die $AFED$ und $HBCG$ Quadrate sind.

Beweisen Sie bei diesen Bezeichnungen, daß es genau eine Seitenlänge a gibt, für die $EH \perp AC$ gilt, und ermitteln Sie diese Seitenlänge!

Aufgabe 210933:

Beweisen Sie, daß die Ungleichung

$$1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot ... \cdot 998^{998} \cdot 999^{999} \cdot 1\,000^{1\,000} < 1\,000^{500\,000} \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 210934:

Konstruieren Sie ein Dreieck ABC aus $\alpha = 50°$, $r = 4$ cm und $h_a = 6$ cm! Dabei bezeichne α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$, r den Umkreisradius und h_a die Länge der auf BC senkrechten Höhe des Dreiecks ABC.

Beschreiben und begründen Sie Ihre Konstruktion! Untersuchen Sie, ob ein Dreieck ABC durch die gegebenen Stücke bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist! Dabei sollen Dreiecke ABC, $A'B'C'$ auch dann als kongruent bezeichnet werden, wenn sie miteinander mit beliebiger Reihenfolge der Eckpunkte zur Deckung gebracht werden können.

Aufgabe 210935:

Beweisen Sie den folgenden Satz!

Die Summe zweier Quadratzahlen ist genau dann durch 11 teilbar, wenn jede dieser beiden Quadratzahlen durch 11 teilbar ist.

Aufgabe 210936:

Bei einem Tetraeder $ABCD$ seien die Kantenlängen $\overline{AB} = 10\,\text{cm}$, $\overline{BC} = 6\,\text{cm}$, $\overline{AC} = 8\,\text{cm}$, $\overline{AD} = 13\,\text{cm}$, $\overline{BD} = 13\,\text{cm}$ geben, das Lot von D auf die Fläche des Dreiecks ABC sei 12 cm lang.

Beweisen Sie, daß durch diese Angaben die Länge der Kante CD eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie diese Kantenlänge!

22. Mathematik-Olympiade 1982/83
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220911:

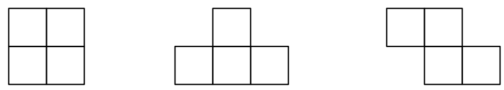
Uwe sagt zu Gert: "Ich habe hier eine zweistellige Zahl z, deren Ziffern beide von 0 verschieden sind. Wenn ich diese Ziffern in umgekehrter Reihenfolge schreibe und dahinter die Quersumme von z setze, dann erhalte ich das Quadrat von z."

Gert findet ohne Benutzung der Zahlentafel eine Zahl z, die diese Eigenschaften hat.

Zeigen Sie, daß aus Uwes Angaben die Zahl z ohne Benutzung der Zahlentafel eindeutig ermittelt werden kann, und geben Sie z an!

Aufgabe 220912:

Ist n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$, so bezeichne F_n eine quadratische Fläche, die wie ein Schachbrett in n gleich große quadratische Felder unterteilt ist. Ferner sei von Papptäfelchen der abgebildeten Formen (a), (b), (c) jeweils eine beliebige Anzahl vorhanden.



(a) (b) (c)

(Jedes dieser Täfelchen besteht aus vier gleich großen quadratischen Feldern, deren jedes den n^2 Feldern von F_n kongruent ist.)

Die Fläche F_n soll mit derartigen Täfelchen lückenlos bedeckt werden, und zwar soll dabei von jeder der Sorten (a), (b), (c) mindestens ein Täfelchen verwendet werden. Außerdem soll kein Feld von F_n mehrfach überdeckt werden und kein Täfelchen über F_n hinausragen.

a) Beweisen Sie, daß diese Bedingungen für alle ungeraden n und für alle $n \leq 4$ nicht erfüllbar sind!

b) Zeigen Sie, daß die Bedingungen für $n = 6$ erfüllbar sind!

c) Untersuchen Sie, für welche geraden Zahlen $n \geq 8$ die Bedingungen erfüllbar sind!

Aufgabe 220913:

a) Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die der Term $\frac{4x-4}{2x-3}$ definiert ist.

b) Ermitteln Sie unter den in a) gefundenen Zahlen x alle diejenigen, für die $0 < \frac{4x-4}{2x-3} < 1$ gilt!

Aufgabe 220914:

In einer Ebene ε befinde sich ein n-Eck mit den Eckpunkten A_1, A_2, ..., A_n. Dieses sei die Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze S. Das Volumen der Pyramide sei V_P. Die Mittelpunkte der Kanten A_1S, A_2S, ..., A_nS seien M_1, M_2, ..., M_n. Ferner sei B_1 ein beliebiger Punkt in der Ebene ε.

Die zu M_1B_1 parallele Gerade jeweils durch einen der Punkte M_2, M_3, ..., M_n schneide ε in B_2, B_3, ..., B_n. Der Körper K mit den Eckpunkten B_1, B_2, ..., B_n, M_1, M_2, ..., M_n habe das Volumen V_K.

a) Beweisen Sie, daß alle Punkte M_1, M_2, .., M_n in einer gemeinsamen zu ε parallelen Ebene liegen und K daher ein Prisma ist!

b) Beweisen Sie, daß V_K durch V_P eindeutig bestimmt ist, und ermitteln Sie V_K in Abhängigkeit von V_P!

22. Mathematik-Olympiade 1982/83
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220921:
Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen:

(1) $n - 9$ ist eine Primzahl.

(2) $n^2 - 1$ ist durch 10 teilbar.

Aufgabe 220922:
Beweisen Sie folgende Aussage!

Wenn x, y und z von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, dann sind

$$a = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 + (x - y\sqrt{z})^2}{2},$$
$$b = \frac{(x + y\sqrt{z})^2 - (x - y\sqrt{z})^2}{2},$$
$$c = a^2 - (x^2 - y^2 z)^2$$

natürliche Zahlen, und b ist ein Teiler von c.

Aufgabe 220923:
Von einem Quadrat $ABCD$ und vier Punkten P, Q, R, S wird folgendes vorausgesetzt:

(1) P liegt auf der Strecke AB zwischen A und B,

(2) Q liegt auf der Strecke BC zwischen B und C,

(3) R liegt auf der Strecke CD zwischen C und D,

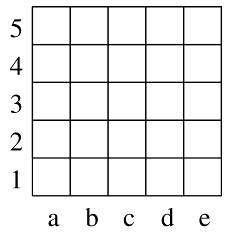
(4) S liegt auf der Strecke DA zwischen D und A,

(5) es gilt $PR \perp QS$.

Untersuchen Sie, ob für jede Lage der Punkte, bei der die Voraussetzungen (1) bis (5) erfüllt sind, stets dieselbe der drei Aussagen $\overline{PR} < \overline{QS}$, $\overline{PR} = \overline{QS}$, $\overline{PR} > \overline{QS}$ gilt! Wenn das der Fall ist, nennen Sie diese Aussage!

Aufgabe 220924:

Die Abbildung zeigt ein Quadrat, das in 25 zueinander kongruente quadratische Felder a1, a2, a3, a4, ..., e1, e2, e3, e4, e5, zerlegt ist. Von diesen Feldern sollen genau fünf so durch Schwarzfärbung markiert werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen genau ein markiertes Feld auftritt.



Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Markierungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei gelten zwei Markierungen genau dann als nicht verschieden, wenn sie auseinander durch eine Drehung, eine Spiegelung oder mehrere solcher Abbildungen hervorgehen.

22. Mathematik-Olympiade 1982/83
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220931:

Man ermittle alle diejenigen (im dekadischen System geschriebenen) dreistelligen Zahlen z, die die Gleichung $z = (a+b)^c$ erfüllen, wobei a, b und c in irgendeiner Reihenfolge die Ziffern von z sind.

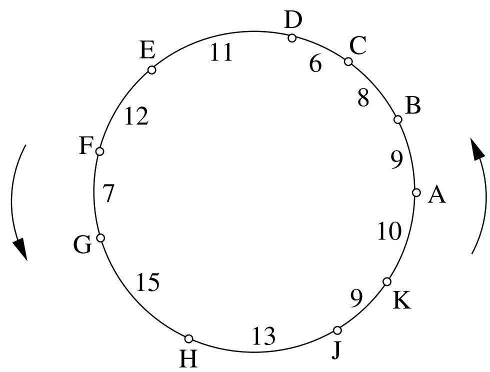
Aufgabe 220932:

Über zwei Kreise k_1, k_2 und ihre Mittelpunkte M_1 bzw. M_2 wird vorausgesetzt, daß der Kreis k_2 durch den Punkt M_1 geht und den Kreis k_1 in zwei Punkten schneidet. Ferner sei der Schnittpunkt von k_1 mit demjenigen Strahl, der den Anfangspunkt M_1 hat und durch M_2 geht, S genannt. Die Berührungspunkte, die eine gemeinsame Tangente der beiden Kreise k_1 und k_2 mit diesen Kreisen hat, seien P_1 und P_2 genannt.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets P_2S auf M_1S senkrecht steht!

Aufgabe 220933:

Auf einer kreisförmig verlaufenden Straße vom 1 000 km Länge (Rundkurs) stehen 10 Autos A, B, C, D, E, F, G, H, J und K. Sie haben Kraftstoffvorräte von 8; 10; 6; 13; 5; 13; 9; 16; 6 bzw. 14 Litern bei sich. Diese 100 Liter würden gerade dafür ausreichen, daß ein beliebiges der zehn Autos die 1 000 km einmal zurücklegen kann. Die Anordnung der Autos, die Fahrtrichtung und die Weglängen zwischen den Autos sind aus dem Bild ersichtlich.



Untersuchen Sie, ob es mindestens ein Auto gibt, das bei dieser Ausgangsstellung der Autos die 1 000 km dadurch zurücklegen kann, daß es unterwegs den Kraftstoff der übrigen Autos, die an ihren Stellen stehenbleiben, übernimmt! (Verluste beim Übernehmen seien unberücksichtigt.)

Ist das der Fall, so ermitteln Sie alle diejenigen Autos, für die eine solche Fahrt möglich ist!

Aufgabe 220934:

Jens behauptet, daß man alle natürlichen Zahlen mit Ausnahme von endlich vielen als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Dirk behauptet dagegen, daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt, die man nicht als Summe von zwei Quadratzahlen darstellen kann.

Wer hat recht?

Aufgabe 220935:

Auf der Oberfläche einer Kugel vom Radius 1 seien k_1 und k_2 zwei beliebige voneinander verschiedene Großkreise. Ihre Schnittpunkte seien P und Q.

Beweisen Sie, daß für jeden Punkt S der Kugeloberfläche die Summe $\overline{PS}^2 + \overline{QS}^2$ denselben Wert hat! Ermitteln Sie diesen Wert!

Hinweis:

1. Unter einem Großkreis versteht man einen Kreis, der sich als Schnitt der Kugeloberfläche mit einer durch den Mittelpunkt der Kugel gehenden Ebene ergibt.
2. Streckenlängen, z.B. $\overline{PS}$, $\overline{PQ}$ seien geradlinig gemessen, nicht etwa auf der Kugeloberfläche. Dabei sei stets dieselbe Maßeinheit gewählt, aber der Einfachheit halber nur die Maßzahl angegeben.

Aufgabe 220936:

Von einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{BC} = a$ gegeben. Die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle CAB$ und $\sphericalangle ABC$ mögen einander in P schneiden. Durch P sei die Parallele zu AB gelegt. Sie schneide AC in Q und BC in R.

Ermitteln Sie die Länge $\overline{QR}$ in Abhängigkeit von den drei gegebenen Seitenlängen!

23. Mathematik-Olympiade 1983/84
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230911:

Für die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen a und b mit $5 \leq a \leq 10$ und $5 \leq b \leq 10$ gibt es folgende "Fingerregel":

> Man streckt an der einen Hand so viele Finger aus, wie die erste Zahl a größer als 5 ist. Das gleiche macht man mit der anderen Hand für die zweite Zahl b. Die Gesamtzahl der ausgestreckten Finger wird mit 10 multipliziert. Die Zahl der nicht ausgestreckten Finger der einen Hand wird mit der Zahl der nicht ausgestreckten Finger der anderen Hand multipliziert und zu dem vorhergegangenen Produkt addiert. Die dabei erhaltene Summe ist das gesuchte Ergebnis $a \cdot b$.

Beweisen Sie, daß diese "Fingerregel" für alle genannten a und b gilt!

Aufgabe 230912:

Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x und y, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die Zahl y entsteht aus x durch Vertauschen der beiden Ziffern.

(2) Es gilt $x + y = 121$.

Aufgabe 230913:

Ein regelmäßiges Tetraeder soll in drei volumengleiche (nicht regelmäßige) Tetraeder zerlegt werden.

a) Geben Sie zwei Möglichkeiten einer solchen Zerlegung an!

b) Beweisen Sie, daß die beiden von Ihnen angegebenen Zerlegungen verschieden sind! Dabei wird eine Zerlegung in drei Tetraeder T_1, T_2, T_3 verschieden von einer Zerlegung in drei weitere Tetraeder genannt, wenn sich diese nicht so als T_1', T_2', T_3' bezeichnen lassen, daß $T_1 \cong T_1'$, $T_2 \cong T_2'$ und $T_3 \cong T_3'$ gilt.

Aufgabe 230914:

Ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und $\overline{AB} = a > \overline{CD} = c$ soll durch eine zu AB parallele Strecke GH in zwei flächeninhaltsgleiche Teile zerlegt werden.

Beweisen Sie, daß es genau eine solche Strecke GH gibt und daß ihre Länge $\overline{GH} = s$ eindeutig durch a und c bestimmt ist! Ermitteln Sie s in Abhängigkeit von a und c!

23. Mathematik-Olympiade 1983/84
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230921:

Ermitteln Sie alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen x, für die die Summe aus x und der durch Vertauschen der Ziffern von x entstehenden Zahl y eine Quadratzahl ist!

Aufgabe 230922:

Von einem Trapez $ABCD$ wird vorausgesetzt

(1) Es gilt $AB \parallel DC$.

(2) Es gilt $\overline{AB} > \overline{DC}$.

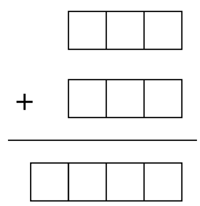
(3) Das Trapez besitzt einen Innenwinkel mit einer Größe von 110°.

(4) Die Diagonalen AC und BD sind die Halbierenden der Winkel $\sphericalangle DAB$ bzw. $\sphericalangle ABC$.

Zeigen Sie, daß durch diese Voraussetzungen die Größen aller Innenwinkel des Trapezes eindeutig bestimmt sind und ermitteln Sie diese Größen!

Aufgabe 230923:

In das nebenstehende Schema einer Additionsaufgabe soll in jedes Kästchen eine Ziffer so eingetragen werden, daß jede der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) genau einmal auftritt und in den vorderen Kästchen keine 0 steht. Außerdem soll genau dreimal ein Übertrag auftreten.



Ermitteln Sie alle diejenigen vierstelligen Zahlen, die unter diesen Bedingungen als dritte Zeile (Summe) dieser Aufgebe möglich sind!

Aufgabe 230924:

Beweisen Sie:

Ist p eine Primzahl, dann ist $\sqrt{p}$ keine rationale Zahl.

23. Mathematik-Olympiade 1983/84
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230931:

Man ermittle alle Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) x, y und z sind Primzahlen.

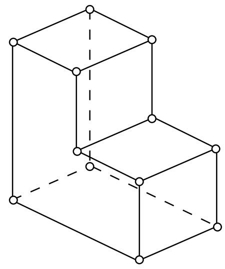
(2) Jede Ziffer aus den Zifferndarstellungen von x, y und z (im dekadischen Zahlensystem) stellt eine Primzahl dar.

(3) Es gilt $x < y$.

(4) Es gilt $x + y = z$.

Aufgabe 230932:

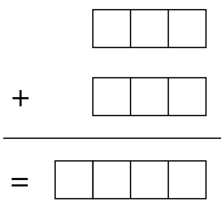
In der Abbildung ist ein Körper K skizziert. Er besteht aus drei Würfeln der Kantenlänge 1 cm, die in der angegebenen Anordnung fest zusammengefügt sind.



Aus genügend vielen Körpern dieser Gestalt K soll ein (vollständig ausgefüllter) Würfel W (Kantenlänge n Zentimeter) zusammengesetzt werden.

Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die das möglich ist!

Aufgabe 230933:



In dem nebenstehenden Schema soll in jedes Kästchen genau eine der zehn Ziffern (des dekadischen Zahlensystems) so eingetragen werden, daß jede der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 einmal vorkommt und daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht.

Beweisen Sie, daß es nicht möglich ist, durch eine solche Eintragung auch noch die zusätzliche Forderung zu erfüllen, daß bei der Ausführung der Addition genau zwei Überträge auftreten!

Aufgabe 230934:

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen x, für die

$$-5 \leq \frac{4x-3}{2x+1} < 6 \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 230935:

In einem Dreieck ABC schneide eine Parallele zu AB, über deren Lage sonst nichts vorausgesetzt werden soll, die Seite AC in einem Punkt A_1 zwischen A und C, und sie schneide die Seite BC in B_1. Ferner sei

P auf AB ein Punkt ein Punkt zwischen A und B, über dessen Lage sonst ebenfalls nichts vorausgesetzt werden soll. Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC sei F_0, der Flächeninhalt des Dreiecks A_1B_1C sei F_1.

Ermitteln Sie den Flächeninhalt F des Vierecks A_1PB_1C in Abhängigkeit von F_0 und F_1!

Aufgabe 230936:

Drei Schüler X, Y, Z diskutieren über die Möglichkeiten, ein gleichseitiges Dreieck D in drei flächengleiche Dreiecke D_1, D_2, D_3 zu zerlegen.

X behauptet: Es gibt genau drei verschiedene derartige Zerlegungen.
Y behauptet: Es gibt genau vier verschiedene derartige Zerlegungen.
Z behauptet: Es gibt mehr als vier verschiedene derartige Zerlegungen.

Welcher der drei Schüler hat recht?

Hinweis: Zwei Zerlegungen von D (einmal in D_1, D_2, D_3, ein zweites Mal in D'_1, D'_2, D'_3) werden dabei genau dann als verschieden bezeichnet, wenn es keine Reihenfolge der Bezeichnungen D'_1, D'_2, D'_3 gibt, für die $D_1 \cong D'_1$, $D_2 \cong D'_2$, $D_3 \cong D'_3$ gilt.

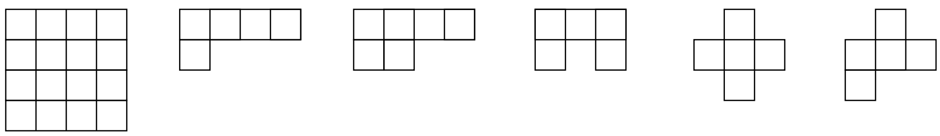
24. Mathematik-Olympiade 1984/85
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240911:

a) Ein quadratisches Feld aus 25 Einheitsquadraten (Bild a) soll so zerlegt werden, daß jedes Teilstück zu einer der (aus jeweils fünf Einheitsquadraten bestehenden) Figuren in Bild b bis f kongruent ist und daß dabei auch jede dieser Figuren mindestens einmal vorkommt. Geben Sie eine derartige Zerlegung an!

b) Ermitteln Sie alle diejenigen natürlichen Zahlen $n > 0$, für die eine solche Zerlegung eines $n \times n$-Feldes möglich ist!



a) b) c) d) e) f)

Aufgabe 240912:

Beweisen Sie, daß die Zahl 91 nicht als Produkt von fünf verschiedenen ganzen Zahlen dargestellt werden kann!

Aufgabe 240913:

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei A. Der Fußpunkt des Lotes von A auf BC sei D.

Beweisen Sie, daß dann stets $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AC} \cdot \overline{AD}$ gilt!

Aufgabe 240914:

Drei Schüler diskutieren, welche Beziehung zwischen den Zahlen 1 und $\frac{2}{x-10}$ für reelle Zahlen $x \neq 10$ gilt. Sie stellen fest:

Für $x = 11$ ist $\frac{2}{x-10} = 2$, also $1 < \frac{2}{x-10}$;
für $x = 12$ ist $1 = \frac{2}{x-10}$;
für $x = 13$ ist $1 > \frac{2}{x-10}$.

Anschließend behauptet Marion: Die Gleichung $1 = \frac{2}{x-10}$ gilt genau für $x = 12$.
Norbert behauptet: Die Ungleichung $1 < \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x < 12$.
Petra behauptet: Die Ungleichung $1 > \frac{2}{x-10}$ gilt genau für alle $x > 12$.

Untersuchen Sie für jede dieser drei Behauptungen, ob sie wahr oder falsch ist!

24. Mathematik-Olympiade 1984/85
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240921:

Eine Schule hat 510 Schüler. Beim Anfertigen einer Schülerliste stellt jemand die Frage, ob auf derartigen Listen von 510 Personen mehrmals das gleiche Datum (Tag- und Monatsangabe, ohne Berücksichtigung der Jahresangabe) als Geburtstag auftreten wird.

Anke behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden läßt, befinden sich zwei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."

Bertold behauptet: "Auf jeder Liste, die sich durch Zusammenstellung von 510 Personen bilden läßt, befinden sich drei Personen, die das gleiche Datum als Geburtstag haben."

Untersuchen Sie sowohl für Ankes als auch für Bertolds Behauptung, ob sie wahr oder falsch ist!

Aufgabe 240922:

Man ermittle alle diejenigen reellen Zahlen x mit $x \neq 5$, für die

$$\frac{x}{5-x} < 4 \quad \text{gilt.}$$

Aufgabe 240923:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat. Für zwei verschiedene Punkte E und F, die in irgendeiner Reihenfolge auf der Seite BC zwischen B und C liegen, gelte $\overline{BE} = \overline{FC}$ und $\overline{BE} : \overline{EF} = 41 : 11$. Die Gerade durch A und E sei g, die Gerade durch D und F sei h, der Schnittpunkt von g und h sei S.

Untersuchen Sie, ob bei einer Lage von Punkten A, B, C, D, E, F, S, die diese Voraussetzungen erfüllt, das Dreieck EFS gleichseitig ist!

Aufgabe 240924:

Beweisen Sie:

Sind a und b beliebige ganze Zahlen, wobei nur $b \neq 0$ vorausgesetzt wird, so ist die Zahl

$$z = a^5 + 3a^4b - 5a^3b^2 - 15a^2b^3 + 4ab^4 + 12b^5$$

das Produkt aus fünf ganzen Zahlen, von denen keine zwei einander gleich sind!

24. Mathematik-Olympiade 1984/85
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240931:

Beweisen Sie, daß es keine vierstellige Quadratzahl z mit den folgenden Eigenschaften (1) und (2) gibt!

(1) Die erste und die dritte Ziffer von z sind einander gleich.

(2) Die zweite und die vierte Ziffer von z sind einander gleich.

Aufgabe 240932:

In einem rechtwinkligen Koordinatensystem seien der Kreis k um den Ursprung mit dem Radius $\sqrt{2}$ und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x + 10$ gezeichnet.

Ermitteln Sie Gleichungen für die beiden zu g parallelen Tangenten an k!

Aufgabe 240933:

Es sei $ABCD$ ein regelmäßiges Tetraeder mit der Kantenlänge a. Der Mittelpunkt der Kante AB sei M, der Mittelpunkt der Kante CD sei N.

a) Beweisen Sie, daß die Gerade durch M und N sowohl auf der Geraden g durch A und B als auch auf der Geraden h durch C und D senkrecht steht!

b) Ermitteln Sie den Abstand $\overline{MN}$ zwischen M und N!

c) Beweisen Sie, daß für jeden Punkt X auf g und jeden Punkt Y auf h der Abstand $\overline{XY}$ zwischen X und Y die Ungleichung $\overline{XY} \geq \overline{MN}$ erfüllt!

Aufgabe 240934:

Bei einer Diskussion in der mathematischen Arbeitsgemeinschaft berichtet Norbert, er habe eine Quadratzahl $n^2 > 1$ als Summe von n natürlichen Zahlen dargestellt, von denen keine zwei einander gleich waren.

Anke meint: "Es gibt sogar unendlich viele Quadratzahlen $n^2 > 1$, die jeweils als Summe von n natürlichen Zahlen darstellbar sind, unter denen sich keine zwei gleichen befinden."

Bernd fragt: "Gibt es auch Quadratzahlen $n^2 > 1$, die sich als Summe von $2n$ natürlichen Zahlen darstellen lassen, unter denen es keine zwei gleichen gibt?"

a) Beweise Ankes Aussage!

b) Beantworte Bernds Frage!

Aufgabe 240935:

Beweisen Sie, daß für die Kathetenlängen a, b und die Hypotenusenlänge c jedes rechtwinkligen Dreiecks die Ungleichung $a^5 + b^5 < c^5$ gilt!

Aufgabe 240936:

Es sei AB eine Strecke und P ein Punkt auf der Verlängerung von BA über A hinaus. Von P werden an alle diejenigen Kreise, die AB als Sehne haben, die Tangenten gelegt.

Beweisen Sie, daß es dann einen Kreis um P gibt, auf dem die Berührungspunkte aller dieser Tangenten liegen!

25. Mathematik-Olympiade 1985/86
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250911:
Aus den Ziffern 1, 9, 8, 5 seien alle möglichen vierstelligen Zahlen gebildet, wobei jede der Ziffern in jeder dieser Zahlen genau einmal vorkommen soll.

Ermitteln Sie die Anzahl aller derartigen Zahlen, die

a) durch 2,

b) durch 3,

c) durch 4,

d) durch 5,

e) durch 6

teilbar sind, und geben Sie diese Zahlen jeweils an!

Aufgabe 250912:
Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Paare (a, b) einstelliger natürlicher Zahlen a und b, für die

$$a < \overline{a,b} < b \quad \text{gilt!}$$

Dabei gilt die 0 als einstellige Zahl, und mit $\overline{a,b}$ sei diejenige Dezimalzahl bezeichnet, die die Ziffer a vor dem Komma und die Ziffer b nach dem Komma hat.

Aufgabe 250913:
Man beweise:

Für jede natürliche Zahl n mit $n \geq 6$ ist es möglich, eine Quadratfläche in n (nicht notwendig kongruente) Teilquadratflächen zu zerlegen.

Aufgabe 250914:
Drei Kreise mit dem gegebenen Radius r mögen so in einer Ebene liegen, daß jeder die beiden anderen berührt. An je zwei dieser drei Kreise werde diejenige gemeinsam Tangente gelegt, die keinen Punkt mit dem dritten Kreis gemeinsam hat. Mit diesen drei Tangenten hat man ein gleichseitiges Dreieck konstruiert.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von r!

Hinweis: Für Zahlenwerte, die bei der Flächeninhaltsangabe auftreten, ist eine Verwendung von Näherungswerten zugelassen (aber nicht gefordert); dann jedoch mit einer Angabe - und Begründung -, auf wie viele Dezimalstellen der Näherungswert genau ist.

25. Mathematik-Olympiade 1985/86
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250921:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) von natürlichen Zahlen a, b, c, für die

$$a \leq b \leq c \quad \text{und} \quad a \cdot b \cdot c = 19 \cdot 85 \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 250922:
Es sei $ABCD$ ein konvexes Viereck. Jede Seite dieses Vierecks werde durch zwei Teilpunkte in drei gleich lange Strecken geteilt. Durch je zwei solche Teilpunkte, die ein und derselben Ecke des Vierecks $ABCD$ am nächsten liegen, sei eine Gerade gezeichnet. Auf diese Art kann man genau vier Geraden zeichnen, deren Schnittpunkte ein weiteres Viereck $STUV$ bilden.

Welches der beiden Vierecke $ABCD$ bzw. $STUV$ hat den größeren Flächeninhalt?

Aufgabe 250923:
Es seien a, b, x und y positive reelle Zahlen, und es gelte $\frac{a}{b} < \frac{x}{y}$.

Beweisen Sie, daß aus diesen Voraussetzungen stets

$$\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+y} < \frac{x}{y} \quad \text{folgt!}$$

Aufgabe 250924:
Untersuchen Sie, ob es rationale Zahlen a und b gibt, für die

$$\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} \quad \text{gilt!}$$

25. Mathematik-Olympiade 1985/86
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250931:

a) Beweisen Sie, daß es eine natürliche Zahl N gibt, für die folgende Aussage (1) gilt!

   (1) Für jede natürliche Zahl n für die $n \geq N$ ist, kann eine Quadratfläche F in genau n Teilquadrate $T_1, ..., T_n$ zerlegt werden. (Dabei sollen die Flächen $T_1, ..., T_n$ die Fläche F vollständig ausfüllen; sie brauchen nicht untereinander kongruent sein.)

b) Ermitteln Sie die kleinste natürliche Zahl N, für die die Aussage (1) gilt!

Aufgabe 250932:

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare (a, b) von zweistelligen Zahlen a und b, für die folgendes gilt:

Bildet man durch Hintereinanderschreiben von a und b in dieser Reihenfolge eine vierstellige Zahl z, so ist

$$z = (a + b)^2.$$

Aufgabe 250933:

Das Volumen eines regelmäßigen Tetraeders sei V_T, das Volumen seiner Umkugel sei V_K.

Berechnen Sie das Verhältnis $V_K : V_T$ und runden Sie es ganzzahlig (d.h. ermitteln Sie die zu $V_K : V_T$ nächstgelegene ganze Zahl)! Dabei können die (auf eine bzw. zwei Dezimalen nach dem Komma genauen) Näherungswerte $\sqrt{3} \approx 1,7$ und $\pi \approx 3,14$ verwendet werden.

Aufgabe 250934:

Die acht Zahlen 1, 2, ..., 8 sollen so auf die Eckpunkte eines Würfels verteilt werden, daß dabei folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Jedem Eckpunkt des Würfels wird genau eine der acht Zahlen zugeteilt, jede dieser Zahlen soll in der Verteilung vorkommen.

(2) Addiert man auf jeder Seitenfläche des Würfels die vier Zahlen an den Eckpunkten dieser Seitenfläche, so ergibt sich auf allen sechs Seitenflächen dieselbe Summe.

Es sollen möglichst viele Verteilungen der acht Zahlen auf die Eckpunkte so zusammengestellt werden, daß jede dieser Verteilungen die Bedingungen (1), (2) erfüllt und daß keine zwei dieser Verteilungen zueinander kongruent sind, d.h. durch Drehung oder Spieglung ineinander übergeführt werden können.

Ermitteln Sie die Anzahl der Verteilungen, die in einer solchen Zusammenstellung auftreten!

Aufgabe 250935:
In einem beliebigen spitzwinkligen Dreieck ABC sei A' der Fußpunkt der durch A gehenden Höhe, B' der Fußpunkt der durch B gehenden Höhe und S der Schnittpunkt dieser beiden Höhen.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AS} : \overline{SB'}$ gilt!

Aufgabe 250936:

a) Ist durch den Term

$$z = \sqrt{192 + 96 \cdot \sqrt{3}} + \sqrt{192 - 96 \cdot \sqrt{3}}$$

eine Zahl definiert?

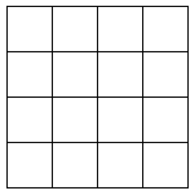
b) Wenn dies der Fall ist, ist z rational?

26. Mathematik-Olympiade 1986/87
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260911:

In dem abgebildeten Quadrat mit 4×4 Teilquadraten sollen 8 von diesen 16 Teilquadraten so gekennzeichnet werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in den beiden Diagonalen genau zwei Teilquadrate gekennzeichnet sind.



Geben Sie fünf voneinander verschiedene Lösungen der Aufgaben an, d.h. Lösungen, von denen sich keine zwei durch Spiegelung oder Drehung ineinander überführen lassen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 260912:

Es seien a, b, s drei gegebene Streckenlängen. Peter soll eine Strecke der Länge s im Verhältnis $a^2 : b^2$ teilen. Er gibt folgende Konstruktion an:

(1) Man konstruiert ein rechtwinkliges Dreieck aus $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{\sphericalangle ACB} = 90°$

(2) Von C fällt man das Lot auf AB, sein Fußpunkt sei D.

(3) In B trägt man an BA einen Winkel an, dessen Größe zwischen 0° und 180° liegt. Auf den freien Schenkel dieses Winkels wird von B aus die Strecke der Länge s abgetragen, ihr anderer Endpunkt sei E.

(4) Die Parallele zu EA durch D schneide BE in einen Punkt, der F genannt sei.

a) Führen Sie die beschriebene Konstruktion durch!

b) Beweisen Sie:

Wenn eine Strecke BE und ein Punkt F nach Peters Beschreibung konstruiert werden, dann teilt F die Strecke BE in Verhältnis $\overline{BF} : \overline{FE} = a^2 : b^2$.

Aufgabe 260913:

Ermitteln Sie die Anzahl aller verschiedenen Tripel ganzer Zahlen (x, y, z), für die

(1) $x \leq y \leq z$ und

(2) $xyz = 1\,986$ gilt!

Hinweis: Zwei Tripel (x_1, y_1, z_1) und (x_2, y_2, z_2) heißen genau denn voneinander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen $x_1 \neq x_2$; $y_1 \neq y_2$; $z_1 \neq z_2$ gilt.

Aufgabe 260914:

Untersuchen Sie, ob es natürliche Zahlen n derart gibt, daß die Lösung x der Gleichung $17x + n = 6x + 185$ ebenfalls eine natürliche Zahl ist! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie die kleinste derartige Zahl n und die zugehörige Lösung x der gegebenen Gleichung!

26. Mathematik-Olympiade 1986/87
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260921:
Beweisen Sie, daß für jede natürliche Zahl n auch

$$\frac{n^3 - 2n^2 - 4n + 8}{n+2} \quad \text{eine natürliche Zahl ist!}$$

Aufgabe 260922:
Peter und Heinz erzählen, daß sie Dreiecke gezeichnet haben, deren Seitenlängen, gemessen in Zentimeter, die Maßzahlen

$$a = 3x + 9,$$
$$b = 5x + 8,$$
$$c = 4x + 1$$

hatten, wobei x eine zuvor gewählte von Null verschiedene natürliche Zahl war.

Anke behauptet: Für jede von Null verschiedene natürliche Zahl x gibt es ein Dreieck mit den so gebildeten Maßzahlen a, b, c seiner Seitenlängen.

Birgit behauptet: Es gibt eine von Null verschiedene Zahl x, für die ein Dreieck, das diese Seitenlängen hat, rechtwinklig ist.

Untersuchen Sie für jede dieser beiden Behauptungen, ob sie wahr ist!

Aufgabe 260923:
Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel $(a; b; c)$ natürlicher Zahlen a, b, c, die die folgenden Bedingungen (1) bis (5) erfüllen!

(1) Es gilt $b < c$.

(2) b und c sind zueinander teilerfremd.

(3) a ist von jeder der Zahlen 4; 9; 12 verschieden.

(4) b und c sind von jeder der Zahlen 13; 16; 21 verschieden.

(5) Jede Zahl, die die Summe zweier verschiedener Zahlen der Menge $A = \{4; 9; 12; a\}$ ist, ist in der Menge $B = \{13; 16; 21; b; c\}$ enthalten.

Aufgabe 260924:

Von einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C wird gefordert, daß dieser rechte Winkel durch die Seitenhalbierende der Seite AB, die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ACB$ und die auf der Seite AB senkrechte Höhe in vier gleichgroße Winkel zerlegt wird.

Untersuchen Sie, ob es ein Dreieck ABC gibt, das diese Forderungen erfüllt, und ob alle Dreiecke, für die das zutrifft, einander ähnlich sind! Ermitteln Sie, wenn dies der Fall ist, die Größen der Winkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$!

26. Mathematik-Olympiade 1986/87
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260931:
Ermitteln Sie alle diejenigen geordneten Paare (a, b) natürlicher Zahlen, für die die Gleichung

$$2(a + b) = ab \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 260932:
In einer Ebene e sei ein Dreieck ABC fest vorgegeben. Die Mittelpunkte der Dreiecksseiten BC, CA, AB seien U, V bzw. W in dieser Reihenfolge. Weiter sei P ein beliebiger Punkt der Ebene e. Spiegelt man P sowohl an U, V als auch an W, so erhält man die Bildpunkte P_U, P_V bzw. P_W.

(Unter dem Bildpunkt P_S von P bei der Spiegelung an einem Punkt S versteht man denjenigen Punkt, für den gilt, daß S der Mittelpunkt der Strecke PP_S ist. Falls $P = S$ ist, ist $P_S = P$.)

Beweisen Sie, daß der Flächeninhalt des Dreiecks $P_UP_VP_W$ unabhängig von der Lage des Punktes P ist, und vergleichen Sie diesen Flächeninhalt mit dem des Dreiecks ABC!

Aufgabe 260933:
Wenn eine reelle Zahl a gegeben ist, so werde jeder reellen Zahl x eine Zahl y, nämlich

$$y = \frac{x^3 + x2 + ax + 1}{x^2 + 1} \quad \text{zugeordnet.}$$

(A) Ermitteln Sie, wenn $a = -3$ gegeben ist, zwei ganze Zahlen x, deren zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind!

(B) Ermitteln Sie eine reelle Zahl a, für die die folgende Aussage (*) gilt!

(*) Wenn die Zahl a gegeben ist, so gibt es unendlich viele ganze Zahlen x, deren jeweils zugeordnete Zahlen y ebenfalls ganze Zahlen sind.

(C) Untersuchen Sie, ob es außer der in (B) ermittelten Zahl a noch eine andere reelle Zahl a gibt, für die die Aussage (*) gilt!

Aufgabe 260934:
Beweisen Sie folgenden Satz:

Wenn a und b zwei von 0 verschiedene natürliche Zahlen sind, die nicht beide Quadratzahlen sind und für die $\frac{a}{b}$ ein so weit wie möglich gekürzter Bruch ist, dann ist $\sqrt{\frac{a}{b}}$ eine irrationale Zahl.

Aufgabe 260935:

Von einem Viereck $ABCD$ werde vorausgesetzt:

(1) $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

(2) Es gilt $\overline{AB} > \overline{CD}$.

(3) Die Summe der Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAD$ und $\sphericalangle ABC$ beträgt 90°.

Der Mittelpunkt von AB sei M, der Mittelpunkt von CD sei N.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{MN} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} - \overline{CD}) \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 260936:

a) Ein regelmäßiges Tetraeder $ABCD$ soll durch eine Ebene e, die durch den Punkt A geht, in zwei Tetraeder T_1, T_2 zerlegt werden.

Skizzieren Sie eine derartige Zerlegung, z.B. in Kavalierperspektive, und beschreiben Sie, welche Lage e in bezug auf die drei Punkte B, C, D bei derartigen Zerlegungen haben muß!

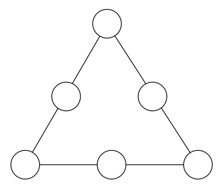
b) Beweisen Sie, daß es unter den in a) genannten Ebenen genau drei gibt, bei denen T_1 volumengleich zu T_2 wird!

27. Mathematik-Olympiade 1987/88
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270911:

In die Kreisfelder der Figur sollen die Zahlen 1 bis 6 so eingetragen werden, daß jede Zahl genau einmal vorkommt, und daß die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.



Geben Sie eine solche Eintragung an! Überprüfen Sie, ob die von Ihnen angegebene Eintragung alle geforderten Bedingungen erfüllt!

Aufgabe 270912:

Bei einem Dominospiel mit den Zahlen 0, 1, ..., 6 ist jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Dominospiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 6 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine in einer Folge so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel).

Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so daß man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einen Dominospiel gehörenden Steine!

b) Ermitteln Sie die größte Zahl solcher Steine eines Dominospiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden läßt!

Aufgabe 270913:

Jemand möchte die Frage beantworten, ob 1 987 eine Primzahl ist. Er hat unter seinen Rechenhilfsmitteln (Zahlentafel, Taschenrechner) zwar auch eine Primzahltabelle; sie enthält aber nur die Primzahlen unter 100.

Wie kann (ohne weitere Hilfsmittel), die Untersuchung geführt werden; welche Antwort erbringt sie?

Aufgabe 270914:

Für jedes Rechteck seien die Seitenlängen mit a, b bezeichnet, die Diagonalenlänge mit d und der Flächeninhalt mit A. Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

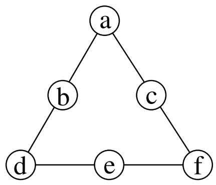
Es gilt $d = 2a - b$ genau dann, wenn $A = \frac{3}{4}a^2$ gilt!

27. Mathematik-Olympiade 1987/88
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270921:

In die Felder auf den Ecken und Seitenmittelpunkten eines gleichseitigen Dreiecks (siehe Abbildung) sollen für a, b, c, d, e, f die Zahlen von 1 bis 6 so eingetragen werden, daß jede Zahl genau einmal vorkommt und daß auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe entsteht.



Ermitteln Sie alle voneinander verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen!

Dabei heißen zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden, wenn sie weder durch Drehung noch durch Spiegelung ineinander überführt werden können.

Aufgabe 270922:

Bei einem "ungarischen Dominospiel" mit den Zahlen 0, 1, ..., 9 ist (abgesehen von dieser größeren Zahl in der vom "gewöhnlichen Dominospiel" bekannten Weise) jeder Spielstein in zwei Hälften eingeteilt, jede Hälfte trägt eine der Zahlen. In einem Spiel kommen alle Kombinationen von je zwei der Zahlen 0, 1, ..., 9 je genau einmal vor (und zwar auch diejenigen, bei denen auf den beiden Hälften eines Steines dieselbe Zahl steht).

Eine "Kette" entsteht, wenn man mehrere Steine so nebeneinanderlegt, daß benachbarte Hälften nebeneinanderliegender Steine stets einander gleiche Zahlen tragen (Domino-Spielregel). Eine Kette heißt "geschlossen", wenn auch die beiden Steinhälften an den beiden freien Enden der Kette einander gleiche Zahlen tragen (so daß man die Kette, wenn sie aus genügend vielen Steinen besteht, an ihren Anfang zurückführen und dort schließen kann).

a) Ermitteln Sie die Anzahl aller zu einem "ungarischen Dominospiel" gehörenden Steine!

b) Ermitteln Sie die größte Anzahl solcher Steine eines Spiels, aus denen sich eine geschlossene Kette bilden läßt!

Aufgabe 270923:

Für jeden Quader seien die Kantenlängen mit a, b, c bezeichnet, die Länge der Raumdiagonale mit d und der Oberflächeninhalt mit A. Beweisen Sie mit diesen Bezeichnungen die folgende Aussage:

Es gilt genau dann $d = \frac{1}{3} \cdot (a + b + c)$, wenn $A = 8 \cdot d^2$ gilt.

Aufgabe 270924:

Für je zwei natürliche Zahlen a, b, die die Ungleichungen

$$3a - 2b \leq 10, \qquad (1)$$
$$3a + 8b \leq 25 \qquad (2)$$

erfüllen, sei $S = a + 2b$.

Untersuchen Sie, ob es unter allen Zahlen S, die sich auf diese Weise bilden lassen, eine größte gibt! Wenn das der Fall ist, so ermitteln Sie diesen größtmöglichen Wert von S!

27. Mathematik-Olympiade 1987/88
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270931:

a) Beweisen Sie, daß die Gleichung

$$x_1^{11} + x_2^{11} + ... + x_{1\,987}^{11} = 1\,988 \tag{1}$$

keine reelle Lösung $(x_1, x_2, ..., x_{1\,987})$ besitzt, in der alle Zahlen x_1, x_2, ... , $x_{1\,987}$ natürliche Zahlen sind!

b) Beweisen Sie, daß die Gleichung (1) unendlich viele verschiedene Lösungen besitzt, in denen alle Zahlen ganze Zahlen sind!

Dabei heißen zwei Lösungen $(x_1, x_2, ..., x_{1\,987})$ und $(x'_1, x'_2, ..., x'_{1\,987})$ genau dann von einander verschieden, wenn mindestens eine der Ungleichungen $x_1 \neq x'_1$, $x_1 \neq x'_1$, ... , $x_{1\,987} \neq x'_{1\,987}$ gilt.

Aufgabe 270932:

(I) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn a, b, c, d reelle Zahlen sind, für die $b \neq 0$, $b + c \neq 0$ und $b + d \neq 0$ gilt, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}.$$

(II) Untersuchen Sie, ob der folgende Satz allgemein gilt:

Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen sind, so folgt aus

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+c} \quad \text{stets auch} \quad \frac{a}{b} < \frac{a+d}{b+d}.$$

Aufgabe 270933:

Es sei $ABCD$ ein Sehnenviereck, dessen Seiten AB und CD so gelegen sind, daß sich die Verlängerung von AB über B hinaus und die Verlängerung von DC über C hinaus in einem Punkt T schneiden. Die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ATD$ sei h. Der Schnittpunkt der Diagonalen AC und BD sei S; die Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ASD$ sei g.

Beweisen Sie: Aus diesen Voraussetzungen folgt stets, daß g und h zueinander parallel sind.

Bemerkung: Auch in dem Spezialfall, daß g und h in dieselbe Gerade fallen, werden sie als zueinander parallel bezeichnet.

Aufgabe 270934:

Jens zeichnet auf ein Blatt Papier einige Punkte, von denen keine drei auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Er verbindet einige Male irgend zwei dieser Punkte durch eine Strecke. Dabei kommt es auch vor, daß Punkte jeweils mit mehr als einem anderen Punkt verbunden sind.

Dirk zählt nun die von jedem Punkt ausgehenden Strecken und ermittelt dann die Anzahl A aller derjenigen Punkte, von denen jeweils eine ungerade Anzahl von Strecken ausgeht.

Christa behauptet dann, ohne zu wissen, wie viele Punkte Jens gezeichnet hat und welche Punkte er mit welchen anderen verbunden hat, die Anzahl A müsse in jedem Fall eine gerade Zahl sein.

Trifft das zu?

Aufgabe 270935:

Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl $n \geq 1$ gibt, für die $2^{n+2} + 3^{2n+1}$ eine Primzahl ist!

Aufgabe 270936:

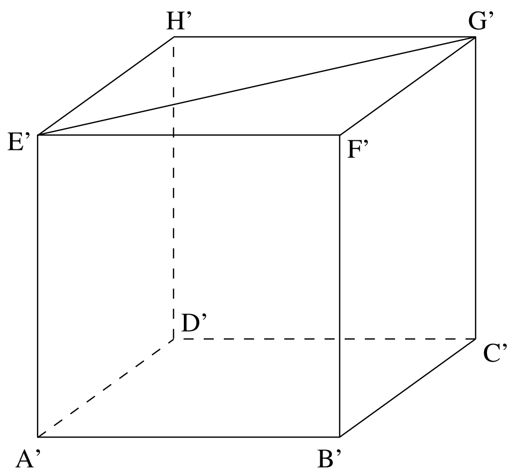
Auf dem Arbeitsblatt ist das Bild $A'B'C'D'E'F'G'H'$ eines Würfels $ABCDEFGH$ bei einer schrägen Parallelprojektion gegeben. Diese ist so gewählt, daß die Fläche $ABFE$ ohne Verzerrung in wahrer Größe $A'B'F'E'$ erscheint.

a) Beweisen Sie folgende Aussage:

   Es gibt auf der Strecke EG genau einen Punkt P_0 mit der Eigenschaft, daß die Summe $\overline{CP_0} + \overline{P_0F}$ kleiner ist als die Summe $\overline{CP} + \overline{PF}$ für jeden anderen Punkt P auf EG.

b) Leiten Sie eine Möglichkeit her, das Bild P_0' dieses Punktes P_0 bei der Parallelprojektion auf dem Arbeitsblatt zu konstruieren! Führen Sie die Konstruktion durch! Beschreiben Sie ihre Konstruktion!

Hinweis: CP_0, P_0F, CP, PF bezeichnen Strecken im Raum, nicht ihre Bildstrecken in der Zeichenebene.



28. Mathematik-Olympiade 1988/89
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280911:

In ein Quadrat mit 4×4 Feldern sollen die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen werden, daß jede der Zahlen genau einmal auftritt und daß sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe ergibt!

Versuchen Sie, eine solche Eintragung zu finden!

Aufgabe 280912:

Gibt es eine rationale Zahl, aus der man nach dem Bilden des Reziproken und anschließendem Verdoppeln wieder die ursprüngliche rationale Zahl erhält?

Aufgabe 280913:

Beweisen Sie, daß in jedem Rechteck $ABCD$ mit $\overline{AB} > \overline{BC}$ die Mittelsenkrechte auf der Diagonalen AC die Seite AB zwischen A und B schneidet!

Aufgabe 280914:

Drei Werkstücke W_1, W_2, W_3 durchlaufen eine Taktstraße mit vier Bearbeitungsmaschinen M_1, M_2, M_3, M_4. Dabei muß jedes Werkstück die Maschinen in der Reihenfolge M_1, M_2, M_3, M_4 durchlaufen, und an jeder Maschine soll die Reihenfolge der drei Werkstücke dieselbe sein.

Die Bearbeitungszeiten der Werkstücke auf den einzelnen Maschinen sind (in Stunden) in der folgenden Tabelle angegeben:

	M_1	M_2	M_3	M_4
W_1	4	1	2	1,5
W_2	2	2,5	1	0,5
W_3	2	3,5	1	1

Es können niemals zwei Werkstücke gleichzeitig auf derselben Maschine bearbeitet werden. Die Zeiten zum Wechseln der Werkstücke an den Maschinen seien so klein, daß sie vernachlässigt werden können.

Geben Sie eine Reihenfolge der drei Werkstücke für das Durchlaufen der Taktstraße so an, daß die Gesamtzeit (das ist die Zeit vom Eintritt des zuerst eingegebenen Werkstücks in die Maschine M1 bis zum Austritt des zuletzt bearbeiteten Werkstücks aus der Maschine M4) so klein wie möglich ist! Zeigen Sie, daß die von Ihnen angegebene Reihenfolge mit ihrer Gesamtzeit die jeder anderen Reihenfolge unterbietet!

28. Mathematik-Olympiade 1988/89
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280921:

Ermitteln Sie die kleinsten vier Zahlen, die das Quadrat einer natürlichen Zahl und zugleich auch die dritte Potenz einer anderen natürlichen Zahl sind!

Aufgabe 280922:

In ein Quadrat mit 4×4 Feldern seien die Zahlen von 1 bis 16 so eingetragen, daß jede der Zahlen genau einmal auftritt und daß sich bei der Addition der Zahlen in jeder der vier Zeilen, der vier Spalten und der beiden Diagonalen jeweils dieselbe Summe s ergibt ("Magisches Quadrat").

a) Beweisen Sie, daß in allen magischen Quadraten (mit den Zahlen von 1 bis 16 in 4×4 Feldern) derselbe Wert für s auftreten muß!

b) Beweisen Sie, daß in jedem magischen Quadrat von 4×4 Feldern die Summe der Zahlen in den vier Eckfeldern ebenfalls s sein muß!

Aufgabe 280923:

In einem Dreieck ABC seien die Seitenlängen und Winkelgrößen wie üblich mit a, b, c und α, β, γ bezeichnet. Die Winkelhalbierende von $\sphericalangle BAC$ schneide die Seite BC in einem Punkt D. Dabei sei $\overline{AD} = b$. Ferner sei vorausgesetzt, daß eine der drei Winkelgrößen α, β, γ das arithmetische Mittel der beiden anderen ist.

Ermitteln Sie unter diesen Voraussetzungen alle Möglichkeiten für die Winkelgrößen α, β, γ!

Aufgabe 280924:

a) Ermitteln Sie alle diejenigen Primzahlen, die sich als Summe zweier aufeinanderfolgender von Null verschiedener natürlicher Zahlen darstellen lassen!

b) Beweisen Sie, daß es keine Primzahl gibt, die sich als Summe von drei oder mehr aufeinanderfolgenden von Null verschiedenen natürlichen Zahlen darstellen läßt!

28. Mathematik-Olympiade 1988/89
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

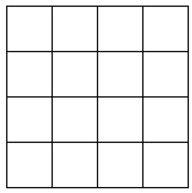
Aufgabe 280931:

Man nennt drei von 0 verschiedene natürliche Zahlen a, b, c genau dann ein pythagoreisches Zahlentripel, wenn sie die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ erfüllen.

Beweisen Sie, daß in jedem pythagoreischen Zahlentripel mindestens eine der drei Zahlen durch 5 teilbar ist!

Aufgabe 280932:

In jedes der 16 Felder eines 4×4-Quadrates (siehe Abbildung) soll eine der Zahlen 0 und 1 so eingetragen werden, daß in jeder Zeile, in jeder Spalte und in jeder der beiden Diagonalen zweimal die 0 und zweimal die 1 vorkommt.



Ermitteln Sie alle verschiedenen Eintragungen, die diese Bedingungen erfüllen! Dabei seien zwei Eintragungen genau dann voneinander verschieden genannt, wenn es keine Spiegelung gibt, die die eine Eintragung in eine andere überführt.

Aufgabe 280933:

Untersuchen Sie, ob es zu jeder geraden Pyramide $P = ABCDS$ mit quadratischer Grundfläche $ABCD$ eine Ebene e so gibt, daß die Schnittfigur von P mit e ein gleichseitiges Dreieck ist!

Hinweis: Gibt es nicht zu jeder Pyramide P eine solche Ebene e, so ist für eine Pyramide P diese Unmöglichkeit zu beweisen; gibt es aber zu jeder Pyramide eine solche Ebene e, so ist anzugeben, wie eine Ebene e gefunden werden kann und daß jede so gefundene Ebene e die geforderte Bedingung erfüllt.

Aufgabe 280934:

Beweisen Sie, daß für beliebige positive reellen Zahlen x und y stets die Ungleichung

$$\frac{\sqrt{x}}{y^6 \cdot \sqrt{y}} + \frac{\sqrt{y}}{x^6 \cdot \sqrt{x}} \geq \frac{1}{x^6} + \frac{1}{y^6} \qquad \text{gilt!}$$

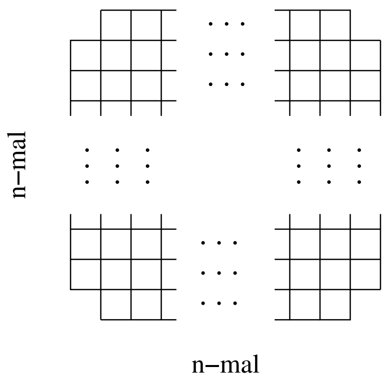
Aufgabe 280935:

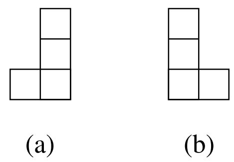
Untersuchen Sie, ob es ein Rechteck $ABCD$ gibt, in dem die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ durch den Mittelpunkt der Strecke AB geht!

Aufgabe 280936:

Ermitteln Sie alle diejenigen Zahlen $n \geq 3$, für die es möglich ist, ein $n \times n$-Brett ohne die vier Eckfelder (siehe Abbildung) vollständig so in Teile zu zerlegen, daß jedes Teil aus einer der Flächen (a), (b) durch Verschiebung und Drehung zu erhalten ist!

Hinweis: Es ist auch zugelassen, daß in einer Zerlegung sowohl Teile (a) als auch Teile (b) vorkommen.


n−mal
n−mal


(a)
(b)

29. Mathematik-Olympiade 1989/90
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290911:

Für das Quadrieren von zweistelligen Zahlen, die mit der Ziffer 5 enden, gibt es folgende einfache Regel:

Man multipliziere die Ziffer an der Zehnerstelle mit derjenigen Zahl, die um 1 größer ist, und schreibe hinter das Produkt die Ziffern 25.

Beispielsweise zur Berechnung von 25^2 führt die Regel wegen $2 \cdot 3 = 6$ auf das Ergebnis 625.

Beweisen Sie diese Regel!

Aufgabe 290912:

Gibt es unter allen fünfstelligen Zahlen, die sich unter Verwendung genau der Ziffern 0, 1, 2, 3, 4 schreiben lassen, eine Primzahl?

Aufgabe 290913:

Bei einem Abzählspiel stehen 11 Kinder in einem Kreis. Eines dieser Kinder sagt den Abzählvers auf; dabei wird im Uhrzeigersinn bei jeder Silbe ein Kind weiter gezählt. Auch der Spieler, der den Abzählvers aufsagt, wird in das Abzählen einbezogen. Der Abzählvers hat 15 Silben. Das Kind, auf das die letzte Silbe trifft, verläßt den Kreis; beim nachfolgenden Kind wird das Abzählen wieder mit dem Anfang des Abzählverses fortgesetzt. Dieses Abzählen und Ausscheiden erfolgt so lange, bis nur noch ein Spieler im Kreis ist; dieser Spieler hat gewonnen.

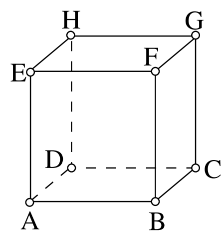
a) Bei welchem Kind muß der abzählende Spieler beginnen, wenn er selbst gewinnen will? (Um die Antwort zu formulieren, numeriere man die Kinder und gebe etwa dem abzählenden Spieler die Nummer 1.)

b) Falls Sie die Möglichkeit haben, an einem (Klein-)Computer zu arbeiten, sollten Sie ein Programm schreiben, mit dem sich Aufgabe a) für Abzählspiele mit k Kindern und einem Abzählvers aus s Silben lösen läßt.

Aufgabe 290914:

Die Eckpunkte eines Würfels seien wie im Bild bezeichnet.

a) Fertigen Sie mit verdoppelten Streckenlängen, aber gleichen Winkeln eine weitere Zeichnung an, die zunächst nur die Eckpunkte des Würfels wiedergibt! Zeichnen Sie nun die Dreiecksflächen BHA, BHC, BHD, BHE, BHF und BHG (durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten) ein! Berücksichtigen Sie dabei die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch mindestens eine davorliegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden!



Die Seitenflächen und für die Dreiecke nicht benötigten Seitenkanten des Würfels selbst sollen nicht berücksichtigt werden.

(Abschließend können Sie die Anschaulichkeit der Zeichnung noch durch Schraffur oder Farbe erhöhen.)

b) Beweisen Sie, daß die genannten Dreiecke sämtlich untereinander kongruent sind!

29. Mathematik-Olympiade 1989/90
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

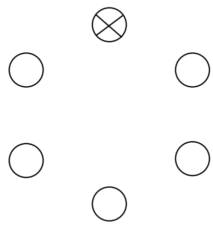
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290921:

Kann man in einer Ebene eine Figur bilden, die aus genau 1 989 Geraden besteht und dadurch mehr als 2 Millionen Schnittpunkte enthält?

Aufgabe 290922:

Auf die Felder der Abbildung sollen drei weiße und drei schwarze Steine verteilt werden, auf jedes Feld ein Stein. Ferner wird eine natürliche Zahl $a \geq 1$ fest vorgegeben. Nun soll, beginnend mit dem angekreuzten Feld, im Uhrzeigersinn umlaufend, Stein für Stein weitergezählt werden, von 1 bis a.



Der Stein, der dabei die Nummer a erhält, wird weggenommen. Anschließend beginnt das Abzählen wieder mit 1 bei dem im Uhrzeigersinn folgenden Stein, und wieder wird der Stein, der die Nummer a erhält, weggenommen.

Dann schließt sich noch eine dritte Durchführung dieses Abzählens und Wegnehmens an. Bei diesen Fortsetzungen ist zu beachten, daß leere Felder nicht mitgezählt, sondern übersprungen werden.

a) Es sei $a = 4$. Wie sind zu Beginn die Steine zu verteilen, damit am Ende die drei weißen Steine übrigbleiben?

b) Jemand vermutet: "Wenn man a durch $a + 6$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

   Widerlegen Sie die Vermutung, indem Sie sie für $a = 4$ nachprüfen!

c) Beweisen Sie, daß es eine Zahl z gibt, mit der für jedes $a \geq 1$ die folgende Aussage wahr ist:

   "Wenn man a durch $a + z$ ersetzt, so führt die gleiche Anfangsverteilung der Steine -auch bei Abzählbeginn im angekreuzten Feld- ebenfalls zum Übrigbleiben der drei weißen Steine."

Aufgabe 290923:

Man ermittle die kleinste natürliche Zahl n, für die (bei Darstellung im dekadischen Positionssystem) 5 sowohl Teiler der Quersumme von n als auch Teiler der Quersumme von $n + 1$ ist.

Aufgabe 290924:

Die Abbildung stellt sechs Punkte A, B, C, D, E, F in senkrechter Eintafelprojektion mit zugehörigem Höhenmaßstab dar. Die Punkte C', B', D' und ein vierter nicht bezeichneter Punkt sind in dieser Reihenfolge die Eckpunkte eines Quadrates mit der Seitenlänge $a = 6$ cm. Die Punkte A' und F' sind der in der Abbildung ersichtlichen Quadratseiten. Im Höhenmaßstab haben A, F von B, D den Abstand 3 cm und C, E von B, D den Abstand 6 cm.

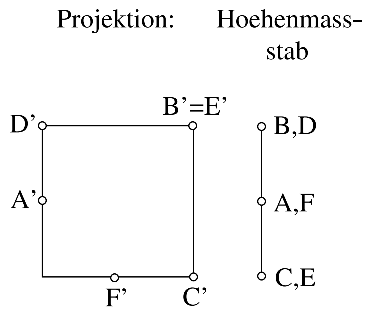
a) Zeichnen Sie in schräger Parallelprojektion, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$ sei, eine Darstellung desjenigen Würfels, zu dem die Eckpunkte B, C, D, E gehören, und dazu die Punkte A und F!

b) Zeichnen Sie anschließend die Dreiecksflächen ABC und DEF durch Wiedergabe ihrer Seitenkanten sowie der Schnittstrecke XY, die diese beiden Dreiecksflächen miteinander gemeinsam haben!

Berücksichtigen Sie in a) und b) die Sichtbarkeitsverhältnisse, indem Streckenteile, die durch eine davorliegende Dreiecksfläche verdeckt sind, gestrichelt wiedergegeben werden! Eine Verdeckung durch davorliegende Seitenflächen des Würfels soll dagegen nicht berücksichtigt werden (diese Flächen sind als "nicht vorhanden" oder "durchsichtig" zu betrachten).

Verdeutlichen Sie die sichtbaren Teile der Dreiecksflächen durch Schraffur, im Dreieck ABC parallel zu CB, im Dreieck DEF in dichterer Schraffur parallel zu DE!

c) Geben Sie für die Schnittstrecke XY eine Herleitung der - von Ihnen in b) verwendeten - Konstruktion der Bildpunkte von X und Y! Beschreiben Sie diese Konstruktion!



29. Mathematik-Olympiade 1989/90
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290931:

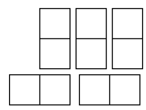
Beschreiben und begründen Sie für die folgende Aufgabe eine Konstruktion, die ausführbar ist, indem außer gezeichnet vorgegebenen Strecken nur Lineal und Zirkel (zum Konstruieren von Geraden und Kreisen, nicht zur Nutzung von Millimeter- oder Grad-Skalen) verwendet werden.

Gezeichnet vorgegeben seien zwei Strecken AB und AC, die einen Winkel $\sphericalangle BAC$ der Größe $7°$ bilden. Zu konstruieren ist eine Zerlegung dieses Winkels in 7 gleich große Teile.

Das zeichnerische Ausführen der beschriebenen Konstruktion wird nicht verlangt.

Aufgabe 290932:

Aus einem Satz von Dominosteinen soll eine Zusammenstellung von möglichst vielen nebeneinanderliegenden Figuren gebildet werden. Jede dieser Figuren soll die in der Abbildung gezeigte Gestalt haben, ferner soll sie die folgende Bedingung erfüllen:



Liest man in jeder Zeile die drei bzw. vier Zeichen als Zifferndarstellung einer Zahl, so gibt die Figur eine richtig gerechnete Additionsaufgabe an (erste Zeile + zweite Zeile = dritte Zeile). Wie üblich ist die Null als Anfangsziffer nicht zugelassen.

Ermitteln Sie die größtmögliche Anzahl von nebeneinanderliegenden Figuren der geforderten Art, die sich aus einem Satz von Dominosteinen bilden lassen!

Hinweis: Jeder Dominostein enthält auf jeder seiner beiden Teilflächen genau eines der Zahlzeichen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Der Satz von Dominosteinen (aus dem die Steine für das Bilden der Figuren auszuwählen sind) enthält jeden Stein $\boxed{x}\boxed{y}$ mit $0 \leq x \leq y \leq 6$ genau einmal; beim Bilden der Figuren ist für die Lage der Steine jede Reihenfolge der beiden Zahlen eines verwendeten Steines zugelassen.

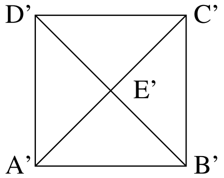
Aufgabe 290933:

Von einem ebenflächig begrenzten Körper werden folgende Bedingungen gefordert:

(1) Der Körper hat genau fünf Eckpunkte A, B, C, D, E.

(2) Bei senkrechter Parallelprojektion auf eine Bildebene sind die Bildpunkte A', B', C', D', E' die Eckpunkte bzw. der Mittelpunkt eines Quadrates mit gegebener Seitenlänge a. Blickt man in Projektionsrichtung auf die Bildebene (diese Blickrichtung sei als Richtung von "oben" nach "unten" bezeichnet), so sind die Eckpunkte und Kanten in gleicher Weise unverdeckt sichtbar, wie in der Abbildung angegeben.

(3) Die durch A, B, C gehende Ebene ε ist parallel zu der in (2) genannten Bildebene.



(4) Der Punkt D liegt "oberhalb" der Ebene ε im Abstand $\frac{a}{2}$ von ihr.

(5) Der Punkt E liegt "oberhalb" der Ebene ε im Abstand a von ihr.

(6) Der Körper hat das Volumen $\frac{1}{4} \cdot a^3$.

Zeigen Sie, daß der Körper durch diese Bedingungen eindeutig bestimmt ist, und zeichnen Sie diesen Körper in schräger Parallelprojektion!

Aufgabe 290934:

Beweisen Sie, daß es zu je zwei beliebigen rationalen Zahlen a, b mit $a < b$ eine rationale Zahl x und eine irrationale Zahl y gibt, für die $a < x < y < b$ gilt!

Aufgabe 290935:

a) Beweisen Sie, daß es zu jeder Funktion f, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung

$$f(x-1) = (x^2-1) \cdot f(x+1) \tag{1}$$

erfüllt, unendlich viele verschiedene reelle Zahlen x mit $f(x) = 0$ gibt.

b) Beweisen Sie, daß es eine Funktion f gibt, die für alle reellen Zahlen x die Gleichung (1) erfüllt, bei der aber nicht jede reelle Zahl x den Funktionswert $f(x) = 0$ hat!

Aufgabe 290936:

Es seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die einander von außen berühren. Für ihre Radien r_1 bzw. r_2 gelte $r_1 > r_2$. Eine Gerade, die k_1 und k_2 in zwei voneinander verschiedenen Punkten berührt, sei t. Die von t verschiedene und zu t parallele Tangente an k_1 sei u.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von r_1 und r_2 den Radius r_3 desjenigen u berührenden Kreises k_3, der k_1 und k_2 von außen berührt!

30. Mathematik-Olympiade 1990/91
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300911:
Drei Schüler wollen ein Spiel nach folgenden Regeln spielen:

1. Es wird (d.h. durch Auslosung der Reihenfolge) festgelegt, daß jeder der drei Schüler stets eine bestimmte Rechenoperation auszuführen hat, und zwar ein Schüler A die Subtraktion der Zahl 2, ein Schüler B die Division durch die Zahl 2, der dritte Schüler C das Ziehen der Quadratwurzel (z.B. mit dem Taschenrechner ermittelt).
2. Dann wird eine dreistellige natürliche Zahl zufallsbedingt gewählt (z.B. durch Auslosen unter allen dreistelligen natürlichen Zahlen) und als "Startzahl" bezeichnet.
3. Nun führen die Schüler stets gleichzeitig jeweils ihre Rechenoperation aus. Beim ersten Mal wenden sie die Operation auf die "Startzahl" an, jedes weitere Mal auf das zuvor erhaltene Resultat.
4. Sobald ein Schüler ein Resultat kleiner als 1 erhält, ist das Spiel beendet; dieser Schüler hat verloren.

Bei der Diskussion zur Vereinbarung der Regeln protestiert ein Schüler. Er meint, nach diesen Regeln ergäbe schon die Festlegung der Rechenoperationen zwangsläufig, wer verlieren müsse.

Stimmt das?

Aufgabe 300912:
Ein Betrieb hat in den letzten vier Jahren seine Produktion (jeweils gegenüber dem Vorjahr) um 8%, 11%, 9% bzw. 12% gesteigert. Peter meint, daß der Betrieb dann eine Produktionssteigerung von insgesamt 40% erreicht hat.

Weisen Sie nach, daß das nicht stimmt.

Bernd meint, der Betrieb hätte eine größere Steigerung erreicht, wenn er die Produktion viermal um 10% gesteigert hätte.

Stellen Sie fest, ob das richtig ist!

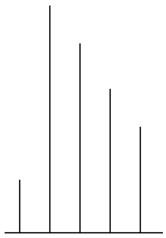
Aufgabe 300913:
Beweisen Sie, daß in jedem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalen AC und BD aufeinander senkrecht stehen,

$$\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = (\overline{AB} + \overline{CD})^2 \quad \text{gilt!}$$

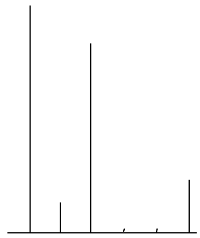
Aufgabe 300914:

Ansgar, Bernd und Christoph sehen auf einer Wanderung die Schornsteine eines Kraftwerkes aus genau südlicher Richtung und später aus genau westlicher Richtung. Ansgar fertigte jeweils eine maßstabsgerechte Skizze an. Dabei war in beiden Fällen niemals ein kleinerer Schornstein genau vor einem größeren zu sehen (siehe Abbildungen).

Während der Wanderung stellen die Freunde außerdem fest, daß das Kraftwerk genau sieben Schornsteine hat, von denen keine zwei die gleiche Höhe haben.



Blick aus suedlicher Richtung



Blick aus westlicher Richtung

Bernd meint: Aus südwestlicher Richtung waren nur vier Schornsteine zu sehen.Christoph korrigierte ihn: Ës waren genau fünf Schornsteine, einer von ihnen stand vor einem größeren.

Schließlich bemerken sie, daß der drittkleinste Schornstein aus keiner der drei Beobachtungsrichtungen (südlich, westlich, südwestlich) zu sehen war, sondern jeweils durch einen größeren verdeckt wurde.

Ermitteln Sie alle Anordnungen von Schornsteinen auf einem Gelände, die nach diesen Beobachtungen möglich sind! Dabei sei angenommen, daß die Korrektur von Bernds Aussage durch Christoph den Tatsachen entspricht.

30. Mathematik-Olympiade 1990/91
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300921:

Ermitteln Sie alle diejenigen reellen Zahlen $x \neq 3$, für die die folgende Ungleichung (1) gilt!

$$\frac{2}{x-3} + \frac{1}{2} < \frac{5}{x-3} - \frac{1}{10}. \qquad (1)$$

Aufgabe 300922:

Man untersuche, ob es ein Rechteck $ABCD$ mit einander gegenüberliegenden Ecken A und C gibt, bei dem im Dreieck ABC die Winkelhalbierende des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$ die Seite AB in deren Mittelpunkt schneidet.

Aufgabe 300923:

a) Wie viele dreistellige natürliche Zahlen, bei denen (wie z.B. 921) die Zehnerziffer größer als die Einerziffer, aber kleiner als die Hunderterziffer ist, gibt es insgesamt?

b) Wie viele sechsstellige Zahlen insgesamt lassen sich dadurch herstellen, daß man zwei verschiedene der unter a) beschriebenen Zahlen auswählt und die größere dieser beiden Zahlen hinter die kleinere schreibt?

c) Die kleinste unter allen denjenigen in b) beschriebenen sechsstelligen Zahlen, bei denen die zweite der genannten dreistelligen Zahlen genau um 1 größer ist als die erste, ist die Telefonnummer des Senders Potsdam. Wie lautet sie?

Aufgabe 300924:

Für jede natürliche Zahl $m \geq 2$ sei folgendes Vorhaben betrachtet:

Jemand möchte m verschiedene von einem Punkt P ausgehende Strahlen zeichnen. Dann möchte er alle diejenigen Winkelgrößen zwischen 0° und 360° feststellen, die bei Messung eines Winkels jeweils von einem dieser Strahlen in mathematisch positivem Drehsinn zu einem anderen dieser Strahlen auftreten können.

Er möchte die m Strahlen so zeichnen, daß sich dabei

a) möglichst wenige,

b) möglichst viele

verschiedene Winkelgrößen feststellen lassen.

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von m die kleinst- bzw. größtmögliche Anzahl verschiedener Winkelgrößen, die so erreichbar sind!

30. Mathematik-Olympiade 1990/91
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300931:

Zwei Spieler A und B spielen das folgende Spiel:

Auf dem Tisch liegen aufgedeckt 50 Spielkarten. Jede ist mit genau einer der Zahlen von 1 bis 50 beschriftet, jede dieser Zahlen steht auf genau einer der Karten. Weitere unbeschriftete Karten stehen zur Verfügung. Die Spieler sind, beginnend mit A, abwechselnd am Zug.

Wer am Zug ist, wählt zwei beliebige der beschrifteten Karten und nimmt sie aus dem Spiel. Dann beschriftet er eine der unbeschrifteten Karten mit dem Absolutbetrag der Differenz der Zahlen auf den weggenommenen Karten, legt die so neu beschriftete Karte auf den Tisch und bringt sie damit ins Spiel.

Das Spiel endet, wenn nur noch eine Karte im Spiel ist. Steht auf dieser eine gerade Zahl, so hat A gewonnen, andernfalls B.

Kann einer der Spieler das Spiel so gestalten, daß er mit Sicherheit gewinnt?

Aufgabe 300932:

Man ermittle alle Darstellungen der Zahl 1 991 als Summe von mindestens drei aufeinanderfolgenden positiven natürlichen Zahlen.

Aufgabe 300933:

Man beweise, daß es 40 im Innern oder auf dem Rand eines Würfels der Kantenlänge 10 cm liegende Punkte gibt, von denen keine zwei einen Abstand kleiner als 4 cm voneinander haben.

Aufgabe 300934:

Man ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n zwischen 100 und 400, für die die Summe s der Ziffern bei Darstellung von n im Dezimalsystem (die übliche "Quersumme") gleich der Summe t der Ziffern ist, die bei der Darstellung von n im System mit der Basis 9 auftreten.

Hinweis: Um eine Summe von Ziffern bilden zu können, ist natürlich jede einzelne Ziffer als Zahl aufzufassen. Das ist ohne Mißverständnis möglich, da die für das System der Basis 9 notwendige Ziffern 0, 1, ... , 8 dort dieselben Zahlen darstellen wie im Dezimalsystem.

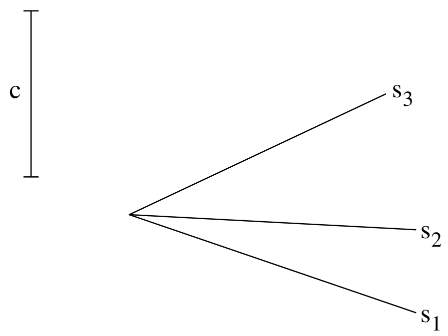
Aufgabe 300935:

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (x, y, z) natürlicher Zahlen, für die

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{4}{5} \quad \text{gilt!}$$

Aufgabe 300936:

Gegeben seien drei von einem Punkt S ausgehenden Strahlen s_1, s_2, s_3. Dabei habe der von s_1 und s_3 gebildete Winkel $\sphericalangle(s_1, s_3)$ eine beliebige Größe kleiner als 60°, und der Strahl s_2 sei ein beliebiger von S aus in das Innere des Winkels $\sphericalangle(s_1, s_3)$ hinein verlaufender Strahl (siehe Abbildung). Gegeben sei ferner eine beliebige Streckenlänge c.



a) Wählen Sie derartige Vorgaben c, s_1, s_2, s_3 (dabei s_2 nicht als Winkelhalbierende von $\sphericalangle(s_1, s_3)$) und konstruieren Sie dann drei von S verschiedene Punkte A auf s_1, B auf s_2 und C auf s_3 so, daß sie die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks ABC der Seitenlänge c sind!

b) Beschreiben Sie Ihre Konstruktion!

c) Beweisen Sie, daß das nach Ihrer Beschreibung konstruierte Dreieck ABC gleichseitig ist und daß seine Ecken A, B, C auf s_1, s_2 bzw. s_3 liegen.

Eine Untersuchung, wieviele Dreiecke mit den geforderten Eigenschaften es außerdem noch gibt, wird nicht verlangt.

31. Mathematik-Olympiade 1991/92
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310911:

Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenflächen geschrieben wurden.

a) Stellen Sie fest, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

   Wenn man an die Ecken eines Tetraeders $ABCD$ in irgendeiner Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, 4 schreibt, so sind alle vier Flächensummen des Tetraeders einander gleich.

b) Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Würfels die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, daß alle sechs Flächensummen des Würfels einander gleich sind!

Aufgabe 310912:

Werner beschäftigt sich mit dem Herstellen von Kryptogrammen in Gestalt einer Additionsaufgabe. Bei einem solchen Kryptogramm sollen - unter Verwendung des dekadischen Zahlensystems - geiche Buchstaben durch gleiche Ziffern und ungleiche Buchstaben durch ungleiche Ziffern ersetzt werden, so daß dann eine richtig gerechnete Addition vorliegt.

Werner betrachtet die folgenden drei Kryptogramme:

$$\begin{array}{cccccc} & J & A & C & K & E \\ + & & H & O & S & E \\ \hline = & A & N & Z & U & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & M & A & N & N \\ + & F & R & A & U \\ \hline = & P & A & A & R \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} & & M & I & R \\ + & E & M & I & R \\ \hline = & R & E & I & M \end{array}$$

Stellen Sie für jedes dieser drei Kryptogramme fest, ob es eine Lösung hat, und ermitteln Sie, wenn das der Fall ist, alle Lösungen des betreffenden Kryptogramms!

Aufgabe 310913:

Beweisen Sie die folgende Aussage!

Wenn ein ebenflächig begrenzter Körper eine Oberfläche besitzt, die ausschließlich aus Dreiecksflächen zusammengesetzt ist, so kann deren Anzahl nicht ungerade sein.

Aufgabe 310914:

a) Eine Schule hat insgesamt 825 Schüler. Es wurde errechnet, daß während eines Schuljahres die Anzahl der Teilnehmer einer Interessengruppe um 4% ihres Anfangswertes zugenommen habe und, hiermit gleichbedeutend, die Anzahl der Nichtteilnehmer um 7% ihres Anfangswertes abgenommen habe.

   Wenn das genau zutraf, wie groß war dann die Anzahl der Nichtteilnehmer zu Beginn des Schuljahres, und um welche Schülerzahl hat sie bis zum Ende des Schuljahres abgenommen?

b) Nachträglich wurde aber mitgeteilt, die Prozentangaben seien nur als Näherungswerte 4,0% bzw. 7,0% ermittelt worden, nämlich gemäß den Rundungsregeln auf eine Dezimale nach dem Komma genau gerundet.

Sind hiernach die die in a) gesuchten Anzahlen immer noch eindeutig bestimmt? Wenn das nicht der Fall ist, ermitteln Sie alle diejenigen Werte für in a) gesuchte Anzahlen, die ebenfalls auf die gerundeten Prozentangaben 4,0% und 7,0% führen!

31. Mathematik-Olympiade 1991/92
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310921:

a) Geben Sie eine natürliche Zahl n an, für die (im dekadischen Positionssystem) die Bedingung erfüllt ist, daß sowohl die Quersumme von n als auch die Quersumme von $n+1$ durch 10 teilbar sind! Überprüfen Sie, daß die von Ihnen angegebene Zahl diese Bedingung erfüllt!

b) Geben Sie die kleinste natürliche Zahl an, die die in a) genannte Bedingung erfüllt! Beweisen Sie für die von Ihnen angegebene Zahl, daß es sich um die kleinste Zahl mit dieser Bedingung handelt!

Aufgabe 310922:

Gegeben seien zwei beliebige, voneinander verschiedene Punkte A und B.

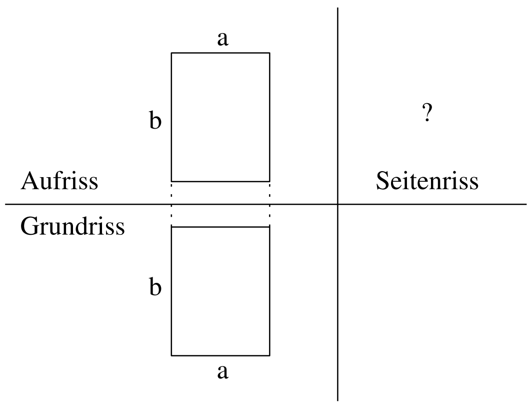
Konstruieren Sie nur mit dem Zirkel einen von A und B verschiedenen Punkt C, für den $\sphericalangle ABC$ ein rechter Winkel ist! Beschreiben Sie Ihre Konstruktion! Beweisen Sie: Wenn ein Punkt C nach Ihrer Beschreibung konstruiert wird, dann ist $\sphericalangle ABC$ ein rechter Winkel!

Hinweis: Man sagt, eine Konstruktion sei "nur mit dem Zirkel" ausgeführt, wenn jeder Konstruktionsschritt darin besteht, daß um einen Punkt M ein Kreis konstruiert wird, dessen Radius gleich dem Abstand zweier Punkte P, Q ist (für die auch $M = P$ oder $M = Q$ sein darf), wobei die Punkte M, P, Q entweder gegebene oder beliebig gewählte oder zuvor konstruierte Punkte sind. Als "nur mit dem Zirkel konstruiert" gilt dann jeder Punkt, der als gemeinsamer Punkt von (mindestens) zwei solchen Kreisen zu erhalten ist.

Aufgabe 310923:

Wenn bei der Abbildung eines Körpers in Zweitafelprojektion die Grund- und Aufrißbilder nicht für eine eindeutige Festlegung ausreichen, kann man einen Seitenriß hinzufügen und damit zur Dreitafelprojektion übergehen.

Die Abbildung zeigt zwei Rechtecke (mit gegebenen Seitenlängen a, b) als Grund- und Aufriß eines Körpers. (Es wird nicht gefordert, daß der Körper nur von ebenen Flächen begrenzt wird.)



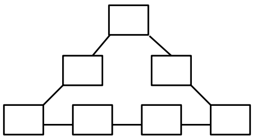
Ergänzen Sie die Risse in drei verschiedenen Zeichnungen so durch Seitenrisse, daß die Bilder von drei Körpern entstehen, von denen keine zwei das gleiche Volumen haben!

Bezeichnen Sie in Ihren Darstellungen alle an den Körpern auftretenden Ecken! (Grund-, Auf- und Seitenriß eines Punktes P bezeichne man mit P', P'' bzw. P'''; eventuell auftretende Kanten, die von Flächen verdeckt sind, zeichne man gestrichelt.)

Geben Sie in Abhängigkeit von a und b die Volumina der drei dargestellten Körper an!

Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 310924:



In die Felder der Abbildung sollen die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 so eingetragen werden, daß jede Zahl genau einmal vorkommt und daß die Zahlen auf jeder Dreiecksseite die gleiche Summe ergeben.

Ermitteln Sie alle derartigen Eintragungen, die nicht durch Spiegelung ineinander überführt werden können!

31. Mathematik-Olympiade 1991/92
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310931:

Denkt man sich an jede Ecke eines räumlichen Körpers eine Zahl geschrieben, so bezeichnen wir für jede Seitenfläche dieses Körpers als "Flächensumme" dieser Seitenfläche die Summe aus den Zahlen, die an die Ecken dieser Seitenfläche geschrieben werden.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, an die Ecken eines Oktaeders die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 in einer solchen Reihenfolge zu schreiben, daß alle acht Flächensummen des Oktaeders einander gleich sind!

Aufgabe 310932:

In einer Sammlung von Kuriositäten soll sich ein Gefäß mit folgender Aufschrift befunden haben:

> Fünf Strich Zwei Null als Maß passt in mich, nach der ersten Ziffer lies "durch" für den Strich!
> Oder dreh' um, Null Zwei Fünf findest du, nach der ersten Ziffer ein Komma füg' zu!

In der Tat ist $\frac{5}{20} = 0,25$.

Gibt es noch andere Zusammenstellungen von drei Ziffern, bei denen die Vorschrift, in gleicher bzw. in umgekehrter Reihenfolge jeweils nach der ersten Ziffer den Divisionsstrich bzw. das Dezimalkomma zu schreiben, auf zwei einander gleiche Zahlenwerte führt?

Aufgabe 310933:

a) Silke behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes Dreieck ABC ist es möglich, die Fläche dieses Dreiecks durch geradlinige Schnitte in k^2 einander kongruente, zu ABC ähnliche Dreiecke zu zerlegen.

b) Hanka behauptet: Für jede natürliche Zahl $k \geq 2$ und jedes konvexe n-Eck $A_1A_2A_3...A_n$ $(n > 3)$ ist es möglich, die Fläche dieses n-Ecks durch geradlinige Schnitte in eine Anzahl t von Teilflächen zu zerlegen, aus denen sich k^2 einander kongruente, zu $A_1A_2A_3...A_n$ ähnliche n-Ecke zusammensetzen lassen, wobei zum Zusammensetzen jede der t Teilflächen nur einmal verwendet wird und keine übrigbleibt.

Untersuchen Sie, ob a) Silkes, b) Hankas Behauptung wahr ist!

Hinweis: Eine Fläche F heißt genau dann konvex, wenn jede Strecke, deren Eckpunkte in F liegen, ganz in F liegt.

Aufgabe 310934:

Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Auf der Verlängerung von BA über A hinaus liege ein Punkt D, auf der Verlängerung CB über B hinaus ein Punkt E, und auf der Verlängerung von AC über C hinaus liege ein Punkt F. Ferner werde vorausgesetzt, daß das Dreieck DEF gleichseitig sei.

Man beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF}$ folgt.

Aufgabe 310935:

Man ermittle und zeichne in einem x, y-Koordinatensystem alle diejenigen Punkte, deren Koordinaten $(x; y)$ die Gleichung $|\,x + y\,| + |\,x - y\,| = 4$ erfüllen.

Aufgabe 310936:

Für die Reihenfolge, in der sich die neun Buchstaben A, B, C, D, E, F, G, H, J von links nach rechts anordnen lassen, seien die folgenden sieben Bedingungen gefordert: Es soll

A links von B,
A links von C,
A links von D,
E links von F,
E links von G,
E links von H,
E links von J

stehen. Wieviele verschiedene Reihenfolgen, bei denen diese sieben Bedingungen erfüllt sind, gibt es insgesamt?

Hinweise:

In jeder der genannten Reihenfolgen soll jeder der neun Buchstaben genau einmal vorkommen.

Die Formulierung "X links von Y" schließt nicht aus, daß zwischen X und Y noch andere der Buchstaben stehen.

32. Mathematik-Olympiade 1992/93
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320911:

Anne rechnet mit einem einfachen Taschenrechner. Als Ergebnis der Aufgabe 1 : 13 erhält sie die mit 6 Stellen nach dem Dezimalpunkt gezeigte Zahl 0.076923.

Britta meint: "Man kann den wahren Dezimalbruch finden, ohne das bekannte schriftliche Divisionsverfahren noch einmal von vorn zu beginnen; man braucht nur noch eine einfache Rechnung, z.B. mit diesem Taschenrechner, durchzuführen und muß dann ein wenig überlegen."

Wie kann eine solche Rechnung und Überlegung verlaufen?

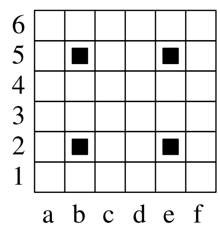
Aufgabe 320912:

Drei natürliche Zahlen a, b, c mit $0 < a \leq b < c$, für die die Gleichung $a^2 + b^2 = c^2$ gilt, nennt man ein Pythagoreisches Zahlentripel.

Man beweise: In jedem Pythagoreischen Zahlentripel a, b, c muß $a \neq 1$ sein.

Aufgabe 320913:

Auf einem 6×6-Felder-Brett (siehe Abbildung) sind die Felder b2, b5, e2 und e5 besetzt, die anderen Felder sind frei. Ein Springer des Schachspiels soll (in seiner Gangart) so geführt werden, daß er jedes freie Feld genau einmal erreicht.



a) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf a1 beginnt und auf f1 endet!

b) Geben Sie einen solchen Weg an, der auf einem Feld endet, von dem aus das Anfangsfeld des Weges mit einem einzigen Springerzug erreichbar ist!

c) Besetzen Sie nun vier andere Felder des Brettes so, daß es für den Springer keinen Weg gibt, der jedes freie Feld genau einmal erreicht! Begründen Sie, daß es (bei Ihrer Wahl besetzter Felder) keinen solchen Weg gibt!

Aufgabe 320914:

Über jeder Seite eines spitzwinkligen Dreiecks ABC werde nach außen dasjenige gleichschenklige Dreieck errichtet, dessen Basis die betreffende Seite von ABC ist und dessen Winkel an der Spitze ebenso groß ist wie der im Dreieck ABC der genannten Seite gegenüberliegende Innenwinkel.

Beweisen Sie, daß sich die Umkreise der drei so konstruierten neuen Dreiecke in einem Punkt schneiden!

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden: Je zwei dieser drei Umkreise schneiden sich außer in einem Eckpunkt des Dreiecks ABC noch ein zweites Mal im Innern des Dreiecks ABC.

32. Mathematik-Olympiade 1992/93
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320921:

Ein *pythagoreisches Zahlentripel* $(a; b; c)$ besteht aus drei von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen a, b, c, für die $a^2 + b^2 = c^2$ gilt.

a) Geben Sie drei verschiedene Tripel $(a; b; c)$ mit $a \leq b$ an und bestätigen Sie, daß es pythagoreische Zahlentripel sind!

b) Warum gibt es kein pythagoreisches Zahlentripel mit $a = b$?

Aufgabe 320922:

In der Ebene seine vier paarweise verschiedene Geraden gegeben.

a) Welches ist die größtmögliche Anzahl derjenigen Punkte, die Schnittpunkt von (jeweils mindestens) zwei der gegebenen Geraden sind?

b) Stellen Sie fest, welche der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 als Anzahl solcher Schnittpunkte möglich ist und welche nicht!

Aufgabe 320923:

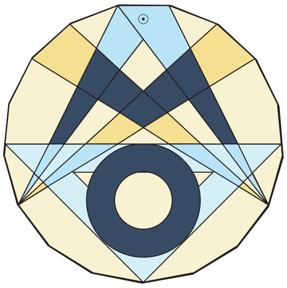
Beim Tanken eines Oldtimers mit Zweitaktmotor, der ein Öl-Kraftstoff-Gemisch von 1 : 50 benötigt, wurden zunächst versehentlich 7 Liter Kraftstoff ohne Öl getankt.

Wieviel Liter Gemisch mit dem noch lieferbaren Verhältnis 1 : 33 müssen nun hinzugetankt werden, damit sich das richtige Mischungsverhältnis von 1 : 50 ergibt? Die gesuchte Literzahl ist auf eine Stelle nach dem Komma genau zu ermitteln.

Aufgabe 320924:

Auf einer Geraden g seien A, B, C drei Punkte; B liege zwischen A und C. Über der Strecke AC sei nach einer Seite von g das gleichseitige Dreieck ACP errichtet, über die Strecken AB und BC nach der anderen Seite von g die gleichseitigen Dreiecke ABQ und BCR.

Beweisen Sie, daß unter diesen Voraussetzungen (bei jeder Wahl der Streckenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$) die Mittelpunkte L, M bzw. N der Dreiecke ACP, ABQ und BCR stets die Ecken eines ebenfalls gleichseitigen Dreiecks sind!



32. Mathematik-Olympiade 1992/93
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320931:

In einem Land gibt es nur zwei Sorten von Menschen: Edelmänner und Schurken. Jeder Edelmann macht nur wahre Aussagen, jeder Schurke nur falsche Aussagen. Ein nicht aus diesem Land stammender Reporter berichtet, er habe folgendes Gespräch dreier Einwohner A, B und C dieses Landes gehört:

A sagt zu B: "Wenn C ein Edelmann ist, dann bist du ein Schurke."
C sagt zu A: "Du bist von anderer Sorte als ich."

Kann ein solches Gespräch stattgefunden haben? Wenn das der Fall ist, geht dann aus dem Gespräch für jeden der drei A, B, C eindeutig hervor, ob er Edelmann oder Schurke ist, und zu welchen Sorten gehören dann A, B und C?

Aufgabe 320932:

Wieviele Paare (x, y) natürlicher Zahlen für die $10x + y < 1\,993$ gilt, gibt es insgesamt?

Aufgabe 320933:

Gegeben ist eine Gerade g und auf ihr drei Punkte A, B, C, in dieser Reihenfolge angeordnet.

a) Ermitteln Sie in Abhängigkeit von den Längen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ den Radius eines Kreises k, der durch A und B geht und eine durch C gehende Tangente besitzt, die auf g senkrecht steht!

b) Beweisen Sie, daß es einen Kreis c um C gibt, auf dem alle Berührungspunkte der Tangente liegen, die von C an alle diejenigen Kreise k gelegt werden, die durch A und B gehen!

Aufgabe 320934:

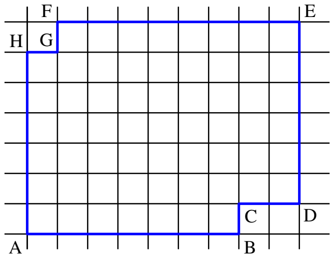
Ist p eine Primzahl, so sei M_p die Menge aller derjenigen Zahlen z, die sich mit positiven ganzen Zahlen x und y in der Gestalt $z = x^2 + p \cdot y^2$ darstellen lassen.

Beweisen Sie, daß für jede Primzahl p die folgende Aussage (*) gilt!

Wenn eine Zahl z der Menge M_p angehört, dann gehört auch die Zahl z^2 der Menge M_p an. (*)

Aufgabe 320935:

Auf kariertem Papier (eingeteilt in quadratische Karos) ist ein Achteck $ABCDEFGH$ wie in der Abbildung gezeichnet.



Jemand will es in zwei kongruente Teilflächen zerschneiden, und zwar sollen sich diese Teilflächen so miteinander zur Deckung bringen lassen, daß dabei A mit E zur Deckung kommt. Die Schnittkurve soll ein zusammenhängender Streckenzug sein, der sich selbst nicht überkreuzt und der nur aus Teilstrecken zusammengesetzt ist, die auf dem karierten Papier vorgegeben sind.

Beweisen Sie, daß es genau einen Streckenzug gibt, mit dem das Achteck wie gewünscht zerschnitten werden kann!

Aufgabe 320936:

a) Geben Sie drei ganz Zahlen x, y und z an, für die

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 12y - 14z - 57 = 0 \quad \text{gilt!} \tag{1}$$

b) Ermitteln Sie die Anzahl aller derjenigen Tripel (x, y, z) ganzer Zahlen x, y, z, die die Gleichung (1) erfüllen!

33. Mathematik-Olympiade 1993/94
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330921:

Multipliziert man eine dreistellige natürliche Zahl mit 7, so entsteht eine Zahl, die auf die Ziffern ... 638 endet.

Wie heißt die dreistellige Zahl?

Aufgabe 330922:

Zum Mahlen einer Getreidemenge können zwei Mahlwerke A und B eingesetzt werden. Jedes Mahlwerk bewältigt in gleichen Zeiten gleiche Mengen.

Wenn man zunächst 8 Stunden lang nur mit dem Mahlwerk A mahlen würde und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 18 Stunden benötigen, bis die gesamte Getreidemenge bewältigt ist. Würde aber zunächst 10 Stunden lang nur mit A gemahlen und anschließend nur mit B, so würde B noch genau 15 Stunden benötigen, bis die gesamte Menge bewältigt ist.

Wie lange wird es dauern, die gesamte Menge zu bewältigen, wenn A und B von Anfang an zusammen eingesetzt werden?

Aufgabe 330923:

Das nebenstehende "Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, daß als Anfangsziffer (für M, R und K) nicht die Ziffer Null auftreten darf.

$$\begin{array}{cccccc} & & M & O & R & D \\ + & & R & A & U & B \\ \hline = & K & R & I & M & I \end{array}$$

Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

a) Geben Sie eine Lösung an!

b) Beweisen Sie, daß es mindestens 15 Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweise:

1. Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.
2. Die Ähnlichkeit des Buchstabens O mit der Ziffer 0 (Null) soll keine Bedeutung haben; d.h., der Buchstabe 0 darf auch durch eine von Null verschiedene Ziffer ersetzt werden.

Aufgabe 330924:

Beweisen Sie, daß für jedes nicht gleichschenklige Dreieck ABC die folgende Aussage gilt!

Ist X der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von BC mit der Winkelhalbierenden durch A und ist Y der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten von AC mit der Winkelhalbierenden durch B, so liegen die vier Punkte A, B, X, Y auf einem gemeinsamen Kreis.

33. Mathematik-Olympiade 1993/94
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330931:

Beweisen Sie, daß es unendlich viele Stammbrüche gibt, die sich als Summe zweier voneinander verschiedener Stammbrüche darstellen lassen!

Hinweis: Ein Bruch heißt genau dann ein Stammbruch, wenn sein Zähler 1 lautet und sein Nenner eine natürliche Zahl ist.

Aufgabe 330932:

Für jede positive ganze Zahl n denke man sich nach folgender Vorschrift eine weitere Zahl n' gebildet:

Aus der Zifferndarstellung von n im Dezimalsystem wird die erste Ziffer weggenommen und stattdessen hinter die letzte Ziffer angefügt. Dann sei n' die Zahl mit der entstandenen Zifferndarstellung.

Untersuchen Sie, ob es durch 7 teilbare Zahlen n gibt, für die $n' = n : 7$ gilt!

Aufgabe 330933:

Antje hat in einem älteren Geometriebuch folgende Näherungskonstruktion für regelmäßige Vielecke mit gegebener Seitenlänge s gefunden:

Man konstruiere ein gleichseitiges Dreieck ABC mit der Seitenlänge s. Dann konstruiere man den Mittelpunkt D von AB und verlängere die Strecke DC über C hinaus. Auf dieser Verlängerung trage man fortgesetzt Strecken der Länge $\frac{s}{6}$ ab. Die dabei der Reihe nach erhaltenen Punkte seien mit M_7, M_8, M_9, ... bezeichnet. Für $n > 6$ ist dann jeweils der durch A und B gehende Kreis um M_n näherungsweise der Umkreis eines regelmäßigen n-Ecks der Seitenlänge s_n.

Beate behauptet, speziell für $n = 12$ gelte das nicht nur näherungsweise, sondern sogar genau.

Beweisen Sie diese Behauptung!

Aufgabe 330934:

Das obenstehende "Kryptogramm" stellt die Aufgabe, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzten, daß eine richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Dabei soll auch die Regel beachtet werden, daß als Anfangsziffer (für Z, D und F) nicht die Ziffer Null auftreten darf. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen.

$$\begin{array}{ccccc} & Z & W & E & I \\ + & D & R & E & I \\ \hline = & F & \ddot{U} & N & F \end{array}$$

a) Geben Sie eine Lösung an!

b) Untersuchen Sie, ob es mehr als fünf Lösungen gibt, von denen keine zwei einander gleich sind!

Hinweis: Zwei Lösungen heißen genau dann einander gleich, wenn in der einen dieser Lösungen jeder Buchstabe durch dieselbe Ziffer ersetzt wird wie in der anderen dieser Lösungen.

Aufgabe 330935:

Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n mit der Eigenschaft, daß die drei Zahlen $n + 1$, $n + 10$ und $n + 55$ einen gemeinsamen Teiler größer als 1 haben!

Aufgabe 330936:

Man beweise, daß für jedes konvexe Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt:

Sind M_1, M_2, M_3, M_4 die Mittelpunkte der Seiten AB, BC, CD, DA und M_5, M_6 die Mittelpunkte der Diagonalen AC, BD so gehen die drei Strecken M_1M_3, M_2M_4 und M_5M_6 durch einen gemeinsamen Punkt.

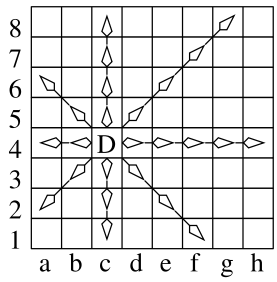
Hinweis: Ein Viereck ist genau dann konvex, wenn alle seine Innenwinkel kleiner als 180° sind.

33. Mathematik-Olympiade 1993/94
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330941 = 331043:

Auf einem Schachbrett wird eine Figur "Dame" betrachtet, die wie im Schachspiel ziehen kann, also in den acht Richtungen parallel zum Brettrand oder diagonal, jeweils beliebig viele Felder. (siehe z.B. in der Abbildung alle von c4 aus möglichen Züge.)



Als *Länge eines Zuges* werde stets die Streckenlänge vom Mittelpunkt des Anfangsfeldes zum Mittelpunkt des Zielfeldes bezeichnet. Dabei werde die Seitenlänge jedes der 64 quadratischen Felder als Längeneinheit genommen. Gesucht wird eine Zugfolge, die den folgenden Bedingungen genügt:

(1) Bei jedem Zug der Zugfolge - mit Ausnahme des letzten - soll der Zug, der sich anschließt (d.h. als Startfeld das eben erreichte Zielfeld hat), eine *größere Länge* haben als der Zug, an den er sich anschließt.

(2) Das Zielfeld des letzten Zuges soll dem Startfeld des ersten Zuges *benachbart* sein (und zwar eine Seite mit ihm gemeinsam haben, nicht nur eine Ecke).

(3) Die Zugfolge soll in der Summe der Längen ihrer Züge *von keiner Zugfolge, die den Bedingungen (1) und (2) genügt, übertroffen* werden.

Geben Sie eine Zugfolge an und beweisen Sie, daß sie die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt!

Aufgabe 330942:

Ermitteln Sie alle diejenigen Tripel (a, b, c) positiver ganzer Zahlen a, b, c von denen keine größer als 100 ist und mit denen die Ungleichungen

$$a + b \geq 101, \qquad a + c \leq 101, \qquad a + b + c \geq 201 \quad \text{gelten!}$$

Aufgabe 330943 = 331043:

Zu einem regelmäßigen Achteck werde ein Quadrat so konstruiert, daß der Mittelpunkt des Achtecks ein Eckpunkt des Quadrates ist und daß zwischen der Seitenlänge a des Achtecks und der Seitenlänge b des Quadrats die Ungleichung $b \geq \frac{4}{3}a$ gilt. Dann bezeichne f den Flächeninhalt desjenigen Flächenstücks, das dem Achteck und dem Quadrat gemeinsam ist.

Man beweise, daß zu gegebenem Achteck für alle Quadrate, die dieser Beschreibung entsprechen, f denselben Wert hat.

Aufgabe 330944:

Jemand findet die Angabe $22! = 11240007277 * *607680000$.

Darin sind auch die zwei durch * angedeuteten unleserlichen Ziffern. Er möchte diese Ziffern ermitteln, ohne die Multiplikationen vorzunehmen, die der Definition von 22! entsprechen.

Führen Sie eine solche Ermittlung durch und begründen Sie sie! Dabei darf verwendet werden, daß die angegebenen Ziffer korrekt sind.

Hinweis: Für jede positive ganze Zahl n wird $n!$ definiert als das Produkt aller positiven ganzen Zahlen von 1 bis n.

Aufgabe 330945 = 331045:

Bei Verwendung eines kartesischen Koordinatensystems werde ein Punkt der Ebene "rational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten rationale Zahlen sind; er werde "irrational" genannt, wenn seine beiden Koordinaten irrationale Zahlen sind; er werde "gemischt" genannt, wenn eine seiner Koordinaten rational und die andere irrational ist.

a) Gibt es in der Ebene Geraden, die nur Punkte einer Sorte enthalten? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede der drei Sorten "rational", "irrational", "gemischt"!

b) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus genau zwei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist? Ermitteln Sie die Antwort auf diese Frage für jede Zusammenstellung von zwei der drei Sorten!

c) Gibt es in der Ebene Geraden, in denen aus jeder der drei Sorten (mindestens) je ein Punkt enthalten ist?

Aufgabe 330946:

Ist P ein Punkt im Innern eines Dreiecks ABC, so kann folgende Konstruktion durchgeführt werden: Die Parallele durch P zu CB schneidet AB in S_1, die Parallele durch S_1 zu AC schneidet BC in S_2, die Parallele durch S_2 zu BA schneidet CA in S_3. In dieser Weise kann man für $k = 1, 2, 3, ...$ fortsetzen:

Die Parallele durch S_{3k} zu CB schneidet AB in S_{3k+1}, die Parallele durch S_{3k+1} zu AC schneidet BC in S_{3k+2}, die Parallele durch S_{3k+2} zu BA schneidet CA in S_{3k+3}.

Beweisen Sie, daß für jedes Dreieck ABC und jeden Punkt P im Innern dieses Dreiecks eine der so konstruierten Parallelen wieder durch P gehen muß!

34. Mathematik-Olympiade 1994/95
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340921:

Die Bewohner des Planeten Trion unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau drei verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau drei Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau drei Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 9 Sitze in quadratförmiger Formierung zu drei Zeilen und drei Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und jeder Spalte müssen alle drei Völkerstämme und alle drei Geschlechter vertreten sein.

Geben Sie eine mögliche Sitzordnung an und bestätigen Sie, daß bei dieser Sitzordnung alle genanten Bedingungen erfüllt sind!

Aufgabe 340922:

Jonas beschäftigt sich mit der Lösung des Kryptogramms

$$\begin{array}{ccccc} & E & I & N & S \\ + & A & C & H & T \\ \hline = & N & E & U & N \\ \hline\hline \end{array}$$

d.h., er versucht, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine (im dekadischen Positionssystem) richtig gerechnete Additionsaufgabe entsteht. Gleiche Buchstaben sind durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Ferner ist auch die Regel einzuhalten, daß in jeder Zeile als Anfangsziffer nicht die Ziffer Null auftritt.

Nach einer Stunde behauptet Jonas, er habe immerhin schon 25 verschiedene Lösungen gefunden. Felix bezweifelt, daß es überhaupt so viele verschiedene Lösungen gibt.

Hat Felix mit seinem Zweifel recht?

Aufgabe 340923:

Ausgehend von einem Quadrat $ABCD$ kann man für je zwei positive ganze Zahlen x und y die folgenden Konstruktionen ausführen:

Die Seite AB wird über B hinaus um die Länge $x \cdot \overline{AB}$ bis zum Punkt S verlängert,
die Seite BC wird über C hinaus um die Länge $y \cdot \overline{BC}$ bis zum Punkt T verlängert,
die Seite CD wird über D hinaus um die Länge $x \cdot \overline{CD}$ bis zum Punkt U verlängert,
die Seite DA wird über A hinaus um die Länge $y \cdot \overline{DA}$ bis zum Punkt V verlängert.

Ermitteln Sie alle diejenigen Paare $(x; y)$ positiver ganzer Zahlen, für die das so erhaltende Viereck $STUV$ einen genau 11 mal so großen Flächeninhalt wie das Quadrat $ABCD$ hat!

Aufgabe 340924:

Über der Seite AB des gleichseitigen Dreiecks ABC mit gegebener Seitenlänge a werde nach außen das Quadrat $ABPQ$ errichtet. Anschließend stellt man sich dieses Quadrat beweglich vor. Es soll in mathematisch positivem Drehsinn um das Dreieck ABC herum "rollen, ohne zu gleiten". (Zu Anfang bleibt also nur der Punkt B fest, die anderen Punkte bewegen sich, bis die Strecke BP in die Lage von BC kommt; dann bleibt C fest u.s.w.).

a) Auf diese Weise werde das Quadrat so lange gerollt, bis es zum ersten Mal wieder eine mit AB zusammenfallende Seite hat (dies muß nicht die Seite sein, die zu Anfang AB war).

   Wie lang ist dabei der Weg, den

   - der Punkt A,
   - der Mittelpunkt M des Quadrates $ABCD$,
   - der Mittelpunkt H der Seite AB des Quadrates

   zurücklegt?

b) Ausgehend von dem Anfangszustand $ABPQ$ wurde nicht nur eine in a) beschriebene "*volle Umrundung des Dreiecks ABC*" durchgeführt, sondern in Fortsetzung hierzu wurde das Quadrat weitergerollt. Dies wurde erst dann beendet, als zum ersten Mal jeder der vier Punkte A, B, P, Q seine ursprüngliche Lage wieder erreicht hatte.

   - Wie viele volle Umrundungen des Dreiecks ABC fanden vom Anfangszustand bis zum geschilderten Ende dabei insgesamt statt?
   - Wie viele *volle Umdrehungen des Quadrats, bezogen auf seien eigenen Mittelpunkt M* wurden dabei insgesamt ausgeführt?

34. Mathematik-Olympiade 1994/95
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340931:

Jürgen wählt auf einem Zeichenblatt drei Punkte A, B, C so aus, daß es keine Gerade gibt, auf der alle drei Punkte liegen, und daß die Strecke AB eine andere Länge hat als die Strecke BC. Dann versucht er, einen Punkt X zu konstruieren, der weder auf der durch A und B gelegten Geraden g noch auf der durch B und C gelegten Geraden h liegt und der außerdem die beiden folgenden Bedingungen (1), (2) erfüllt:

(1) Der Punkt X hat von g den gleichen Abstand wie von h.

(2) Die Strecken AB und BC erscheinen von X aus unter gleichgroßen Winkeln; d.h. der Winkel $\sphericalangle AXB$ ist ebenso groß wie der Winkel $\sphericalangle BXC$.

Christa behauptet: Es gibt keinen solchen Punkt X; gleichgültig welche Wahl von A, B, C (mit den eingangs genannten Lagebedingungen) Jürgen getroffen hat.

Hat Christa recht?

Aufgabe 340932 = 341031:

Beweisen Sie, daß es keine natürliche Zahl n gibt, für die die Zifferndarstellung der Zahl $9^n + 1$ auf mehr als eine Null enden würde!

Aufgabe 340933 = 341032:

Berechnen Sie die Zahl

$$123456785 \cdot 123456787 \cdot 123456788 \cdot 123456796 - 123456782 \cdot 123456790 \cdot 123456791 \cdot 123456793$$

ohne die Zahlenwerte der beiden Produkte einzeln zu berechnen!

Aufgabe 340934 = 341034:

Ein Quadrat $ABCD$ sei in 25 kongruente Teilquadrate aufgeteilt. Ist n eine positive ganze Zahl mit $n \leq 25$, so seien n verschiedene Farben gewählt, und von jeder dieser Farben seien 25 Blättchen von der Größe der Teilquadrate zur Verfügung gestellt. Von diesen $n \cdot 25$ Blättchen sollen dann 25 ausgewählt und so auf das Quadrat $ABCD$ gelegt werden, daß jedes Teilquadrat von genau einem der ausgewählten Blättchen bedeckt wird.

Eine Zahl n werde genau dann eine "freundliche" Zahl genannt, wenn für sie folgendes gilt:

Bei *jeder* Auswahl von 25 der $n \cdot 25$ Blättchen, bei der jede der n Farben mit mindestens einem Blättchen vertreten ist, kann man die Verteilung auf die Teilquadrate so vornehmen, daß das bedeckte Quadrat $ABCD$ als farbiges Muster symmetrisch bezüglich der Geraden durch A und C ist.

Ermitteln Sie unter den positiven ganzen Zahlen $n \leq 25$ alle "freundlichen" Zahlen!

Aufgabe 340935:

Man ermittle alle diejenigen positiven ganzen Zahlen n, für die jede der sechs Zahlen

$$n, \qquad n+2, \qquad n+6, \qquad n+8, \qquad n+12, \qquad n+14$$

eine Primzahl ist.

Aufgabe 340936:

Es sei $ABCD$ ein (nicht notwendig regelmäßiges) Tetraeder, bei dem die vier Tetraederflächen ABC, ABD, ACD und BCD alle einander kongruent sind. Ferner sei h die Länge der auf einer der vier Tetraederflächen senkrechten Höhe, und P sei ein Punkt im Innern des Tetraeders $ABCD$.

Man beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die folgende Aussage gilt:

Die Summe der Abstände von P zu den vier Tetraederflächen beträgt h.

Hinweis: Der *Abstand* eines Punktes zu einer begrenzten ebenen Fläche werde definiert als die Länge des Lotes von diesem Punkt auf die ebene, in der die Fläche liegt. Das gelte auch dann, wenn der Fußpunkt des Lotes (zwar in der Ebene, aber) außerhalb der Begrenzung der ebenen Fläche liegt. In diesem Sinne wird auch die auf einer Tetraederfläche senkrechte *Höhe* stets als Lot von der Gegenecke auf die Ebene verstanden, in der die Tetraederfläche liegt.

34. Mathematik-Olympiade 1994/95
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 9
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340941 = 340841:

Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.

Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, daß bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Aufgabe 340942 = 341041:

Zeigen Sie, daß die Zahl $z = 7 + 7^3 + 7^5 + 7^7 + ... + 7^{93} + 7^{95}$ durch 336 teilbar ist!

Aufgabe 340943 = 341042:

Auf der Seite AB des Quadrates $ABCD$ werde ein Punkt $X \neq A$ gewählt. Dann werde das Quadrat durch die Strecken AC und XD in vier Teilflächen zerlegt.

Ermitteln Sie alle Möglichkeiten, die Wahl von X so zu treffen, daß es natürliche Zahlen p, q und r gibt, für die die Flächeninhalte dieser Teilflächen in geeigneter Reihenfolge im Verhältnis $1 : p : q : r$ stehen!

Aufgabe 340944 = 340844:

Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte	7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert	7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden:

Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt. Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen. Er wird dann umgedreht, so daß die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.

1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.

2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.

Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese ”Restkarten” einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt. Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden.

Wie ist das möglich?

Aufgabe 340945 = 341045:

Einem regelmäßigen Tetraeder $ABCD$ wird die Inkugel K einbeschrieben (das ist diejenige Kugel, die alle vier Dreiecksflächen ABC, ABD, ACD, BCD berührt). Dieser Kugel wird ein zweiter regelmäßiger Tetraeder $PQRS$ einbeschrieben (d.h., seine Ecken P, Q, R, S liegen alle auf der Oberfläche der Kugel K).

Welches Verhältnis $V_2 : V_1$ bildet das Volumen V_2 eines solchen Tetraeders $PQRS$ mit dem Volumen V_1 von $ABCD$?

Aufgabe 340946 = 340846:

Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die die Ungleichung $|x - 30| + |y - 10| < 100$ erfüllen, gibt es insgesamt