1. - 34. Olympiade - Klasse 8

Aufgaben und Lösungen

1. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010811:
Berechne:

$$\left(1\tfrac{2}{3}cd + \tfrac{25}{4}dg - 2\tfrac{1}{2}d\right) : 5d - \left(\tfrac{7}{2}mn - 1\tfrac{1}{4}ng + \tfrac{3}{4}n\right) : \left(-\tfrac{3}{8}n\right).$$

Aufgabe 010812:
In diesem Jahr werden in der UdSSR 8,3 Milliarden Meter Stoffe gewebt. Jemand behauptet, daß man damit die ganze Bahnlänge des Mondes um die Erde „auslegen“ könnte. Hat er recht? (Die Mondbahn sei als Kreisbahn angenommen. Der mittlere Abstand des Mondes von der Erde beträgt 384 000 km.)

Aufgabe 010813:
Wenn die Summe von 4 beliebigen natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine ungerade Zahl ist, so ist ihr Produkt eine gerade Zahl.

Probiere es! Beweise die Behauptung!

Aufgabe 010814:
Setze in ein „magisches Quadrat“ mit 9 Feldern die Zahlen von 3 bis 11 so ein, daß die Summe jeder Reihe, jeder Spalte und jeder Diagonalen 21 beträgt! Beginne mit dem Mittelfeld!

Begründe deine Anordnung der Zahlen!

Aufgabe 010815:
Bei einem mehradrigen Kabel werden Adern gleichen Durchmessers um eine Mittelader vom gleichen Durchmesser so angeordnet, daß sie einander berühren.

a) Wieviel Adern braucht man?

b) Beweise diese Behauptung!

Aufgabe 010816:
Es ist ein Kreis zu konstruieren, der eine gegebene Gerade g in dem gegebenen Punkt B berührt und durch einen gegebenen Punkt A geht, der nicht auf g liegt.

Begründe die Konstruktion!

1. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010821:

Die Stahlerzeugung ist in der UdSSR bis 1960 gegenüber 1913 (zaristisches Rußland) auf etwa 1 640 Prozent gesteigert worden.

In wieviel Tagen wurde 1960 in der UdSSR genausoviel Stahl erzeugt wie im gesamten Jahr 1913?

Aufgabe 010822:

Für eine große Schmiedepresse wurden als Führungssäulen vier Stahlzylinder mit einem Durchmesser von $d = 512$ mm und einem Gesamtgewicht von $G = 68$ Mp gedreht.

Wie lang ist eine Führungssäule? (Wichte des Stahls $\gamma = 7{,}85$ p/cm^3.)

Aufgabe 010823:

In der Messe eines Schiffes unserer Fischereiflotte sitzen die Mitglieder der Besatzung und sprechen über ihr Alter.

> Der Steuermann sagt: "Ich bin doppelt so alt wie der jüngste Matrose und 6 Jahre älter als der Maschinist."
>
> Der 1. Matrose sagt: "Ich bin 4 Jahre älter als der 2. Matrose und ebenso viele Jahre älter als der jüngste Matrose, wie ich jünger bin als der Maschinist."
>
> Der 2. Matrose sagt: "Gestern habe ich meinen 20. Geburtstag gefeiert."

Die Besatzung besteht aus 6 Mitgliedern, das Durchschnittsalter beträgt genau 28 Jahre.

Wie alt ist der Kapitän?

Aufgabe 010824:

Können zwei Sehnen eines Kreises, die nicht Durchmesser sind, einander halbieren? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 010825:

Gibt es in einem Drachenviereck, das nicht gleichzeitig Rhombus ist, einen Punkt, dessen Abstände von den vier Seiten einander gleich sind? Wenn ja, dann konstruiere diesen Punkt und beweise, daß er die angegebene Eigenschaft hat!

1. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 010831:

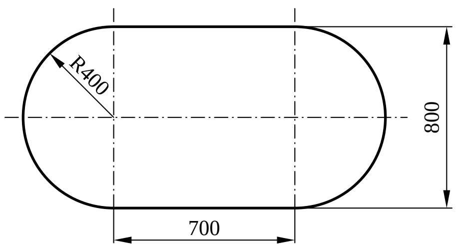
In einem Kreis wurde in einem Quartal der Plan für die Produktion von Mauersteinen (Plan: 1 350 000 Stück) insgesamt mit 100,1 Prozent erfüllt. Eine Überprüfung der Betriebe zeigte, daß dabei zwei Betriebe, die laut Plan 150 000 bzw. 290 000 Stück Mauersteine zu produzieren hatten, den Plan nur mit 80,0 Prozent bzw. 86,2 Prozent erfüllt hatten.

a) Wieviel Mauersteine hätten in diesem Kreis produziert werden können, wenn diese beiden Betriebe ihren Plan mit 100 Prozent erfüllt hätten?

b) Wieviel Prozent hätte in diesem Falle die Planerfüllung für den Kreis betragen?

Aufgabe 010832:

Peter hat für seine Modelleisenbahn ein "Schienenoval" auf einem Brett aufgebaut (siehe dazu die Skizze; die Kreisbögen sind Halbkreise).



Hans, den er eingeladen hat, fragt plötzlich: "Was meinst du, fährt der Zug so schnell wie in Wirklichkeit?" Peter antwortet: "Bestimmt nicht, stell dir doch einmal einen richtigen Zug daneben vor! Unser Zug schafft doch höchstens einen Kilometer in der Stunde!"

"Ja", sagt Peter, "das schon, aber 1 km bedeutet ja für die Anlage etwas ganz anderes. Man müßte es umrechnen." Sie überlegen und ermitteln dann folgende Werte:

Zeit für eine Umkreisung:	11 s
Spurweite der Modellbahn:	18,5 mm
Spurweite in Wirklichkeit:	1 435 mm

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Zuges tatsächlich?

b) Wie groß wäre die Geschwindigkeit vom Standpunkt der Modelleisenbahn?

Aufgabe 010833:

Zu beweisen ist folgender Satz:

Die Summe zweier beliebiger aufeinanderfolgender gerader Zahlen ist nicht durch 4 teilbar!

Welcher Rest bleibt bei Division durch 4 ?

Aufgabe 010834:

Wer hat den Ring?

Ruth, Fritz, Ewald, Brigitte und Erika spielen ein Pfänderspiel. Ruth verläßt das Zimmer; inzwischen versteckt eines der anderen Kinder einen Ring bei sich. Ruth kehrt zurück und soll feststellen, wer den Ring hat. Nun macht jedes Kind drei Aussagen. Von diesen Aussagen sind zwei richtig und eine falsch. Ruth soll auf Grund dieser Aussagen, ohne zu raten, finden, wer den Ring hat.

Ewald:	1.	Ich habe den Ring nicht.
	2.	Fritz hat den Ring.
	3.	Ich habe dieses Spiel schon oft gespielt.
Fritz:	1.	Ich habe den Ring nicht.
	2.	Ewald irrt sich, wenn er meint, daß ich den Ring habe.
	3.	Erika hat den Ring.

Jetzt unterbricht Ruth und sagt: "Ich muß nachdenken, vielleicht finde ich jetzt schon, wer den Ring hat." Und nach wenigen Minuten sagt Ruth, wer den Ring hat. Wie konnte sie das feststellen?

Aufgabe 010835:

Gegeben sind die Punkte P und Q mit einem Abstand von 5 cm.

Konstruiere zwei Parallelen, von denen eine durch P, die andere durch Q geht und die voneinander einen Abstand $a = 3$ cm haben!

Begründe die Konstruktion! Wieviel verschiedene Möglichkeiten gibt es dabei in der Ebene?

2. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020811:

Kann die Summe von drei beliebigen, aber aufeinanderfolgenden natürlichen (positiven ganzen) Zahlen eine Primzahl sein? Die Antwort ist zu begründen!

Aufgabe 020812:

Für den Zusammenbau von 1 000 kompletten Schalterteilen für elektrische Geräte benötigte im VEB Elektro-Apparate-Werk Berlin-Treptow ein Arbeiter bisher $27\frac{1}{2}$ Stunden. In einem Schülerwettbewerb unterbreitete ein Schüler einen Verbesserungsvorschlag, durch den diese Zeit auf $16\frac{1}{2}$ Stunden verringert werden konnte.

a) Um wieviel Prozent verringerte sich die Arbeitszeit?

b) Um wieviel Prozent erhöhte sich dabei die Arbeitsproduktivität?

Anmerkung: Unter der Arbeitsproduktivität versteht man in diesem Falle den Quotienten aus der Anzahl der Schalterteile und der für ihre Herstellung benötigten Arbeitszeit.

Aufgabe 020813:

Im Berliner Stadtzentrum wird das neue Hotel Berolina gebaut. Es ist an der Vorderfront mit 286 Außenwandplatten verkleidet. Für jedes der zehn Obergeschosse werden 26 nebeneinanderliegende Platten benötigt. Die beiden äußeren Platten haben eine Fläche von je $6{,}73\,\text{m}^2$, alle anderen 24 Platten eines Geschosses eine Fläche von je $6{,}37\,\text{m}^2$. Die Plattenhöhe beträgt 2,74 m. Den oberen Abschluß der Fassade bilden als Verkleidung des Dachgeschosses ebenfalls 26 Platten. Von diesen Platten haben die äußeren eine Fläche von je $3{,}73\,\text{m}^2$. Die Höhe aller dieser Platten beträgt 1,52 m.

Es sind zu berechnen:

a) die Höhe der Fassade,

b) die Länge der Fassade!

Anmerkung: Zwischen je zwei Platten verbleibt stets eine Fuge von 5 cm Breite. Zur Höhe ist außerdem noch die der Empfangshalle mit 10 m hinzuzufügen.

Aufgabe 020814:

Bei der folgenden Divisionsaufgabe sind die fehlenden Ziffern zu ergänzen! Wie wurden die Ziffern ermittelt? (Begründung!)

```
* * * * * * * * *  : ? =  * * * * 8 * *
* * *
-----
    * * *
    * * *
    -----
      * * *
      * * *
      -----
          * *
          * *
          ---
            * * *
            * * *
            -----
                0
```

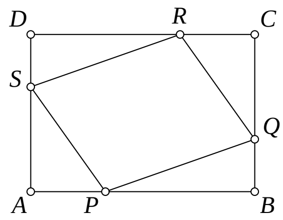
Aufgabe 020815:

Beweise folgenden Satz:

Liegt der Mittelpunkt des Umkreises eines Dreiecks auf einer seiner Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig!

Aufgabe 020816:

Gegeben sei ein Rechteck $ABCD$, dessen Seiten wie in der Abbildung sämtlich im Verhältnis $1:2$ geteilt seien. Wir nennen die Teilpunkte P, Q, R, S und verbinden sie fortlaufend miteinander.



a) Führe diese Konstruktion für das Rechteck mit den Seiten $AB = 10$ cm und $BC = 7$ cm durch!

b) Was für ein Viereck ist das Viereck $PQRS$? (Beweis!)

c) Wie verhält sich der Flächeninhalt des Vierecks $PQRS$ zu dem des Rechtecks $ABCD$? Gilt das Ergebnis auch für andere derartig geteilte Rechtecke? (Begründung!)

2. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020821:
Zu beweisen ist folgender Satz:

Wenn sich der Bruch $\frac{a-b}{a+b}$ nicht kürzen läßt, dann ist stets auch $\frac{a}{b}$ unkürzbar.

Aufgabe 020822:
Nach den Plänen, die auf dem XXII. Parteitag der KPdSU ausgearbeitet wurden, soll die Kohleförderung 1980 um 687 Millionen t höher liegen als im Jahre 1960. Die Kohleförderung im Jahre 1980 beträgt 234 Prozent im Vergleich zum Jahre 1960.

Berechne die geplante Kohleförderung des Jahres 1960! Runde auf volle Millionen t!

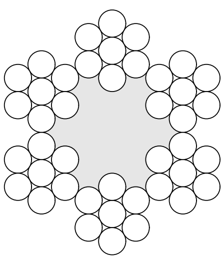
Aufgabe 020823:
Berechne:

$$\frac{m^2-n^2}{m-n}+\frac{m^2+2mn+n^2}{m+n}.$$

Aufgabe 020824:
Welche x erfüllen die folgende Gleichung:

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}\right):\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\right)?$$

Aufgabe 020825:



Drahtseile bestehen häufig aus Litzen, die wieder aus einzelnen Stahldrähten bestehen. Die Litzen sind um eine gefettete Hanfseele geschlagen, die das Seil von innen her schmiert. Die Abbildung zeigt den Querschnitt durch ein solches Drahtseil, das aus 42 Drähten und einer (grau gefärbten) Hanfseele besteht. Jeder Draht hat einen Durchmesser von 1 mm.

Wie groß ist der Durchmesser des dem Seilquerschnitt umbeschriebenen Kreises? Begründung!

Aufgabe 020826:

Klaus fährt mit seinem Moped mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine Straße entlang und passiert dabei zu Anfang einen Kilometerstein mit einer zweistelligen Zahl vor dem Komma. Nach genau $1\frac{1}{2}$ Stunden kommt er wiederum an einem Kilometerstein vorbei, auf dem vor dem Komma die gleichen Ziffern, jedoch in umgekehrter Reihenfolge stehen. Nach weiteren $1\frac{1}{2}$ Stunden ist er am Ziel und erblickt einen Kilometerstein, dessen dreistellige Zahl vor dem Komma aus den beiden Ziffern des ersten Steines, zwischen denen sich eine Null befindet, besteht. Hinter dem Komma stand in allen drei Fällen die gleiche Ziffer.

a) Welche Strecke legte Klaus zurück?

b) Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit fuhr er?

Aufgabe 020827:

Von einem Dreieck sind die Summe zweier Seiten und zwei Winkel gegeben:

$$a + b = 10\,\text{cm}, \qquad \beta = 45°, \qquad \gamma = 60°.$$

Konstruiere das Dreieck! Beschreibe und begründe die Konstruktion!

Aufgabe 020828:

Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $AB = 10\,\text{cm}$! Der Fußpunkt der Höhe h_c soll die Hypotenuse in zwei Abschnitte teilen, die sich wie $2 : 3$ verhalten.

Bestimme aus der Konstruktion die Länge von h_c! Beschreibe die Konstruktion!

Aufgabe 020829:

Folgende Behauptung ist zu beweisen:

Die Mittelpunkte der Quadrate, die über den Seiten eines beliebigen Parallelogramms so errichtet worden sind, daß die Quadrate außerhalb des Parallelogramms liegen, bilden fortlaufend miteinander verbunden ein Quadrat.

(Hier genügt es nicht, nur die Zeichnung anzufertigen, das ist kein Beweis! Es müssen die Eigenschaften eines Quadrates nachgewiesen werden. Die Eigenschaften sind: alle Seiten sind gleich lang, alle Winkel sind $90°$ groß.)

2. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 020831:

Zinkblende ist ein Erz und enthält 65 Prozent Zink. Von dieser Zinkmenge gehen bei der Gewinnung noch 15 Prozent verloren.

Wieviel kg Zinkblende sind erforderlich, um 1 000 kg Zink zu gewinnen?

Aufgabe 020832:

Rechenvorteile erleichtern das Kopfrechnen. Zwei Zahlen von 11 bis 19 kann man z. B. folgendermaßen multiplizieren:

$18 \cdot 17 =?$	$18 + 7$	25
	Null anhängen	250
	$7 \cdot 8$ addieren	306

Weise die Richtigkeit dieses Rechenvorteils nach!

Aufgabe 020833:

Rainer, der zur Fußballmannschaft der Schule gehört, schafft Ordnung in dem Schrank für Fußballschuhe. Er weiß, daß einige Schuhe zum Schuhmacher gebracht worden sind.

Er stellt fest, daß die Schuhe verschiedene Größen aufweisen, nämlich 37, 38, 39 und 40.

Sechs Paare sind ordnungsgemäß zusammengebunden, das sind Schuhe jeder Größe. Die meisten dieser Paare sind von der Größe 38.

Von den außerdem vorhandenen fünf rechten Schuhen ist keiner von der Größe 38, die meisten sind von der Größe 39.

Die außerdem noch vorhandenen acht linken Schuhe gehören zu jeder Größe, am meisten ist die Größe 40, am wenigsten die Größe 37 vertreten.

a) Wieviel Fußballschuhe sind beim Schuhmacher?

b) Was für Fußballschuhe sind das?

Begründe deine Antwort!

Aufgabe 020834:

Es soll ein Drachenviereck konstruiert werden, in dem 2 gegenüberliegende Winkel je 100° betragen, das Verhältnis der ungleichen Seiten 2 : 3 ist und eine Diagonale 7 cm mißt.

Aufgabe 020835:

Beweise folgenden Satz:

Wenn man durch den einen Schnittpunkt zweier Kreise die beiden Durchmesser zieht, so liegen deren andere Endpunkte mit dem zweiten Schnittpunkt der Kreise in einer Geraden.

Aufgabe 020836:

a) Gegeben sind drei Geraden g_1, g_2 und g_3, von denen keine auf einer anderen senkrecht steht. Sie schneiden einander im Punkt S. Auf g_1 liegt ein weiterer Punkt A. Gesucht ist das Dreieck ABC, in dem die Höhen auf den Geraden liegen.

b) Untersuche sämtliche Fälle, bei denen 2 Geraden aufeinander senkrecht stehen und der Punkt A auf einer dieser Geraden oder auf der dritten liegt!

3. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030811:

Im Jahre 1962 landeten die Fangfahrzeuge der Hochseefischerei 117 291 t Fisch an. Die Fangmenge im ersten Halbjahr 1963 betrug 74 445 t Fisch; das waren um 44 Prozent mehr als im ersten Halbjahr 1962.

a) Wie groß war die Fangmenge im ersten Halbjahr 1962?

b) Wie groß wäre die gesamte Fangmenge im Jahre 1963, wenn man für das zweite Halbjahr 1963 die gleiche prozentuale Steigerung gegenüber dem ersten Halbjahr annimmt wie im Jahre 1962?

Aufgabe 030812:

Klaus wird von seinen Eltern nach dem Ergebnis der letzten Mathematikarbeit gefragt. Er weiß, daß 5 Schüler die Note 1, 8 Schüler die Note 2, 4 Schüler die Note 4 und die übrigen Schüler die Note 3 erhielten. Außerdem erinnert er sich noch, daß die Durchschnittsnote genau 2,5 betrug.

Wieviel Schüler haben die Arbeit mitgeschrieben?

Aufgabe 030813:

Gegeben sind drei beliebige natürliche Zahlen, die nicht durch 3 teilbar sind.

Beweise, daß entweder die Summe dieser drei Zahlen oder die Summe zweier von ihnen stets durch 3 teilbar ist!

Aufgabe 030814:

Rolf war doppelt so alt wie Inge, als er so alt war, wie sie jetzt ist. Jetzt sind beide zusammen 45 Jahre alt.

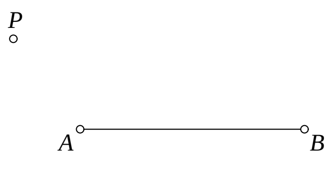
Wie alt ist jeder?

Aufgabe 030815:

In einem Kreis werden durch die Endpunkte eines Durchmessers parallele Sehnen gezogen.

Beweise, daß diese Sehnen stets gleichlang sind!

Aufgabe 030816:



Gegeben sei eine Strecke $\overline{AB}$ und ein nicht auf ihr liegender Punkt P (Lage siehe Abbildung).

Es ist mit Zirkel und Lineal eine zu $\overline{AB}$ parallele Strecke gleicher Länge zu konstruieren, deren einer Endpunkt P ist! Fertige eine Konstruktionsbeschreibung an!

3. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030821:

Ein rechteckiges Maisfeld von 360 m Länge und 220 m Breite soll von zwei Mähhäckslern abgeerntet werden. Proben haben einen durchschnittlichen Bestand von 58 kg je 10 m^2 ergeben. Jeder Mähhäcksler kann stündlich 105 dt ernten.

a) In welcher Zeit wird das Maisfeld (bei ununterbrochenem Einsatz beider Maschinen) abgeerntet?

b) Für den Transport des Erntegutes stehen Hänger mit einem Fassungsvermögen von 3,5 t zur Verfügung. Jeder Hänger benötigt für das Be- und Entladen sowie für Hin- und Rückfahrt insgesamt 40 min (Umlaufzeit).

   Wieviel Hänger braucht man mindestens, wenn die Arbeit ununterbrochen vonstatten gehen soll?

Die Antworten sind zu begründen!

Aufgabe 030822:

Beweise die folgende Behauptung:

Wenn bei einer sechsstelligen Zahl die ersten drei Ziffern mit den letzten drei Ziffern übereinstimmen (z. B. 781 781), so ist die Zahl stets durch 7, 11 und 13 teilbar.

Aufgabe 030823:

In einer Aula stehen 300 Stühle in mehreren gleichlangen Reihen hintereinander. Nimmt man für den Mittelgang aus jeder Querreihe 3 Stühle heraus und bildet aus diesen Stühlen 5 neue Querreihen (mit Mittelgang), so bleibt die Anzahl der Sitzplätze gleich.

Wieviel Stühle standen ursprünglich in jeder Querreihe? Begründe deine Behauptung!

Aufgabe 030824:

Gegeben sei ein Trapez $ABCD$ mit den parallelen Seiten AB und CD. X sei irgend ein Punkt der Strecke $\overline{AB}$ und Y ein Punkt der Strecke $\overline{CD}$.

Beweise, daß die Strecke $\overline{XY}$ stets von der Mittellinie des Trapezes halbiert wird!

Aufgabe 030825:

Gegeben seien ein Kreis und ein Punkt P in seinem Innern.

Konstruiere durch P zwei gleichlange aufeinander senkrecht stehende Sehnen. Beschreibe und begründe die Konstruktion!

3. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 030831:

Welches ist die kleinste achtstellige Zahl, die aus lauter verschiedenen Ziffern besteht und durch 36 teilbar ist? Begründe, daß es die kleinste derartige Zahl ist!

Aufgabe 030832:

Beweise folgende Behauptung:

Wenn a und b entweder beide positive reelle oder beide negative reelle Zahlen sind, dann ist stets

$$5a^2 - 6ab + 5b^2 > 0.$$

Aufgabe 030833:

Zeichne ein beliebiges Dreieck ABC und seine Seitenhalbierenden! Der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden sei S. Er ist gleichzeitig gemeinsamer Eckpunkt für die sechs Dreiecke, in die das Dreieck ABC durch die Seitenhalbierenden zerlegt wird.

Beweise, daß diese sechs Dreiecke sämtlich untereinander flächengleich sind!

Aufgabe 030834:

In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen. Gleiche Buchstaben bedeuten gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern.

$$\begin{array}{cccccc}
 & \mathrm{f} & \mathrm{o} & \mathrm{r} & \mathrm{t} & \mathrm{y} \\
+ & & & \mathrm{t} & \mathrm{e} & \mathrm{n} \\
+ & & & \mathrm{t} & \mathrm{e} & \mathrm{n} \\
\hline
 & \mathrm{s} & \mathrm{i} & \mathrm{x} & \mathrm{t} & \mathrm{y}
\end{array}$$

Aufgabe 030835:

Gegeben sind die Strecken

$$s - a = 3\,\text{cm}, \qquad s - b = 2\,\text{cm}, \qquad s - c = 1\,\text{cm},$$

wobei $2s = a + b + c$ der Umfang des Dreiecks ist.

a) Konstruiere das Dreieck!

b) Begründe die Konstruktion!

Aufgabe 030836:

Gegeben seien die parallelen Seiten $a = 8$ cm und $c = 4$ cm eines Trapezes sowie seine Diagonalen $e = 8$ cm und $f = 6$ cm.

a) Konstruiere das Trapez!

b) Begründe die Konstruktion!

4. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040811:

Für ein Experiment werden $50\,\text{cm}^3$ 10-prozentige Salzsäure benötigt. Es steht aber nur 36-prozentige Salzsäure zur Verfügung.

Wieviel Kubikzentimeter 36-prozentige Salzsäure müssen mit destilliertem Wasser verdünnt werden?

Aufgabe 040812:

Es ist zu beweisen, daß die Höhen in einem Rhombus gleichlang sind!

Aufgabe 040813:

Auf einer zweigleisigen Strecke zum Vorort einer Großstadt fährt alle 10 Minuten von der Anfangsstation und von der Endstation gleichzeitig je eine Straßenbahn ab und benötigt je 50 Minuten Fahrtzeit. Die Aufenthaltszeit an diesen beiden Stationen beträgt je 10 Minuten.

Wieviel Straßenbahnen sind insgesamt auf dieser Strecke eingesetzt?

Aufgabe 040814:

Die Zahl 62**427 ist durch 99 teilbar.

Bestimme die fehlenden Ziffern, und gib an, wie du sie gefunden hast! Wieviel Lösungen gibt es?

Aufgabe 040815:

Es ist der folgende Satz zu beweisen:

Wenn in einem Dreieck eine Seitenhalbierende halb so lang wie die zugehörige Seite ist, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Aufgabe 040816:

Ein Würfel soll auf verschiedene Arten durch einen ebenen Schnitt in zwei Teilkörper zerlegt werden. Können dabei folgende Schnittfiguren entstehen:

a) gleichseitiges Dreieck

b) gleichschenkliges Dreieck (nicht gleichseitig)

c) rechtwinkliges Dreieck

d) ungleichschenkliges Dreieck

e) Quadrat

f) Rechteck (nicht quadratisch)

g) Fünfeck

h) Achteck?

Welche möglichen Schnittfiguren sind in der Aufzählung nicht enthalten?

Fertige zu jeder Schnittfigur eine Skizze an, aus der man sehen kann, wie der ebene Schnitt geführt werden muß, wenn man die betreffende Schnittfigur erhalten will!

4. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

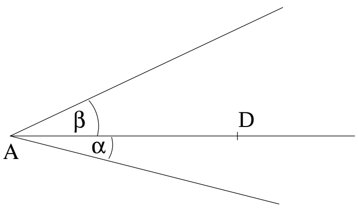
Aufgabe 040821:

Ein beliebiges Trapez $ABCD$ ist in ein flächengleiches Rechteck zu verwandeln (Konstruktion!).

Aufgabe 040822:

Bilde aus einer beliebigen dreistelligen Zahl die Zahl mit der umgekehrten Ziffernfolge, und beweise, daß die Differenz beider Zahlen durch 99 teilbar ist!

Aufgabe 040823:



Gegeben sind die beiden anliegenden Winkel α und β mit dem Scheitelpunkt A und Punkt D auf dem gemeinsamen Schenkel (s. Abb.).

a) Konstruiere aus dieser Figur das Dreieck ABC derart, daß $\overline{AD}$ Seitenhalbierende ist!

b) Unter welcher Bedingung wird das Dreieck ABC gleichseitig?

Aufgabe 040824:

Peter ist im Ferienlager. Er will für seine Gruppe Brause zu 21 Pf je Flasche einkaufen und nimmt dazu leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (30 Pf für jede der leeren Flaschen) möchte er möglichst viele Flaschen Brause kaufen. Für jede Flasche müssen erneut 30 Pf Pfand hinterlegt werden. Es stellt sich heraus, daß er 6 Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Wieviel leere Flaschen hatte Peter mitgenommen? (Es gibt nicht nur eine Lösung.)

4. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 040831:

Vertauscht man die Ziffern einer zweistelligen Zahl n, so entsteht eine Zahl, die $\frac{8}{3}$ mal so groß wie n ist. Die Zahl n ist zu bestimmen.

Aufgabe 040832:

Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck, wenn der Radius r des Inkreises und die Länge a einer Kathete gegeben sind, und beschreibe die Konstruktion!

Unter welchen Bedingungen ist die Konstruktion ausführbar?

Aufgabe 040833:

Von den 31 Schülern einer 4. Klasse können 21 schwimmen, 24 radfahren und 19 Schlittschuh laufen. Für einen Wettkampf werden Schüler gebraucht, die

a) schwimmen und radfahren,

b) schwimmen und Schlittschuh laufen,

c) radfahren und Schlittschuh laufen,

d) schwimmen und radfahren und Schlittschuh laufen können.

Wieviel Schüler der Klasse stehen jeweils bei a), b), c) und d) mindestens, wieviel höchstens zur Verfügung?

Aufgabe 040834:

Gegeben seien drei Strecken mit den Längen p_1, p_2 und r mit $p_1 < p_2$. Gesucht ist ein gleichschenkliges Trapez, dessen parallele Seiten die Längen p_1 bzw. p_2 haben und dessen Umkreis den Radius r hat!

a) Untersuche, unter welchen Bedingungen es solche Trapeze gibt, und beschreibe die Konstruktion!

b) Führe die Konstruktion für den Fall $p_1 = 3$ cm, $p_2 = 5$ cm und $r = 4$ cm aus!

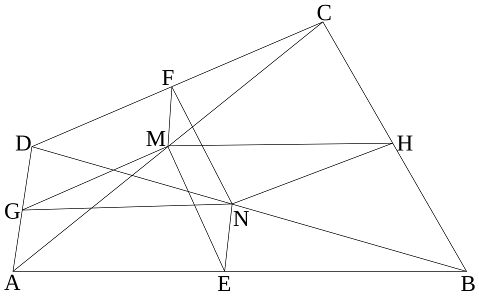
Aufgabe 040835:

Gegeben sind vier aufeinander folgende natürliche Zahlen, die in ihrer Reihenfolge a, b, c und d genannt sind.

a) Welches Produkt ist größer, ac oder bd ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!

b) Welches Produkt ist größer, bc oder ad ? Bestimme die Differenz der beiden Produkte!

Aufgabe 040836:



Es ist folgender Satz zu beweisen:

In einem konvexen Viereck $ABCD$ seien keine zwei Seiten parallel. Dann sind die Mittelpunkte E, F bzw. G, H zweier Gegenseiten und die Mittelpunkte M, N der Diagonalen die Eckpunkte eines Parallelogrammes.

5. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050811:

Über die Beteiligung an der 1. Stufe der IV. Olympiade Junger Mathematiker der DDR hatte ein Schüler folgende Übersicht an die Wandzeitung geheftet:

Klasse 8a: Von 33 Schülern beteiligten sich 20, das sind etwa 60,6 Prozent.

Klasse 8b: Von 32 Schülern beteiligten sich 21, das sind etwa 65,6 Prozent.

Klasse 8c: Von 27 Schülern beteiligten sich 19, das sind etwa 70,4 Prozent.

Die Schüler dieser Klassen erhalten die Aufgabe, die prozentuale Gesamtbeteiligung der Schüler der 8. Klassen zu ermitteln. Ein Teil der Schüler bildet das arithmetische Mittel der Prozentzahlen, die anderen bilden den mit 100 multiplizierten Quotienten aus der Anzahl aller Teilnehmer und der Anzahl aller Schüler dieser Klassen.

a) Wie groß ist die Differenz, die sich bei den beiden Rechnungen ergibt?

b) Welche Schüler haben die Prozentzahl in der richtigen Weise berechnet?

Aufgabe 050812:

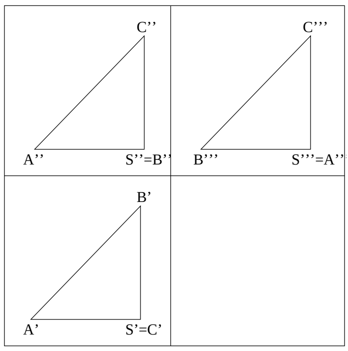
Für welche reellen Zahlen a und b ist die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{(a+b)\cdot(a-b)}{ab} \quad \text{erfüllt?}$$

Aufgabe 050813:

a) Gib einen Körper an, der den abgebildeten Grund-, Auf- und Kreuzriß besitzt (s. Abb.)! (Sämtliche Risse sind rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke.)

b) Zeichne ein Netz dieses Körpers, und stelle ein Körpermodell her!



Aufgabe 050814:

Offenbar ist folgender Satz richtig:

Ist das Dreieck ABC gleichseitig, so ist die Summe je zweier seiner Außenwinkel doppelt so groß wie die Summe der ihnen anliegenden Innenwinkel.

Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

5. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050821:

Eine Gruppe von Schülern einer Klasse hat Kastanien gesammelt. Als ein Mitschüler fragt, wieviel Schüler die Klasse hat und wieviel beim Sammeln teilgenommen haben, erhält er folgende Antworten:

(1) Wären 12 Schüler mehr dabei gewesen, dann hätten wir 75% mehr sammeln können.

(2) Wenn 75% der Schüler unserer Klasse teilgenommen hätten, dann hätten wir das Eineinhalbfache sammeln können.

(3) Es soll vorausgesetzt werden, daß jeder Schüler die gleiche Anzahl von Kastanien sammelt.

a) Wieviel Schüler haben teilgenommen?

b) Wieviel Schüler hat die Klasse?

Aufgabe 050822:

In dem Dreieck $\triangle ABC$ mit den Winkelmaßen α, β und γ sei die Winkelhalbierende w_α eingezeichnet. Sie schneide die Seite BC in D. Die Winkel $\sphericalangle ADB$ und $\sphericalangle ADC$ haben die Maße δ bzw. ϵ.

Beweise, daß $\delta - \epsilon = \gamma - \beta$ ist!

Aufgabe 050823:

Die Seiten eines konvexen Fünfecks seien der Reihe nach a, b, c, d und e. Die Seite a sei $5,5$ cm, b sei 4 cm, c sei $3,4$ cm, d sei $4,6$ cm und e sei $2,9$ cm lang. Die Seiten a und e schließen einen Winkel mit dem Maß $\alpha = 100°$, die Seiten b und c einen Winkel mit dem Maß $\beta = 93°$ ein.

a) Konstruiere das Fünfeck aus diesen 7 Stücken!

b) Beschreibe die Konstruktion!

Aufgabe 050824:

Die Fischer Adam, Bauer, Christiansen und Dahse (abgekürzt A, B, C, D) wägen nach dem Fischen ihre Ausbeute und stellen fest:

(1) D fing mehr als C.

(2) A und B fingen zusammen genau so viel wie C und D zusammen.

(3) A und D fingen zusammen weniger als B und C zusammen.

Ordne die Fangergebnisse a, b, c, d der Fischer A, B, C, D der Größe nach! (Beginne mit dem größten Ergebnis!)

5. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 050831:

Ermittle die Anzahl aller Zahlen zwischen 10 000 und 99 999, die wie z.B. 35 453 vorwärts gelesen die gleiche Ziffernfolge wie rückwärts gelesen ergeben.

Aufgabe 050832:

Ermittle alle in der Ebene des Dreiecks ABC gelegenen Punkte D, die mit den Eckpunkten A und B des Dreiecks ABC ein Dreieck bilden, dessen Flächeninhalt halb so groß ist wie der des Dreiecks ABC.

Aufgabe 050833:

Gib alle Quadrupel (z_1, z_2, z_3, z_4) zweistelliger Zahlen z_1, z_2, z_3, z_4 an, die folgende Eigenschaften haben. Für jedes Quadrupel gilt:

(1) $z_1 \cdot z_2 = z_3 \cdot z_4$,

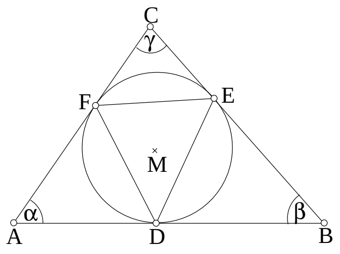
(2) z_3 erhält man, wenn man z_1 rückwärts liest,

(3) z_4 erhält man, wenn man z_2 rückwärts liest, (Beispiel $24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$)

(4) Unter den vier Ziffern von z_1 und z_2 gibt es keine zwei, die gleich sind,

(5) z_1 ist die kleinste der vier Zahlen.

Aufgabe 050834:



Der Inkreis k des Dreiecks ABC habe mit den Dreiecksseiten AB, BC und CA die Berührungspunkte D, E und F (siehe Abb.). Die Winkel des Dreiecks ABC haben die Maße α, β, und γ.

Ermittle die Maße der Winkel $\sphericalangle DEF$, $\sphericalangle EFD$ und $\sphericalangle FDE$ des Dreiecks DEF!

Aufgabe 050835:

Jemand gießt 9 kg Wasser mit einer Temperatur von 30°C und 6 kg Wasser mit einer Temperatur von 85°C zusammen und rührt das Gemisch gut um.

Welche Temperatur würde das Gemisch annehmen, wenn man den Wärmeaustausch mit der Umgebung unberücksichtigt läßt?

Aufgabe 050836:

a) Konstruiere das Dreieck ABC, wenn $a + b$, r und α gegeben sind!

Dabei ist a die Länge der Seite BC, b die Länge der Seite AC, r die Länge des Umkreisradius und α das Maß des Winkels $\sphericalangle CAB$.

b) Beschreibe und diskutiere die Konstruktion!

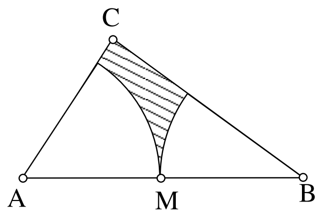
Anmerkung: Die Konstruktionsbeschreibung soll kurz gehalten sein. Bei der Konstuktion von Dreiecken genügt die Angabe von Seiten und Winkeln, aus denen sich das Dreieck konstruieren läßt.

6. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060811:

In dem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit $\overline{AB} = c = 7$ cm und $\sphericalangle ACB = \gamma = 90°$ seien um die Punkte A und B Kreisbögen mit einem Radius von der Länge $\frac{7}{2}$ cm geschlagen (siehe Abbildung).



Ermittle den Inhalt I_F der in der Abbildung schraffiert gezeichneten Fläche!

Aufgabe 060812:

Aus Kuhmilch kann man 21% der Masse an Rahm gewinnen. Aus Rahm gewinnt man Butter, und zwar beträgt die Buttermasse 23% der Rahmmasse.

Ermittle die kleinste Menge Kuhmilch, die ausreicht, um genau 1 kg Butter unter den angegebenen Bedingungen zu gewinnen!

Die Milchmenge ist in kg anzugeben und als Dezimalbruch zu schreiben, der auf eine Stelle nach dem Komma so zu runden ist, daß die Menge ausreicht, um 1 kg Butter zu gewinnen.

Aufgabe 060813:

Auf einer 1 km langen kreisförmigen Bahn wird ein Radrennen ausgetragen. Zu einer gewissen Zeit hat der Radsportler B genau 500 m Vorsprung vor dem Radsportler A. A fährt mit einer Geschwindigkeit von 50 km/h, B mit einer Geschwindigkeit von 45 km/h.

Nach wieviel Minuten würde A den Fahrer B ein ersten Mal einholen, wenn beide mit gleichbleibender Geschwindigkeit weiterfahren würden?

Aufgabe 060814:

In der Ebene ϵ liegen zwei voneinander verschiedene Punkte P_1 und P_2 und zwei voneinander verschiedene Geraden g_1 und g_2.

Ermittle alle Punkte X mit den folgenden Eigenschaften:

(1) $\overline{XP_1} = \overline{XP_2}$

(2) Die Abstände des Punktes X von g_1 bzw. g_2 sind einander gleich.

Hinweis: Beachte die verschiedenen Fälle!

6. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060821:

Klaus hat 7 Kugeln: 4 rote, 2 weiße und eine schwarze. Er soll sie in zwei Kästen A und B legen; in A drei, in B vier.

Gib sämtliche möglichen voneinander verschiedenen Verteilungen der Kugeln auf die zwei Kästen an! Die Reihenfolge, in der die Kugeln in den Kästen liegen, soll dabei nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 060822:

In der Ebene ϵ liege das Parallelogramm $ABCD$ und die völlig außerhalb des Parallelogramme verlaufende Gerade g.

Beweise, daß die Summe der Entfernungen zweier gegenüberliegender Eckpunkte des Parallelogramms von der Geraden g gleich der Summe der Entfernungen der beiden anderen Eckpunkte von g ist!

Aufgabe 060823:

18% einer Zahl sind gleich 15% einer anderen Zahl.

Ermittle das Verhältnis der ersten zur zweiten dieser beiden Zahlen!

Aufgabe 060824:

Beweise folgenden Satz:

Im Tangentenviereck ist die Summe der Längen je zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der Längen der beiden anderen Seiten.

6. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 060831:

Die Kante eines Würfels habe die Länge $a_1 = 2$ cm, die eines anderen Würfels die Länge $a_2 = 6$ cm.

Berechne das Verhältnis der Kantenlängen dieser zwei Würfel, das Verhältnis ihrer Oberflächeninhalte und das Verhältnis ihrer Rauminhalte!

Aufgabe 060832:

Auf der Grundlinie BC eines gleichschenkligen Dreiecks ΔABC seien von zwei Punkte M_1 und M_2 gegeben. Durch M_1 und M_2 werden jeweils die Parallelen zu den Dreiecksseiten AB und AC gezogen. Die Parallelen durch M_1 schneiden AB in D und AC in E, die Parallelen durch M_2 die Seite AB in F und AC in G.

Beweise, daß der Umfang des Parallelogramms M_1EAD gleich dem Umfang des Parallelogramms M_2GAF ist!

Aufgabe 060833:

Gegeben seien 3 000 g einer 7,2-prozentigen Lösung von Kochsalz in Wasser (d.h. in je 100 g der Lösung sind genau $7,2$ g Kochsalz enthalten). Durch Sieden dieser Lösung verdampft soviel Wasser, daß genau 2 400 g der eingedampften Lösung verbleibt.

Wieviel prozentig ist die so erhaltene Lösung?

Aufgabe 060834:

Von 10 Koffern und 10 Schlüsseln sei bekannt, daß jeder Schlüssel zu genau einem Koffer paßt und zu jedem Koffer genau ein Schlüssel. Man weiß aber nicht, welcher Schlüssel zu welchem Koffer gehört.

Jemand ermittelt dies durch probieren, wobei jede Probe darin besteht, daß er für genau einen Koffer und genau einen Schlüssel feststellt, ob sie zusammenpassen oder nicht. Die Reihenfolge der Proben wird so gewählt, daß für jeden Koffer, sobald einmal an ihm eine Probe durchgeführt wurde, dann genau so viele Proben vorgenommen werden, bis der passende Schlüssel ermittelt ist.

Welches ist

a) die kleinste

b) die größte

Zahl von Proben, bei der es vorkommen kann, daß genau nach dieser Probenzahl zu jedem Koffer der richtige Schlüssel feststellbar ist?

Aufgabe 060835:

In der Ebene seien drei Geraden g_1, g_2, g_3 gegeben, von denen keine zwei einander parallel sind. Außerdem ist eine Länge s gegeben.

Konstruiere einen Kreis, der von jeder der Geraden g_1, g_2, g_3 eine Strecke der Länge s abschneidet!

Aufgabe 060836:

Man denke sich das Produkt aller derjenigen ungeraden Zahlen gebildet, die größer als 30 und kleiner als 50 sind. Beantworte, ohne es vollständig zu berechnen, folgende Fragen:

a) Welche Ziffer steht an der Einerstelle des Produkts?

b) Ist das Produkt eine 18stellige Zahl?

7. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070811:

Drei Schüler einer Klasse, Thomas (T), Rainer (R) und Bernd (B), hatten sich bei einem Sportfest für den Endkampf im Hochsprung qualifiziert und eroberten dort die ersten drei Plätze. Klaus, der in einer anderen Disziplin starten mußte, erkundigte sich später bei Elke nach dem Ausgang beim Hochsprung. Diese konnte sich nicht mehr genau entsinnen und sagte:

> "Thomas wurde nicht Erster, Rainer nicht Zweiter, aber Bernd wurde Zweiter."

Später stellte sich heraus, daß Elke einmal etwas Richtiges gesagt, sich aber in den beiden anderen Fällen geirrt hatte. Außerdem ist bekannt, daß alle drei Schüler unterschiedliche Höhen übersprangen.

Welcher Schüler wurde Erster, Zweiter, Dritter?

Aufgabe 070812:

Bei welchem Massenverhältnis von 10 prozentiger und 30 prozentiger Salzlösung erhält man nach Mischung 25 prozentige Salzlösung? (Die Prozentangaben sind auf die Masse bezogen.)

Aufgabe 070813:

Drei Sportler starteten gleichzeitig und liefen 100 m. Als der erste am Ziel war, hatte der zweite noch genau 10 m zu laufen. Als der zweite am Ziel war, blieben für den dritten noch genau 10 m.

Wie weit war der dritte noch vom Ziel entfernt, als der erste dieses erreicht hatte? (Es sei angenommen, daß jeder der drei Sportler die gesamte Strecke mit konstanter Geschwindigkeit durchlief.)

Aufgabe 070814:

Von einem gleichseitigen Dreieck ist die Länge ρ des Inkreisradius bekannt. Das Dreieck ist unter alleiniger Verwendung von Zirkel und Lineal zu konstruieren!

7. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070821:

Errichtet man auf den Seiten eines gleichseitigen Dreiecke die Quadrate nach außen, so bilden die äußeren Eckpunkte der Quadrate die Ecken eines konvexen Sechsecks. Wir bezeichnen den Flächeninhalt des Dreiecke mit A_3; den jedes der Quadrate mit A_4 und den des Sechsecks mit A_6.

Gesucht sind ganze Zahlen n und m so, daß die Gleichung $A_6 = nA_3 + mA_4$ gilt.

Aufgabe 070822:

Gegeben sind ein Kreis k (Mittelpunkt M, Radius der Länge $r = 6$ cm) und ein Kreis k_1 (Mittelpunkt M_1, Radius der Länge $r_1 = 2$ cm). Beide Kreise berühren einander von außen.

Konstruiere alle Kreise mit dem Radius der Länge 2 cm, die die beiden gegebenen Kreise berühren!

Konstruiere auch die Berührungspunkte der gesuchten Kreise mit den gegebenen!

Aufgabe 070823:

Jemand würfelte mit n Würfeln bei einem einzigen Wurfe zusammen die Augenzahl $3n + 4$, und zwar zeigte dabei jeder Würfel die gleiche Augenzahl.

Man ermittle sämtliche Werte von n, für die das möglich ist!

Aufgabe 070824:

Beweise den Satz: Unter n aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ($n \geq 2$) gibt es stets eine, die durch n teilbar ist.

7. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 070831:

Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus $\overline{AB} = 5\,\text{cm}$, dem Winkel $\sphericalangle BAC$ mit der Größe $\alpha = 70°$ und der Bedingung, daß der Schnittpunkt der drei Höhen des Dreiecks die Höhe durch den Eckpunkt B halbiert!

Aufgabe 070832:

Unter einer Quersumme einer natürlichen Zahl versteht man die Summe ihrer Ziffern: Z.B. hat 1967 die Quersumme $1 + 9 + 6 + 7 = 23$.

Man ermittle die Summe aller Quersummen der natürlichen Zahlen von 1 bis einschließlich 1 000!

Aufgabe 070833:

Es seien a und b positive ganze Zahlen.

Gesucht sind alle ganzen Zahlen x, für die $\frac{a+x}{b-x} = \frac{b}{a}$ ist.

Aufgabe 070834:

Es sei a eine positive ganze Zahl.

Zeige, daß der Bruch $\frac{a^2-a+1}{a^2+a-1}$ weder durch 2 noch durch 3 gekürzt werden kann!

Aufgabe 070835:

Beweise:

> Zwei Eckpunkte eines beliebigen Dreiecks ΔABC sowie die Fußpunkte der durch diese Ecken gehenden Höhen bestimmen ein Sehnenviereck, d.h. ein Viereck, dessen Eckpunkte auf demselben Kreis liegen, dessen Seiten also Sehnen dieses Kreises sind.

Aufgabe 070836:

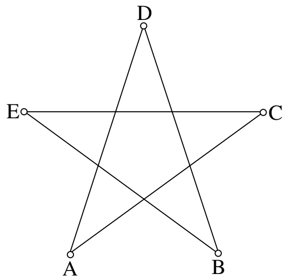
Gesucht ist eine zweistellige natürliche Zahl mit folgenden Eigenschaften:

1) Die Differenz ihrer Ziffern beträgt drei.

2) Vertauscht man ihre Ziffern, so ist die neue Zahl um neun kleiner als das Doppelte der ursprünglichen Zahl.

8. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

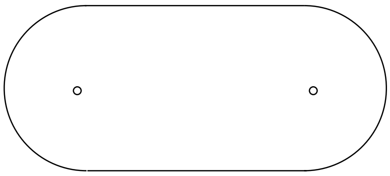


Aufgabe 080811:

Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, bei dem die Punkte A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle ACE$!

Aufgabe 080812:



Die Abbildung zeigt die 400 m lange Laufstrecke auf der Innenbahn eines Stadions. Die Laufstrecke werde idealisiert dargestellt durch zwei Halbkreise und die je 90 m langen Seiten eines Rechtecks. Bei einem 10 000 -m-Lauf beobachten wir, daß ein Läufer während einer ganzen Runde nicht innen, sondern weiter außen auf der 2. Bahn, und zwar stets 1 m von der gezeichneten Laufstrecke entfernt, läuft.

Wieviel Meter mehr als 400 m legt er während dieser Runde zurück?

Anmerkung: Setze für π die Zahl $\frac{22}{7}$, und runde die Ergebnisangabe auf volle Meter!

Aufgabe 080813:

Gerd und Bernd haben sich ein Kartenspiel ausgedacht. Sie schneiden 6 Pappkarten aus und numerieren sie nacheinander mit den Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Sie vereinbaren folgende Spielregeln: Jeder bekommt nach dem Mischen drei dieser Karten. Dann spielt jeder nacheinander jeweils eine Karte aus. Wer die Karte mit einer größeren Zahl ausspielt, bekommt den "Stich" und darf nun ausspielen. Nach drei in dieser Weise zustandegekommenen "Stichen" ist die Runde beendet. Wer in einer Runde mindestens zwei "Stiche" gewinnt, ist in dieser Runde Sieger. Um häufiger als Bernd Sieger zu werden, erklärt sich Gerd bereit, in jeder Runde als erster auszuspielen. Er nimmt an, dadurch mehr Möglichkeiten zum Gewinn zu haben.

Überprüfe anhand der möglichen Kartenverteilungen und der jeweils möglichen Spielverläufe, ob Gerds Annahme richtig war! Dabei wollen wir voraussetzen, daß jeder der Spieler stets für sich möglichst günstig spielt.

Aufgabe 080814:

Beweise:

> Wenn eine Zahl $100a+b$ (a und b sind natürliche Zahlen) durch 7 teilbar ist, so ist auch die Zahl $a+4b$ durch 7 teilbar!

8. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080821:

a) Beweise folgende Aussage:

Wenn in einem Drachenviereck $ABCD$ zwei gegenüberliegende Innenwinkel je 90° groß sind, dann hat es sowohl einen Inkreis als auch Umkreis.

b) Zeige, daß diese Kreise dann auch jeweils eindeutig bestimmt sind!

c) Untersuche, unter welcher Bedingung die Mittelpunkte dieser beiden Kreise zusammenfallen!

Aufgabe 080822:

Gegeben sei eine dreistellige Zahl, deren Einerziffer nicht 0 ist. Man vertausche ihre 1. Und 3. Ziffer miteinander und denke sich die Differenz zwischen der ursprünglichen und der so entstandenen Zahl gebildet.

Wie kann man, ohne diese Differenz selbst ausrechnen zu müssen, alle diejenigen natürlichen Zahlen finden, die Teiler des Betrages dieser Differenz sind?

Aufgabe 080823:

Beweise folgenden Satz:

> Der Winkel zwischen einer Höhe und der zugehörigen (d.h. vom gleichen Eckpunkt ausgehenden) Winkelhalbierenden eines jeden Dreiecks ΔABC ist halb so groß wie der Betrag der Differenz der beiden anderen Innenwinkel des Dreiecks.

Aufgabe 080824:

Ein mit konstanter Geschwindigkeit v_1 fahrender Lastkraftwagen wird 1 h 25 min nach Fahrtbeginn von einem ebenfalls mit konstanter Geschwindigkeit v_2 fahrenden Personenkraftwagen eingeholt, der 30 min später vom gleichen Ort abfuhr, aber eine um 25 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ größere Geschwindigkeit als der LKW hatte.

a) Berechne v_1 und v_2!

b) Welche Länge s hat die von beiden Fahrzeugen bis zum Überholungspunkt durchfahrene Wegstrecke?

8. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 080831:

Beweise folgenden Satz: Jedes Dreieck ΔABC läßt sich in zwei rechtwinklige Teildreicke zerlegen.

Aufgabe 080832:

Von fünf äußerlich gleichen Kugeln haben genau drei gleiches Gewicht; die beiden übrigen, die untereinander gleich schwer sind, haben jeweils ein anderes Gewicht als jede der erstgenannten.

Beweise, daß in jedem Fall (d.h. bei jedem möglichen Resultat der durchgeführten Wägungen) drei Wägungen ausreichen, um die beiden letztgenannten Kugeln herauszufinden, wenn als Hilfsmittel nur eine zweischalige Waage ohne Wägestücke zur Verfügung steht!

Aufgabe 080833:

Es ist zu beweisen: Läßt die Quersumme einer natürlichen Zahl bei der Division durch 9 den Rest r, so läßt auch die Zahl selbst bei der Division durch 9 den Rest r.

Aufgabe 080834:

Von einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{AD} = b$ $(b < a)$ ist durch genau eine Parallele zu einer Seite ein dem ursprünglichen Rechteck ähnliches abzuschneiden. Löse die Aufgabe durch Konstruktion!

Bemerkung: Zwei nicht quadratische Rechtecke heißen ähnlich, wenn das Längenverhältnis der größeren zur kleineren Seite bei beiden gleich ist.

Aufgabe 080835:

Fritz soll eine dreistellige natürliche Zahl z mit sich selbst multiplizieren. Er schreibt versehentlich als ersten Faktor eine um 5 kleinere Zahl hin. Darauf aufmerksam gemacht, sagt er: "Ich nehme als zweiten Faktor einfach eine um 5 größere Zahl, dann wird das Ergebnis richtig."

a) Ist diese Behauptung wahr?

b) Gesetzt, sie sei falsch, zwischen welchen Grenzen bewegt sich der absolute Fehler, wenn z alle dreistelligen Zahlen durchläuft?

Aufgabe 080836:

Die Zahlen a, b, c und d mögen folgenden Bedingungen genügen:

(1) $d > c$

(2) $a + b = c + d$

(3) $a + d < b + c$

Ordne die Zahlen der Größe nach (beginnend mit der größten)!

9. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

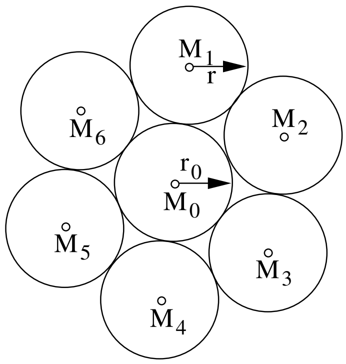
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090811:
Untersuche, ob es Vielecke mit einer der folgenden Eigenschaften gibt:

a) Die Anzahl der Diagonalen ist dreimal so groß wie die Anzahl der Eckpunkte.

b) Die Anzahl der Eckpunkte ist dreimal so groß wie die Anzahl der Diagonalen.

Aufgabe 090812:



Gegeben seien in der Ebene ein Kreis k_0 und 6 Kreise vom Radius r, deren jeder in der aus der Abbildung ersichtlichen Weise genau zwei von ihnen und außerdem den Kreis k_0 von außen berührt.

Ermittle den Radius r_0 des Kreises k_0!

Aufgabe 090813:

a) Beweise folgenden Satz:

Wenn in einem (nicht überschlagenen) ebenen Viereck alle Seiten gleichlang sind (Rhombus), dann stehen die Diagonalen senkrecht aufeinander.

b) Untersuche, ob der Satz umkehrbar ist!

Aufgabe 090814:
Auf zwei nebeneinanderliegenden Fahrbahnen sind zwei 4 m lange Kraftwagen in gleicher Fahrtrichtung gefahren. Der erste hatte eine Geschwindigkeit von 60 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, der zweite eine Geschwindigkeit von 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Der zweite Kraftwagen fuhr an dem ersten vorbei.

Zu Beginn des betrachteten Vorganges befand sich die Hinterkante des ersten Wagens $a = 20$ m vor der Vorderkante des zweiten (siehe Abbildung a); am Ende des Vorganges die Vorderkante des ersten $a = 20$ m hinter der Hinterkante des zweiten (siehe Abbildung b).

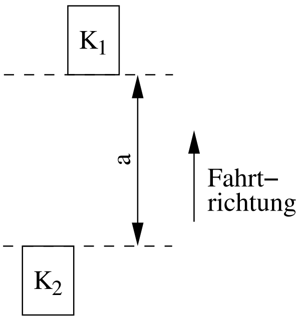


Abbildung a)

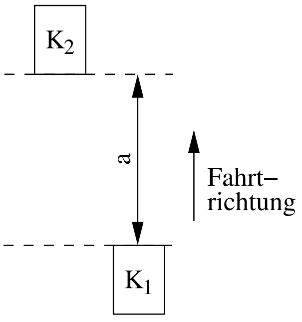


Abbildung b)

Wie lange dauerte dieser Vorgang, und welche Fahrtstrecke wurde von der Vorderkante des zweiten Wagens dabei zurückgelegt?

9. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090821:

Klaus und Horst spielen mit Würfeln. Sie benutzen bei jedem Wurf genau zwei verschieden große Würfel und addieren jedesmal die beiden Augenzahlen.

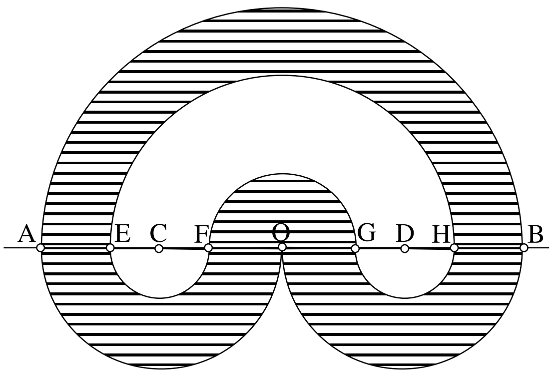
Klaus meint, daß unter allen möglichen verschiedenen Würfen solche mit der Summe 7 am häufigsten auftreten. Zwei Würfe heißen dabei genau dann gleich, wenn die Augenzahlen gleich großer Würfel jeweils übereinstimmen.

Begründe die Richtigkeit dieser Meinung!

Aufgabe 090822:

Auf einer Geraden seien die Punkte A, E, C, F, O, G, D, H, B in dieser Reihenfolge so gelegen, daß gilt:

$$\begin{aligned} \overline{AB} &= 6\text{ cm} \\ \overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FO} = \overline{OG} = \overline{GH} = \overline{HB} &= 1\text{ cm}; \\ \overline{EC} = \overline{CF} = \overline{GD} = \overline{DH} &= 0,5\text{ cm}. \end{aligned}$$



Über den Strecken AB, EH und FG seien Halbkreise in die eine Halbebene und über den Strecken AO, OB, EF und GH Halbkreise in die andere Halbebene bezüglich der Geraden durch A und B gezeichnet.

Berechne den Inhalt der schraffierten Fläche!

Aufgabe 090823:

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und der Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr!

Aufgabe 090824:

Beweise folgenden Satz:

> In jedem Dreieck ΔABC teilt jede Halbierende eines Innenwinkels dessen Gegenseite im Verhältnis der beiden anderen Seiten.

9. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 090831:

Die Altersangaben (in vollen Lebensjahren ausgedrückt) einer Familie - Vater, Mutter und ihre zwei Kinder - haben folgende Eigenschaften:

Das Produkt aller vier Lebensalter beträgt 44 950; der Vater ist 2 Jahre älter als die Mutter.

Wie alt sind die vier Familienmitglieder?

Aufgabe 090832:

Über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks ΔABC seien ähnliche Vielecke V_a, V_b, V_c konstruiert, und zwar so, daß die Dreiecksseiten BC, AC, AB jeweils einander entsprechende Seiten von V_a, V_b bzw. V_c sind.

Beweise: Der Flächeninhalt des Vielecks über der Hypotenuse ist gleich der Summe der Flächeninhalte der beiden Vielecke über den Katheten.

Aufgabe 090833:

Beweise die Richtigkeit der folgenden Teilbarkeitsregel:

Eine drei- oder mehrstellige natürliche Zahl ist stets dann durch 8 teilbar, wenn die aus der Hunderterziffer und der Zehnerziffer gebildete Zahl, vermehrt um die Hälfte der Anzahl der Einer, eine durch 4 teilbare ganze Zahl ist.

Beispiel: 37 528 ist zu untersuchen. $52 + 4 = 56$ ist durch 4 teilbar, also ist 37 528 durch 8 teilbar.

Aufgabe 090834:

Es seien K_1, K_2, K_3, K_4 vier konzentrische Kreise, für deren Radien r_1, r_2, r_3 und r_4

$$r_4 - r_3 = r_3 - r_2 = r_2 - r_1 = r_1 \quad \text{gilt.}$$

Ermittle das Verhältnis des Flächeninhalts von K_1 zu den Flächeninhalten der drei von K_1 und K_2 bzw. K_2 und K_3 bzw. K_3 und K_4 gebildeten Kreisringe!

Aufgabe 090835:

Aus 77prozentigem und 87prozentigem Spiritus und nur daraus soll durch Mischen genau 1 000 g 80prozentiger Spiritus hergestellt werden.

Ermittle die dafür genau benötigten Massen!

Die Prozentangaben beziehen sich auf die Massen.

Aufgabe 090836:

Im ebenen Gelände seien genau alle diejenigen Punkte zugänglich, die auf einem Rechteck $ABCD$ einschließlich seines Inneren gelegen sind. In dieser Rechteckfläche führe ein Kreisbogen von A nach B, dessen zugehöriger Mittelpunkt nicht zugänglich sei. Auf dem Kreisbogen liege der Punkt P (mit $P \neq A$ und $P \neq B$).

Konstruiere die Tangente in P an den Kreisbogen, ohne daß bei Durchführung des Konstruktion das Rechteck $ABCD$ verlassen wird!

10. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100811:

Ermittle die Anzahl aller sechsstelligen natürlichen Zahlen, in denen die Ziffernfolge 1970 (d.h. die Grundziffern 1, 9, 7, 0 in dieser Reihenfolge und ohne dazwischenstehende andere Ziffern) auftritt!

Wie lautet die kleinste und wie die größte dieser sechsstelligen Zahlen?

Aufgabe 100812:

Ermittle alle rationalen Zahlen x mit $x \neq 2$, die die folgende Gleichung erfüllen:

$$\frac{3x}{x-2} + 1 + \frac{4}{x-2} = 2 + \frac{3(x+1)}{x-2} + \frac{1}{x-2}$$

Aufgabe 100813:

Es sei ΔABC ein beliebiges Dreieck, und es sei D der Berührungspunkt des Inkreises des Dreiecks ΔABC mit der Seite AB.

Beweise: Die Länge der Strecke AD ist gleich der Differenz aus dem halben Umfang des Dreiecks und der Länge der Seite BC.

Aufgabe 100814:

Ein Würfel werde von allen denjenigen Ebenen geschnitten, die durch die Mittelpunkte jeweils der drei von einem Eckpunkt ausgehenden Kanten verlaufen. Dabei entsteht ein Restkörper.

a) Stelle diesen Würfel mit der Kantenlänge $a = 6$ cm und den Restkörper in einem Schrägbild ($\alpha = 60°$; $q = \frac{1}{3}$) dar!

b) Ermittle die Anzahl aller Eckpunkte und die Anzahl aller Kanten des Restkörpers!

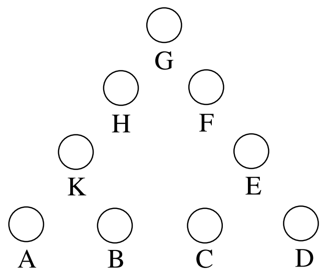
c) Gib die Form und die Anzahl aller Teilflächen der Oberfläche des Restkörpers an!

10. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100821:

In die neun Felder A, B, C, D, E, F, G, H, K der untenstehenden Figur sind die natürlichen Zahlen von 1 bis 9, jede genau in eines der Felder, so einzutragen, daß die Summen s_1, s_2 und s_3 der in den Feldern A, B, C, D bzw. D, E, F, G bzw. G, H, K, A stehenden Zahlen einander gleich sind.



a) Welches ist der kleinste und welches ist der größte Wert, den diese (einander gleichen) Summen unter den genannten Bedingungen annehmen können?

b) Gib je eine Möglichkeit an, wie dieser kleinste bzw. dieser größte Wert erreicht werden kann!

Aufgabe 100822:

In einem Dreieck ΔABC sei B' der Mittelpunkt der Seite AC und M der Mittelpunkt der Strecke BB'. Die Gerade durch A und M schneidet BC in einem Punkt, der A' genannt sei.

Man beweise, daß $\overline{BC} = 3 \cdot \overline{BA'}$ gilt!

Aufgabe 100823:

Bei einem 216 kp schweren Stück einer Kupfer-Zink-Legierung wurde in Wasser ein Auftrieb (Gewichtsverlust) von 26 kp gemessen. Bekannt ist, daß Kupfer beim Eintauchen in (destilliertes) Wasser $\frac{1}{9}$ seines ursprünglichen Gewichtes und Zink $\frac{1}{7}$ seines ursprünglichen Gewichtes verliert.

Ermittle den prozentualen Gewichtsanteil des Kupfers und den des Zinks in der angegebenen Legierung! (Die zu ermittelnden Größen sind auf volle Prozent zu runden).

Aufgabe 100824:

Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus $c = 5$ cm, $h_c = 4$ cm, $a = 6$ cm!

Dabei sei a die Länge der Seite BC, c die der Seite AB und h_c die der auf der Geraden durch A und B senkrechten Höhe.

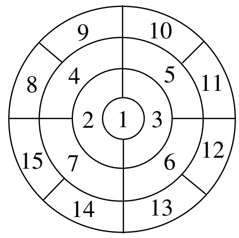
Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken ein Dreieck eindeutig konstruieren läßt!

10. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 100831:

Die Abbildung zeigt vier konzentrische Kreise. Die innere Kreisfläche ist mit 1 bezeichnet. Die von dem innersten und dem nächstfolgenden Kreis begrenzte Fläche des Kreisringes ist in zwei kongruente Teile, mit 2 und 3 bezeichnet, geteilt. Entsprechend ist die Fläche des nächsten Kreisringes in 4 und die des letzten in 8 jeweils untereinander kongruente Teilflächen zerlegt, die fortlaufend numeriert wurden.



Wie müssen die Verhältnisse der Radien der vier Kreise gewählt werden, damit alle diese 15 genannten Flächenstücke einander inhaltsgleich sind?

Aufgabe 100832:

Eine Pumpe P_1 füllt ein Becken in genau 4 h 30 min. Eine zweite Pumpe P_2 füllt dasselbe Becken in genau 6 h 45 min. Beim Füllen dieses Beckens wurde eines Tages zunächst die Pumpe P_1 genau 30 min lang allein eingesetzt. Anschließend wurden beide Pumpen zusammen so lange eingesetzt, bis das Becken gefüllt war.

Berechne, wie lange es insgesamt dauerte, bis das Becken unter diesen Umständen gefüllt wurde! (Es sei angenommen, daß beide Pumpen während ihres Einsatzes mit konstanter Leistung arbeiteten.)

Aufgabe 100833:

Gegeben seien eine Gerade g und zwei auf verschiedenen Seiten von g gelegene Punkte A und B.

Konstruiere alle diejenigen Punkte P auf g, die die Eigenschaft haben, daß der Strahl PB einen der Winkel halbiert, die von g und der Geraden g_1 durch A und P gebildet werden!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob sie stets eindeutig durchführbar ist!

Aufgabe 100834:

Es seien a, b natürliche Zahlen, und es gelte $a > b$.

Gib für a und b Bedingungen an, so daß folgendes gilt: Die Differenz der Quadrate von a und b ist genau dann eine Primzahl, wenn diese Bedingungen sämtlich erfüllt sind!

Aufgabe 100835:

Fritz behauptet seinen Mitschülern gegenüber:

(1) In unserem Haus wohnen mehr Erwachsene als Kinder.

(2) Es gibt in unserem Haus mehr Jungen als Mädchen.

(3) Jeder der Jungen hat wenigstens eine Schwester.

(4) Kinderlose Ehepaare wohnen nicht in unserem Haus.

(5) Alle in unserem Haus wohnenden Ehepaare haben ausschließlich schulpflichtige Kinder.

(6) Außer den Ehepaaren mit ihren schulpflichtigen Kindern wohnt niemand in unserem Haus.

Brigitte entgegnet darauf: "Diese Aussagen können aber nicht sämtlich wahr sein."

Untersuche, ob Brigitte mit diesem Einwand recht hat!

Aufgabe 100836:
Beweise den folgenden Satz:

Sind D, E, F die Fußpunkte der Höhen eines spitzwinkligen Dreiecks ΔABC, dann halbieren die Höhen des Dreiecks ΔABC die Innenwinkel des Dreiecks $\sphericalangle DEF$!

(Da der Beweis für alle drei Winkel analog verläuft, genügt es, ihn für den Winkel $\sphericalangle EFD$ zu führen.)

11. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110811:

a) Berechne die Zahl

$$x = -\left\{-[-(-2)]^2\right\}^3 \cdot \left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2\right\}$$

b) Stelle fest, ob sich x als Potenz einer natürlichen Zahl darstellen läßt!

Aufgabe 110812:

Ermittle alle rationalen Zahlen x, die folgende Eigenschaft haben:

Addiert man 33 zu x und halbiert die entstandene Summe, so erhält man das Doppelte der zu x entgegengesetzten Zahl.

Aufgabe 110813:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ΔABC mit A als Scheitel des rechten Winkels und mit $\overline{AC} < \overline{AB}$ (1). Der Kreis um A mit $\overline{AC}$ schneidet BC außer in C noch in einem Punkt E, wobei E wegen (1) zwischen C und B liegt. Die im Punkt E an den genannten Kreis gelegte Tangente schneidet AB in einem Punkt D, der zwischen A und B liegt.

Beweise, daß $\overline{ED} = \overline{DB}$ gilt!

Aufgabe 110814:

Gegeben seien ein beliebiges Parallelogramm $ABCD$ sowie eine beliebige Länge e ($e > 0$).

Konstruiere unter Beibehaltung der Seite AB ein zu $ABCD$ flächengleiches Parallelogramm ABC_1D_1, das auf derselben Seite der Geraden durch A und B wie $ABCD$ liegt und dessen Diagonale AC_1 die gegebene Länge e hat!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob sich aus den gegebenen Stücken stets eindeutig ein Parallelogramm der geforderten Art konstruieren läßt! (Eine Untersuchung ob zwei eventuell entstehende verschiedene Parallelogramme einander kongruent sind, wird hier nicht verlangt.)

11. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110821:
Beweise den folgenden Satz:

Wenn p eine Primzahl größer als 3 ist, dann ist genau eine der Zahlen $p-1$, $p+1$ durch 6 teilbar.

Aufgabe 110822:
Es sei AB eine Strecke gegebener Länge a, auf der zwei Punkte C und D liegen. Dabei liege C zwischen A und D und D zwischen C und B. Über AC, AD und DB seien auf derselben Seite der Geraden durch A und B Halbkreise geschlagen, und über CB sei ein Halbkreis auf der anderen Seite der Geraden geschlagen.

Es ist die Summe s der Längen aller dieser Halbkreisbögen in Abhängigkeit von a zu ermitteln.

Aufgabe 110823:
Beweise, daß für jedes Dreieck ΔABC der folgende Satz gilt:

Ist S der von C verschiedene Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch C mit dem Umkreis des Dreiecks ΔABC, dann liegt S auf der Mittelsenkrechten von AB.

Aufgabe 110824:
In einer Ebene ϵ seien zwei voneinander verschiedene Punkte P und Q sowie eine durch Q gehende Gerade g beliebig gegeben.

a) Beweise, daß dann stets der Spiegelpunkt P' von P bezüglich g auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt!

b) Beweise, daß es umgekehrt zu jedem Punkt P' des Kreises um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ eine durch Q verlaufende Gerade g gibt, bezüglich der P' der Spiegelpunkt von P ist!

c) Beweise: Ist P^* ein Punkt, der nicht auf dem Kreis um Q mit dem Radius $\overline{PQ}$ liegt, so gibt es keine durch Q verlaufende Gerade, bezüglich der P^* der Spiegelpunkt von P wäre!

11. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 110831:

In ein leeres Gefäß (ohne Abfluß) mit einem Fassungsvermögen von 1 000 Liter flossen mit gleichmäßiger Strömungsgeschwindigkeit zunächst in jeder Sekunde genau 30 Liter Wasser und von einem späteren Zeitpunkt t ab in jeder Sekunde genau 15 Liter Wasser. Nach genau 40 s, gemessen vom Anfang an, war das Gefäß gefüllt.

Ermittle, welcher Bruchteil des Gefäßinhalts zum Zeitpunkt t gefüllt war!

Aufgabe 110832:

Von sieben Schülern soll jeder auf sein Zeichenblatt vier voneinander verschiedene Geraden zeichnen. Dabei soll der erste Schüler die Geraden so zeichnen, daß kein Schnittpunkt, der zweite so, daß genau ein Schnittpunkt auftritt, der dritte so, daß genau 2 Schnittpunkte, der vierte so, daß genau 3 Schnittpunkte, der fünfte so, daß genau 4 Schnittpunkte, der sechste so, daß genau 5 Schnittpunkte, der siebente so, daß genau 6 Schnittpunkte auftreten. Schnittpunkte, die außerhalb des Zeichenblattes liegen werden hierbei mitgezählt.

Nach einer gewissen Zeit behaupten der zweite, der dritte und der sechste Schüler, daß ihre Aufgabe nicht lösbar sei.

Stelle fest, wer von den drei Schülern recht und wer nicht recht hat, und beweise deine Feststellung!

Aufgabe 110833:

Ermittle alle reellen Zahlen x, für die ein gleichschenkliges Dreieck ΔABC mit den Seitenlängen $a = -5x + 12$; $b = 3x + 20$; $c = 4x + 16$ existiert!

(Überlege, welche Bedingungen a, b und c dabei erfüllen müssen!)

Aufgabe 110834:

Beweise, daß für je zwei rationale Zahlen $a > 2$ und $b > 2$ das Produkt ab größer als die Summe $a + b$ ist!

Aufgabe 110835:

Gisela stellt auf einem Pioniernachmittag folgende Aufgabe:

> "Wenn ich aus diesem Gefäß mit Nüssen an fünf von euch dem ersten die Hälfte und eine halbe Nuß und dann dem zweiten, dem dritten u.s.w. nacheinander jeweils die Hälfte der noch vorhandenen Nüsse und eine halbe dazu gebe, dann habe ich alle verbraucht.
>
> Wie groß ist die Anzahl der Nüsse, die das Gefäß enthielt?
>
> Wie groß ist für jeden der fünf Pioniere die Anzahl der Nüsse, die er erhalten würde?"

Aufgabe 110836:

Einem Rechteck $ABCD$ mit den Seitenlängen $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, $a > b$, sei ein Parallelogramm $EFGH$ so einbeschrieben, daß die Seiten DA und BC des Rechtecks von Eckpunkten des Parallelogramms im Verhältnis 2 : 3 oder 3 : 2, die Seiten AB und CD im Verhältnis 3 : 4 oder 4 : 3 geteilt werden und E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA liegen.

Stelle fest, ob dies auf eine oder mehrere Weisen möglich ist! Ermittle in jedem der möglichen Fälle das Verhältnis der Flächeninhalte von Rechteck und Parallelogramm zueinander!

12. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120811:

Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen z, von denen jede die folgenden Bedingungen erfüllt:

(1) Die Quersumme der Zahl z beträgt 12

(2) Die aus der Zehner- und aus der Einerziffer (in dieser Reihenfolge) der Zahl z gebildete zweistellige Zahl ist das Fünffache der aus der Hunderterziffer von z bestehenden (einstelligen) Zahl.

Aufgabe 120812:

Von einem Würfel mit der Kantenlänge $a = 9\,\text{cm}$ seien an jeder seiner Ecken jeweils ein Würfel mit einer Kantenlänge $b < \frac{a}{2}$ herausgeschnitten. (Die Flächen der herausgeschnittenen Würfel seien parallel zu den entsprechenden Flächen des großen Würfels).

a) Zeichne ein Schrägbild des Restkörpers für $b = 3\,\text{cm}$! ($\alpha = 60°$, $1 : 3$)

b) Es gibt genau einen Wert von b, für den das Volumen V_R des Restkörpers $217\,\text{cm}^3$ beträgt. Ermittle diesen Wert!

Aufgabe 120813:

Man denke sich alle natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 000 fortlaufend nebeneinander geschrieben. Es entsteht die Zahl mit der Ziffernfolge 123456789101112...

welche Ziffer steht in dieser Zahl an der 300 001. Stelle?

Aufgabe 120814:

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ΔABC.

Konstruiere um jeden der Punkte A, B, C einen Kreis derart, daß die so entstandenen Kreise einander paarweise von außen berühren!

12. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120821:
Axel, Bernd, Conrad, Dieter, Erwin, Frank und Gerd sind im Turnunterricht hintereinander der Größe nach angetreten, wobei der Größte von ihnen vorn steht. Es ist außerdem bekannt:

(1) Dieter steht an vierter Stelle.

(2) Gerd steht unmittelbar vor Bernd und unmittelbar hinter Erwin.

(3) Axel steht unmittelbar hinter Frank.

(4) Gerd und Axel sind Zwillinge, während der Zweitgrößte der sieben Jungen keine Geschwister hat.

Schreibe die Namen der sieben in der Reihenfolge auf, in der sie angetreten sind!

Aufgabe 120822:
Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r, AB eine Sehne von k der Länge r und C ein von A und B verschiedener Punkt auf k.

Ermittle alle Möglichkeiten für die Größe des Winkels $\sphericalangle BCA$!

Aufgabe 120823:
Als erste Quersumme einer natürlichen Zahl n sei die in üblicher Weise gebildete Quersumme verstanden. Ist die erste Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so sei ihre Quersumme als zweite Quersumme von n bezeichnet. Ist die zweite Quersumme von n eine Zahl mit mehr als einer Ziffer, so heiße ihre Quersumme die dritte Quersumme von n.

a) Ermittle den größten Wert, der als dritte Quersumme einer 1972-stelligen Zahl auftreten kann!

b) Gib (durch Beschreibung der Ziffernfolge) die kleinste 1972-stellige natürliche Zahl an, die diese größtmögliche dritte Quersumme hat!

Aufgabe 120824:
Konstruiere ein Dreieck ΔABC aus $c = 7,5$ cm; $a = 6,5$ cm und $\alpha + \beta = 120°$!

Dabei sei c die Länge der Seite AB, a diejenige der Seite BC, α die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die des Winkels $\sphericalangle ABC$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

12. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 120831:

Die FDJ-Gruppe der Klasse 8a einer Oberschule führte einen Sportwettkampf durch. Vor Beginn des Wettkampfes sollte jeder Teilnehmer einen Tip darüber abgeben, welche drei Teilnehmer in welcher Reihenfolge das beste Gesamtergebnis erzielen würden.

Als man die Tipscheine auswerte, stellte sich heraus, daß ausschließlich Annekatrin, Bernd und Claudia auf den ersten drei Plätzen erwartet wurden. Dabei wurde die Reihenfolge Bernd - Annekatrin - Claudia genau fünfmal getippt. Außerdem wurden noch die Reihenfolge Bernd - Claudia - Annekatrin und Claudia - Annekatrin - Bernd erwartet, und zwar einer dieser beiden Tips genau vier- und der andere genau dreimal. Eine andere Reihenfolge wurde nicht getippt.

Für die Voraussagen wurden Punkte vergeben, und zwar für jeden richtig vorausgesagten Platz ein Punkt. Maximal waren also drei Punkte mit einem Tipschein erreichbar. Die Summe aller so vergebenen Punkte betrug 17. Bernd gewann, entgegen den meisten Voraussagen, nicht den Wettkampf, aber die ersten drei Plätze wurden tatsächlich von Annekatrin, Bernd und Claudia belegt.

Wer gewann den Wettbewerb? Wer belegte den zweiten und wer den dritten Platz? Wie oft wurde der Tip Bernd - Claudia - Annekatrin insgesamt abgegeben?

Aufgabe 120832:

Beweise den folgenden Satz:

Sind a, b, c ($a \geq b \geq c$) drei beliebige natürliche Zahlen, dann ist die Summe dieser Zahlen oder eine der aus zweien dieser Zahlen gebildeten Differenzen durch 3 teilbar.

Aufgabe 120833:

Gegeben sei ein Dreieck ΔABC. Über der Seite AB sei ein Parallelogramm $ABDE$ so errichtet, daß dessen Seite DE mit auf derselben Seite der Geraden durch A und B liegt, daß dabei aber die Punkte D und A nicht auf derselben Seite der Geraden durch B und C liegen und daß außerdem die Punkte E und B nicht auf derselben Seite der Geraden durch A und C liegen. Ferner seien über den Seiten BC und AC je ein Parallelogramm $CBIH$ bzw. $ACKL$ derart errichtet, daß D auf der Geraden durch I und H sowie E auf der Geraden durch K und L liegt.

Beweise, daß dann der Flächeninhalt des Parallelogramms $ABDE$ gleich der Summe der Flächeninhalte der Parallelogramme $BIHC$ und $CKLA$ ist!

Aufgabe 120834:

Gegeben sei ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Ein Durchmesser dieses Kreises sei AB. Zwei Punkte P_1 und P_2 mögen sich vom gleichen Zeitpunkt an gleichförmig auf je einer der beiden Halbkreislinien von A nach B bewegen, wobei die Bewegung des Punktes P_1 viermal so schnell erfolgen soll wie die des Punktes

P_2.

Gibt es zwischen dem Start und der Ankunft von P_1 (in B) einen Zeitpunkt, zu dem die Dreiecke ΔABP_1 und ΔABP_2 gleichen Flächeninhalt haben?

Wenn ja, dann ermittle für jeden solchen Zeitpunkt die Größe des Winkels $\sphericalangle AMP_2$!

Aufgabe 120835:

Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{MP} = \overline{MR} = 9$ cm und einem Zentriwinkel $\sphericalangle PMR$ der Größe $50°$.

Konstruiere ein Quadrat $ABCD$ so, daß A auf MP liegt, B und C auf dem Bogen $\overset{\frown}{PR}$ liegen und D auf MR liegt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! (Eine Untersuchung, ob es genau ein derartiges Quadrat gibt, wird nicht verlangt.)

Hinweis: Es empfiehlt sich, zur Lösung Eigenschaften von zentrischen Streckungen zu benutzen.

Aufgabe 120836:

Untersuche, ob es eine kleinste positive rationale Zahl a gibt, zu der man eine natürliche Zahl x mit der Eigenschaft

$$\frac{25}{2}x - a = \frac{5}{8}x + 142$$

finden kann!

Wenn es ein solches kleinstes a gibt, so ermittle, welchen Wert x hierfür annimmt!

13. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130811:

Man ermittle alle Möglichkeiten, eine vierstellige ungerade (natürliche) Zahl z so anzugeben, daß sie folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Zahl z hat vier verschiedene Ziffern.

(2) Das Produkt aus der zweiten und der dritten Ziffer von z ist 21mal so groß wie das Produkt aus der ersten und der vierten Ziffer.

(3) Die kleinste der Ziffern von z steht an erster, die größte an zweiter Stelle.

Aufgabe 130812:

In $** \cdot 9 \; * = ***$ ist jedes Sternchen $*$ so durch eine der Ziffern 0 bis 9 zu ersetzen, daß eine richtige Gleichung entsteht.

Ermittle sämtliche Lösungen dieser Aufgabe!

Aufgabe 130813:

Beim mathematischen Wettbewerb der Schülerzeitschrift "alpha" erhielten drei Schüler einer Schule Preise. Auf die Frage nach ihren Vornamen wurden folgende sieben Antworten gegeben:

(1) Christian, Uwe, Iris

(2) Eva, Elke, Uwe

(3) Roland, Marion, Bernd

(4) Iris, Heike, Uwe

(5) Roland, Heike, Bernd

(6) Eva, Marion, Christian

(7) Christian, Eva, Elke.

Es stellte sich heraus, daß in genau einer der Antworten alle drei Vornamen richtig, in genau zwei Antworten genau zwei Vornamen falsch und in genau drei Antworten alle drei Vornamen falsch angegeben wurden.

Ermittle die Vornamen der drei Schüler, die einen Preis erhielten!

Aufgabe 130814:

In einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $\overline{AB} > \overline{CD}$ seien $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = c$ und der Abstand h der Parallelseiten gegeben. Die Diagonalen AC bzw. BD schneiden die Mittelparallele FE des Trapezes in H bzw. G.

Ermittle den Flächeninhalt A_T des Trapezes $ABGH$!

13. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130821:

In der folgenden Aufgabe sind die Buchstaben a, b, c und das Zeichen $*$ durch jeweils eine der Ziffern 0 bis 9 so zu ersetzen, daß eine richtig gelöste und in üblicher Weise geschriebene Multiplikationsaufgabe entsteht.

$$\begin{array}{ccccccc}
a & b & c & \cdot & b & a & c \\
\hline
 & * & * & * & b & & \\
 & & & * & * & a & \\
 & & & * & * & * & * \\
\hline
 & * & * & * & * & * & *
\end{array}$$

Dabei bedeuten gleiche Buchstaben gleiche, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. An die Ziffern, die für die Zeichen $*$ zu setzen sind, werden keine Gleichheits- oder Verschiedenheitsforderungen gestellt.

Aufgabe 130822:

Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C aus $\rho = 2,5$ cm und $\alpha = 50°$! Dabei sei ρ der Inkreisradius und α die Größe des Winkels BAC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 130823:

Man ermittle alle rationalen Zahlen r mit folgender Eigenschaft:

Subtrahiert man r vom Zähler des Bruches $\frac{3}{4}$ und addiert r zu dessen Nenner, so erhält man einen Bruch, der halb so groß wie $\frac{3}{4}$ ist.

Aufgabe 130824:

Zwei Kreise k_1 und k_2 mögen einander in zwei verschiedenen Punkten A und B schneiden. Zwei voneinander verschiedene parallele Geraden g_1 und g_2 durch A bzw. B seien so gelegen, daß g_1 den Kreis k_1 in einem von A verschiedenen Punkte C und den Kreis k_2 in einem von A verschiedenen Punkte D schneidet, daß ferner g_2 den Kreis k_1 in einem von B verschiedenen Punkte E und den Kreis k_2 in einem von B verschiedenen Punkte F schneidet und daß dabei A zwischen C und D sowie B zwischen E und F liegt.

Beweise, daß dann $\overline{CD} = \overline{EF}$ gilt!

13. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 130831:

Anja, Brigitte, Cathrin, Daja und Eva trugen mehrere Spiele für vier Personen unter sich aus. In jedem Spiel gab es einen Gewinner und drei Verlierer. Jedes der Mädchen spielte gleich viele Male. Nach Abschluß aller Spiele stellte man fest:

(1) Cathrin gewann genau die Hälfte, Daja genau ein Drittel und Eva genau ein Viertel der Spiele, an denen sie beteiligt waren.

(2) Die Anzahl der Siege des Mädchens, das das drittbeste Ergebnis erzielte, war eine Primzahl.

(3) Keines der Mädchen verlor alle Spiele.

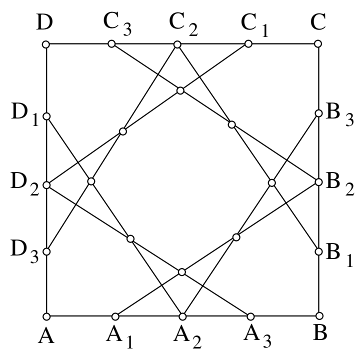
Ermittle die genaue Anzahl aller Spiele, die ausgetragen wurden, und gib an, wie viele Spiele jedes Mädchen insgesamt gewann!

Aufgabe 130832:

Zeige, daß für jede Primzahl $p > 5$ das Produkt $(p-2)(p-1)p(p+1)(p+2)$ durch 360 teilbar ist!

Aufgabe 130833:

In einem Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a werde die Seite AB durch die Punkte A_1, A_2, A_3, die Seite BC durch die Punkte B_1, B_2, B_3, die Seite CD durch C_1, C_2, C_3 und DA durch die Punkte D_1, D_2, D_3 jeweils in 4 gleichlange Teilstrecken geteilt. Ferner seien die Strecken A_1B_2, A_2B_3, B_1C_2, B_2C_3, C_1D_2, C_2D_3, D_1A_2 und D_2A_3 eingezeichnet. Von den Schnittpunkten dieser Strecken miteinander seien die Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7, P_8 wie in der Abbildung bezeichnet.



Berechne den Flächeninhalt des Achtecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ in Abhängigkeit von a!

Aufgabe 130834:

Ermittle alle rationalen Zahlen a, die die Ungleichung

$$\frac{3a-2}{a+1} < 0$$

erfüllen!

Aufgabe 130835:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ und $\overline{\sphericalangle ACB} = 90°$. Ein Halbkreis über einer Teilstrecke von AB sei so gelegen, daß die Seiten BC und AC auf Tangenten an diesem Halbkreis liegen und dieser BC und AC berührt.

Beweise, daß für seinen Radius r dann $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ gilt!

Aufgabe 130836:

Konstruiere ein Dreieck ABC, das den Bedingungen $a : b : c = 2 : 3 : 4$ und $r = 4\,\text{cm}$ genügt!

Dabei seien a, b, c in dieser Reihenfolge die Längen der Seiten BC, AC und AB, und r sei der Umkreisradius.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Bedingungen ein Dreieck ABC eindeutig bestimmt ist!

14. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140811:

Ermittle sämtliche Lösungen des nachstehenden Kryptogramms, d.h. sämtliche Möglichkeiten, die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß alle waagerecht und senkrecht stehenden Gleichungen erfüllt sind! Dabei sollen gleiche Buchstaben gleiche und verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern bedeuten.

$$\begin{array}{cccccccccc}
A & B & C & - & D & E & = & A & F & G \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & & H & \cdot & H & A & = & & C & H \\
\hline
 & B & J & + & A & J & = & A & A & C
\end{array}$$

Hinweis: Die Aufgabe ist nicht nur durch Raten zu lösen, wie häufig in Rätselzeitschriften; sondern es sind Überlegungen zur Vollständigkeit und Richtigkeit der Lösung anzugeben.

Aufgabe 140812:

Ermittle alle geordneten Paare (x, y) natürlicher Zahlen x, y, für die die Gleichung $13x + 5y = 82$ gilt!

Aufgabe 140813:

Gegeben sei ein Kreis k_1 mit dem Radius r_1 und dem Mittelpunkt M. Um M ist ein Kreis k_2 derart zu zeichnen, daß die zwischen k_1 und k_2 gelegene Kreisringfläche einen dreimal so großen Inhalt hat wie die Fläche des Kreises k_1.

Berechne den Radius r_2 des Kreises k_2!

Aufgabe 140814:

Für zwei Sehnen AB und BC $(A \neq C)$ eines Kreises k gelte $\overline{AB} = \overline{BC}$. D sei ein beliebiger Punkt von k, der auf der anderen Seite der Geraden durch A und C liegt wie B.

Es ist zu beweisen, daß die Gerade durch D und B den Winkel $\sphericalangle ADC$ halbiert!

14. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140821:

Bei einer Kreisspartakiade wurden für die Teilnehmer insgesamt 61 Goldmedaillen, 63 Silbermedaillen und 60 Bronzemedaillen vergeben. Die Mannschaften der Schulen der Stadt B erkämpften dabei zusammen 42 dieser Medaillen. Sie erhielten genau ein Drittel aller Silbermedaillen, mehr als ein Sechstel, jedoch weniger als ein Fünftel aller Bronzemedaillen und einige Goldmedaillen.

Ermittle die Anzahl aller Gold-, Silber- und Bronzemedaillen, die von den Schülern der Stadt B bei diesem Wettkampf errungen wurden!

Aufgabe 140822:

Vier Lastkraftwagen A, B, C und D befahren dieselbe Strecke. Fährt A mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 56 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und B mit 40 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$, so benötigt A genau 2 Stunden weniger als B für diese Strecke.

Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit müßte C fahren, wenn D genau 4 Stunden eher als C abfahren, durchschnittlich mit 35 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und gleichzeitig mit C am gemeinsamen Ziel ankommen soll?

Aufgabe 140823:

Gegeben sei ein Dreieck ABC, das folgender Bedingung genügt:

Die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$ beträgt ein Viertel der Größe des Außenwinkels bei A.

a) Stelle fest, ob es auf AB einen Punkt D gibt, für den $\overline{AD} = \overline{AC}$ gilt!

b) Beweise, daß für jeden derartigen Punkt $\overline{DB} = \overline{DC}$ gilt!

Aufgabe 140824:

Konstruiere einen Kreis k, der folgende Eigenschaft hat:

Ist AB ein Durchmesser von k, g die Tangente an k in B und liegt ein Punkt Q so auf g, daß $\overline{BQ} = 6$ cm gilt, so schneidet k die Strecke AQ in einem Punkt P, für den $\overline{PQ} = 3$ cm gilt.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Stelle fest, ob durch die gegebenen Stücke ein derartiger Kreis k bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

14. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 140831:

Um Peters Fähigkeiten im Knobeln zu erproben, werden ihm an einem Zirkelnachmittag über fünf Schüler sieben Aussagen mitgeteilt, unter denen, wie ihm ebenfalls gesagt wird, genau eine falsch ist. Er soll diese falsche Aussage herausfinden und außerdem die Namen der Schüler dem Alter nach ordnen.

Die Aussagen lauten:

(1) Anton ist älter als Elvira.

(2) Berta ist jünger als Christine.

(3) Dieter ist jünger als Anton.

(4) Elvira ist älter als Christine.

(5) Anton ist jünger als Christine.

(6) Elvira ist älter als Dieter.

(7) Christine ist jünger als Dieter.

Ermittle die falsche Aussage, und ordne die Namen der Schüler dem Alter nach (beginnend mit dem Jüngsten)!

Aufgabe 140832:

Von zwei Primzahlen wird folgendes gefordert:

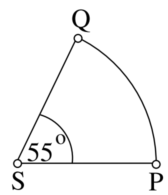
a) Ihre Summe ist eine Primzahl.

b) Multipliziert man diese Summe mit dem Produkt der zuerst genannten beiden Primzahlen, so erhält man eine durch 10 teilbare Zahl.

Man gebe alle Primzahlen an, die diese Forderungen erfüllen.

Aufgabe 140833:

Gegeben sei ein Kreissektor mit dem Radius $\overline{SP} = \overline{SR} = 8,5$ cm und dem Zentriwinkel $\sphericalangle PSR$ der Größe 55° (siehe Abbildung).



Konstruiere einen Kreis k, der dem gegebenen Sektor einbeschrieben ist, d.h., der die Strecken SP, SR und den Bogen PR so berührt, daß k innerhalb der Fläche des PR enthaltenden Kreises liegt!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion!

Aufgabe 140834:

Achim, Bernd, Christian und Detlef waren die vier Teilnehmer der Endrunde eines Schachturniers. Es hatte jeder gegen jeden genau zweimal zu spielen. Für jede gewonnene Partie wurden ein Punkt, für jede unentschiedene ein halber Punkt, für jede verlorene 0 Punkte vergeben.

Ein Wandzeitungsartikel über dieses Turnier enthält folgende Angaben:

- Bernd und Christian erzielten zusammen genau einen Punkt mehr als Achim und Detlef zusammen.
- Christian und Detlef erzielten zusammen genau 7 Punkte.
- Achim und Christian konnten zusammen genau 5 Punkte weniger erreichen als Bernd und Detlef zusammen.

Es wird gefragt, wie viele Punkte jeder der vier Teilnehmer erhielt. Ermittle auf diese Fragen alle Antworten, die den genannten Angaben entsprechen!

Aufgabe 140835:

Beweise folgenden Satz:

Verbindet man die Mittelpunkte der Diagonalen eines Trapezes, so erhält man eine (evtl. zu einem Punkt ausgeartete) Strecke, deren Länge halb so groß ist wie die Differenz der Längen der zwei parallelen Seiten.

Aufgabe 140836:

Gegeben seien drei Zahlen p, p_1, p_2 mit $0 < p_1 < p < p_2 < 100$.

Aus einer geeigneten Menge x kg einer p_1-prozentigen Lösung eines Stoffes (d.h. einer Lösung, die p_1 % dieses Stoffes und den Rest Wasser enthält) und einer geeigneten Menge y kg einer p_2-prozentigen Lösung des gleichen Stoffes soll durch Zusammengießen eine p-prozentige Lösung hergestellt werden.

a) Ermittle das hierzu erforderliche Mischungsverhältnis, d.h. die Zahl $x : y$, zunächst speziell für die Werte $p_1 = 25$, $p_2 = 60$ und $p = 35$!

b) Stelle dann eine für beliebige Werte von p_1, p_2 und p gültige Formel für das Mischungsverhältnis auf!

Anmerkung: Die angegebenen Prozentsätze beziehen sich auf die Masse, sind also nicht als Volumenprozent anzusehen.

15. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150811:

Peter kam vom Einkaufen zurück. Er kaufte in genau 4 Geschäften ein und hatte dafür genau 35 M zur Verfügung. Davon bringt er der Mutter genau 2 M wieder und berichtet:

> "Im Gemüseladen habe ich 4 M und noch etwas, jedenfalls mehr als 10 Pf bezahlt. Im Schreibwarengeschäft habe ich mehr als im Gemüseladen bezahlen müssen, es war eine gerade Zahl von Pfennigen und kein 5-Pfennig-Stück dabei. Beim Bäcker war es dann mehr als im Gemüseladen und Schreibwarengeschäft zusammen, aber diese Geldsumme war ungerade, und im Konsum schließlich bezahlte ich mehr als in den drei anderen Geschäften zusammen."

Welche Geldbeträge bezahlte Peter in den vier genannten Geschäften?

Aufgabe 150812:

a) Ermittle alle geordneten Paare $(a,\, b)$ natürlicher Zahlen, für die die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

   (1) $a < 4$

   (2) $a - b > 0$

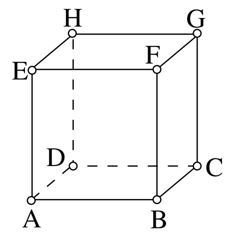
   (3) $a + b > 2$

b) Beweise, daß es keine geordneten Paare $(a,\, b)$ ganzer Zahlen mit den Eigenschaften (1), (2), (3) gibt, bei denen $a < 0$ oder $b < 0$ ist!

Aufgabe 150813:

Man beweise: Wenn in einem Dreieck ABC für die Größen β, γ der Winkel $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle BCA$ und für einen Punkt D auf der Seite BC der Winkel $\sphericalangle BDA$ die Größe $90° + \frac{\gamma}{2} - \frac{\beta}{2}$ hat, so liegt D auf der Winkelhalbierenden von $\sphericalangle BAC$.

Aufgabe 150814:



Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Abbildung). Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, daß die Raumdiagonale AG sowohl parallel zur Grundrißtafel als auch parallel zur Aufrißtafel liegt. Im übrigen kann, wenn diese Forderung erfüllt wird, die Lage des Würfels im Raum beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend der Abbildung zu benennen.

Beschreibe und begründe die Konstruktion einer derartigen Zweitafelprojektion des Würfels!

Hinweis: Es empfiehlt sich, eine günstige Lage der vier Punkte A, E, G, C zu wählen.

15. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150821:

Die Wägung eines mit Wasser gefüllten Gefäßes ergab eine Gesamtmasse (Gefäß- und Wassermasse) von 2 000 g. Gießt man 20% des Wassers ab, so verringert sich diese gewogene Gesamtmasse auf 88%.

Berechne die Masse des leeren Gefäßes!

Aufgabe 150822:

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen $n \geq 1$, für die unter den sechs Zahlen $n+1$, $n+2$, $n+3$, $n+4$, $n+5$, $n+6$ ein Paar gefunden werden kann, in dem die erste Zahl des Paares ein echter Teiler der zweiten Zahl des Paares ist!

Nenne (für jedes solche n) alle derartigen Paare!

Aufgabe 150823:

Es sei k ein Kreis mit dem Radius r und dem Mittelpunkt M. Ferner sei AB eine Sehne von k, die nicht Durchmesser von k ist. Auf dem Strahl aus A durch B sei C der Punkt außerhalb AB, für den $\overline{BC} = r$ gilt. Der Strahl aus C durch M schneide k in dem außerhalb CM gelegenen Punkt D.

Beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle AMD} = 3 \cdot \overline{\sphericalangle ACM}$ gilt!

Aufgabe 150824:

Gegeben seien zwei parallele Geraden g_1 und g_2 mit dem Abstand a und außerdem ein Punkt P in beliebiger Lage zwischen g_1 und g_2.

Konstruiere einen Kreis k, der g_1 und g_2 berührt und durch P geht!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Aufgabenstellung ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

15. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 150831:

Vor vielen Jahren war ein Wanderer auf dem Wege von Altdorf nach Neudorf. Als er unterwegs nach dem Weg fragte, erklärte ihm ein Ortskundiger:

> "Ihr seid auf dem richtigen Weg und werdet bald an einer Weggabelung einen Wegweiser mit drei Richtungsschildern sehen. Diese weisen auf die Wege nach Altdorf, Neudorf und Mittendorf. Ich mache Euch aber darauf aufmerksam, daß genau zwei dieser Richtungsschilder falsch beschriftet worden sind."

Der Wanderer bedankte sich, gelangte zum Wegweiser und las ihn.

Untersuche, ob der Wanderer mit den erhaltenen Informationen den Weg nach Neudorf mit Sicherheit ermitteln konnte!

Aufgabe 150832:

Beweise, daß sich alle Primzahlen $p > 3$ in der Form $6n + 1$ oder $6n - 1$ schreiben lassen, wobei n eine von Null verschiedene natürliche Zahl ist!

Aufgabe 150833:

Gegeben sei ein beliebiges Dreieck ABC.

Konstruiere in seinem Inneren einen Punkt P, so daß die Dreiecke ABP, BCP, ACP alle einander flächengleich sind!

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob stets genau ein solcher Punkt P existiert!

Aufgabe 150834:

Eine Pioniergruppe wandert von der Touristenstation A zum Bahnhof B. Sie legte in der ersten Stunde 3 km zurück. Danach rechnete sie sich aus, daß sie bei gleichbleibender Geschwindigkeit 40 Minuten zu spät zum Zug kommen würde. Deshalb erhöhte sie ihre durchschnittliche Marschgeschwindigkeit auf 4 km in der Stunde und kam damit 45 Minuten vor Abfahrt des Zuges in B an.

Berechne die Länge des Weges von A nach B!

Aufgabe 150835:

Es ist zu beweisen:

> Wenn in einem konvexen Viereck $ABCD$
>
> auf der Seite AB Punkte E und F so zwischen A und B liegen, daß $\overline{AE} = \overline{EF} = \overline{FB}$ gilt, und

auf der Seite BC Punkte G und H so zwischen B und C Liegen, daß $\overline{BG} = \overline{GH} = \overline{HC}$ gilt, und
auf der Seite CD Punkte I und K so zwischen C und D liegen, daß $\overline{CI} = \overline{IK} = \overline{KD}$ gilt, und
auf der Seite DA Punkte L und M so zwischen D und A liegen, daß $\overline{DL} = \overline{LM} = \overline{MA}$ gilt,

so sind die Geraden durch M, E und I, H sowie die durch F, G und K, L jeweils parallel zueinander.

Aufgabe 150836:

Für ein Viereck $ABCD$ sei gefordert, daß die Summe der Längen der beiden Diagonalen AC und BD 11 cm beträgt, daß die Seite AB die Länge $a = 6$ cm und die Seite AD die Länge $d = 1$ cm haben soll.

Ermittle eine Länge x und eine Länge y so, daß für den Umfang u jedes Vierecks, das den angegebenen Forderungen genügt, die Ungleichung $x \leq u \leq y$ gilt, wobei das Gleichheitszeichen jeweils genau dann gilt, wenn das Viereck $ABCD$ zu einer Strecke entartet, d.h., wenn die Punkte A, B, C, D auf ein und derselben Geraden liegen!

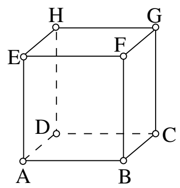
Hinweis: $ABCD$ kann auch nicht-konvex sein. Ferner können beim Entartungsfall auch Punkte zusammenfallen.

16. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160811:

Durch einen Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) soll ein ebener Schnitt so gelegt werden, daß als Schnittfigur ein gleichseitiges Dreieck entsteht, dessen sämtliche Ecken auch Eckpunkte des Würfels sind.



Gib alle Möglichkeiten für einen solchen Schnitt an, und stelle einen Würfel mit einem solchen Schnitt in Kavalierperspektive dar!

Aufgabe 160812:

In einem VEB macht es sich erforderlich, für jeden der Arbeiter Arnold, Bauer, Donath, Funke, Große, Hansen, Krause und Lehmann langfristige Qualifizierungsmaßnahmen zu planen. Innerhalb von vier Wochen, und zwar in der Zeit vom 1.11.1976 (Montag) bis 27.11.1976 (Sonnabend) kann jeweils für drei Tage (entweder von Montag bis Mittwoch oder von Donnerstag bis Sonnabend) je ein Arbeiter zu einem dreitägigen Lehrgang delegiert werden.

Da die laufende Produktion nicht gefährdet werden darf, kann eine Freistellung von der Arbeit nur zu bestimmten Zeiten erfolgen:

(1) Arnold kann nicht in der dritten Woche teilnehmen.

(2) Bauer ist in der ersten Hälfte jeder Woche im Betrieb nicht entbehrlich, aber auch nicht vom 11. bis 13.11. und nicht in der zweiten Hälfte der vierten Woche.

(3) Donath kann nur in der gleichen Woche wie Lehmann gehen.

(4) Funke kann nur in der ersten oder zweiten Woche freigestellt werden.

(5) Große kann nur vom 4. bis 6.11. oder vom 18. bis 20.11.76 oder in der zweiten oder vierten Woche jeweils in der zweiten Hälfte berücksichtigt werden.

(6) Hansen kann nur in der zweiten oder dritten Woche jeweils in der zweiten Hälfte eingesetzt werden, jedoch nicht in der Woche, in der Funke zum Lehrgang geht.

(7) Krause kann nur in der ersten Woche oder vom 22. bis 24.11.76 zum Lehrgang geschickt werden.

(8) Lehmann kann nur in der ersten Hälfte jeder Woche teilnehmen.

Ermittle sämtliche Möglichkeiten, unter diesen Bedingungen die vorgesehenen Qualifizierungsmaßnahmen durchzuführen!

Gib dabei für jeden der Arbeiter die Zeit an, in der er zum Lehrgang delegiert wird!

Aufgabe 160813:

Beweise den folgenden Satz:

Wenn von drei aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen die kleinste Zahl gerade ist dann ist das Produkt dieser drei Zahlen durch 24 teilbar.

Aufgabe 160814:

Peter stellt seinem Freund Fritz folgende Aufgabe:

> ”Gegeben sei ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem Erddurchmesser ist, und ein zweiter dazu konzentrischer Kreis, dessen Umfang 1 m länger als der Umfang des ersten Kreises ist. Ermittle den Abstand beider Kreislinien voneinander!”

Nach kurzem Überlegen nennt Fritz diesen Abstand und behauptet:

> ”Wenn der erste Kreis nur den Durchmesser einer Stecknadelkuppe (1 mm) besitzt, und der Umfang des zweiten konzentrischen Kreises wiederum 1 m länger als der des ersten Kreises ist, dann ist der Abstand dieser beiden Kreise genau so groß wie in deiner Aufgabe.”

Stimmt diese Behauptung von Fritz?

Wie groß ist der Abstand der konzentrischen Kreislinien in beiden Fällen?

16. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160821:

Für Schülerexperimente wurden genau 29 Einzelteile (Versuchsmaterialien) für genau 29 M eingekauft. Das waren Teile zu 10 M, 3 M oder 0, 50 M; von jeder Sorte mindestens ein Teil. Andere Sorten kamen unter den eingekauften Teilen nicht vor.

Wieviel Teile von jeder der drei Sorten waren es insgesamt?

Aufgabe 160822:

Ein Rechteck habe die Seitenlängen a_1 und b_1.

Um wieviel Prozent verändert sich der Flächeninhalt dieses Rechtecks, wenn die Seite a_1 um 25% verkleinert und die Seite b_1 um 20% vergrößert wird?

Aufgabe 160823:

In einem Kreis k seien zwei verschiedene Durchmesser, die nicht aufeinander senkrecht stehen, eingezeichnet. Ferner sei durch jeden der vier Endpunkte beider Durchmesser die Tangente gelegt.

Beweise, daß die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Tangenten die Ecken eines nichtquadratischen Rhombus sind!

Aufgabe 160824:

Konstruiere ein Viereck $ABCD$, das folgende Bedingungen erfüllt:

- Die Größe β des Innenwinkels $\sphericalangle CBA$ im Viereck $ABCD$ beträgt 60°.
- Die Länge f der Diagonalen BD beträgt 12, 5 cm.
- Die Länge b der Seite BC beträgt 6, 0 cm.
- Der Abstand h des Schnittpunktes S der Diagonalen des Vierecks $ABCD$ von der Seite AB beträgt 3, 5 cm.
- Die Diagonalen des Vierecks $ABCD$ stehen senkrecht aufeinander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die angegebenen Bedingungen ein Viereck bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

16. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 160831:

Uwe hatte zum Einkauf genau 41 Mark bei sich, ausnahmslos in gültigen Münzen der DDR. Darunter befand sich keine Münze mit einem geringeren Wert als 1 Mark. Bei seinem Einkauf hatte Uwe nun genau 31 Mark zu bezahlen. Dabei stellte er fest, daß er diese Summe nicht "passend" hatte, also nicht ohne zu wechseln bezahlen konnte.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche Anzahlen der Münzen einer jeden Sorte (zu 1 M, 2 M, 5 M, 10 M, 20 M) Uwe hiernach bei sich haben konnte!

Aufgabe 160832:

Einem Kreis mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r sei ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ derart umbeschrieben, daß jede der Trapezseiten den Kreis berührt.

Beweise, daß dann $\overline{\sphericalangle BMC} = 90°$ ist!

Aufgabe 160833:

In einem allseitig geschlossenen quaderförmigen Glaskasten befinden sich genau $600\,\text{cm}^3$ Wasser. Legt man den Kasten nacheinander mit seinen verschiedenen Außenflächen auf eine horizontale Ebene, so ergibt sich für die Wasserhöhe im Kasten einmal 2 cm, einmal 3 cm und einmal 4 cm.

Ermittle diejenigen Werte für das Fassungsvermögen des Kastens, die diesen Angaben entsprechen!

Bemerkung: Der Wasserspiegel sei als Teil einer horizontalen Ebene angenommen, die Adhäsion werde vernachlässigt.

Aufgabe 160834:

Fritz behauptet: Zwei zweistellige Zahlen, die durch Vertauschen der Ziffern auseinander hervorgehen (z.B. 72 und 27), kann man nach der folgenden Vorschrift miteinander multiplizieren, die am Beispiel der beiden genannten Zahlen dargelegt werden soll:

(1) Man berechnet das Produkt der beiden Ziffern $7 \cdot 2 = 14$

(2) Man schreibt die erhaltene Zahl zweimal hintereinander auf
(Hinweis: War die in (1) erhaltene Zahl einstellig, so schreibt man
zwischen die beiden Zahlen noch eine Ziffer Null.) 1414

(3) Man addiert die Quadratzahlen der beiden Ziffern $49 + 4 = 53$

(4) Man hängt an das Ergebnis eine Null an 530

(5) Man addiert die Ergebnisse der Rechenschritte (2) und (4)

und erhält damit das gesuchte Produkt $1\,414 + 530 = 1\,944$

Beweise die Richtigkeit dieser Behauptung!

Aufgabe 160835:

Gegeben sei ein spitzer Winkel; sein Scheitel sei der Punkt S, seine Schenkel seien die Strahlen a und b; seine Winkelhalbierende sei der Strahl w. Gegeben sei ferner ein auf w gelegener Punkt $P \neq S$.

Konstruiere einen Kreis k, der a und b berührt und durch P geht!

Beschreibe und begründe Deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die genannten Bedingungen ein Kreis eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 160836:

Gegeben seien eine Länge r und eine Länge $a \leq 2r$. Auf einem Kreis k mit dem Radius r seien A und B zwei Punkte, deren Abstand a beträgt. Weiterhin seien mit P_1 und P_2 zwei solche Punkte von k bezeichnet, die auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und B liegen.

a) Gesucht sind unter allen diesen Punkten P_1 und P_2 solche, für die der Flächeninhalt des Vierecks AP_1BP_2 am größten ist. Beweise, daß es solche Punkte gibt, und ermittle ihre Lage auf k.

b) Ermittle den entstehenden größtmöglichen Flächeninhalt unter allen Vierecken AP_1BP_2!

17. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170811:
Der Preis einer Ware (100 M) wurde in drei hintereinander liegenden Jahren um jeweils 5% gesenkt.

a) Wieviel Prozent des Anfangspreises müßte eine einmalige Preissenkung betragen, wenn derselbe Endpreis erreicht werden sollte?

b) Wieviel Prozent des Endpreises beträgt der Anfangspreis der Ware?

Die Prozentangaben sind auf 2 Dezimalen genau zu runden.

Aufgabe 170812:
Sechs quaderförmige Stücke Wandtafelkreide, jedes mit den Kantenlängen 8 cm, 1 cm, 1 cm sollen derart hingelegt oder aufgestellt werden, daß jedes Stück alle fünf anderen berührt.

Gib eine Lösung in Form einer Skizze an!

Aufgabe 170813:
Der Name eines bedeutenden Mathematikers wird mit fünf Buchstaben geschrieben. Den Buchstaben A, B, C, ..., Y, Z des Alphabets seien in dieser Reihenfolge die Zahlen 1, 2, 3, ..., 25, 26 zugeordnet. Setzt man für die Buchstaben des erwähnten Namens die ihnen zugeordneten Zahlen ein, so beträgt die Summe der

(1) dem ersten und zweiten Buchstaben zugeordneten Zahlen 26,

(2) dem ersten und dritten Buchstaben zugeordneten Zahlen 17,

(3) dem ersten und vierten Buchstaben zugeordneten Zahlen 10,

(4) dem ersten und fünften Buchstaben zugeordneten Zahlen 23,

(5) allen fünf Buchstaben zugeordneten Zahlen 61.

Ermittle den Namen dieses Mathematikers!

Aufgabe 170814:
Jens behauptet, es sei möglich, jedes beliebige Dreieck ABC in zwei kongruente Dreiecke zu zerlegen. Uwe dagegen meint, daß nur für spezielle Dreiecke eine derartige Zerlegung möglich sei.

Untersuche, wer von den beiden recht hat!

17. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170821:

Vier Schüler, Anja, Birgit, Christoph und Dirk, spielten folgendes Spiel, dessen Regeln ihnen allen bekannt sind:

Einer von ihnen, z.B. Dirk, verläßt das Zimmer. Nun nimmt eine der Personen Anja, Birgit oder Christoph einen vereinbarten Gegenstand, etwa einen Fingerhut, an sich, und Dirk wird wieder hereingerufen. Er erhält dann von den Mitspielern Aussagen mitgeteilt, wobei genau derjenige eine falsche Aussage macht, der den Fingerhut bei sich hat.

Bei einer Durchführung dieses Spiels lauteten die Aussagen:

Anja:	Ich habe den Fingerhut nicht, und Christoph hat den Fingerhut.
Birgit:	Anja hat den Fingerhut, und ich habe den Fingerhut nicht.
Christoph:	Ich habe den Fingerhut nicht.

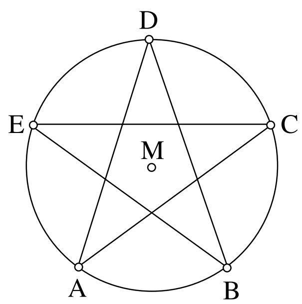
Untersuche, ob mit Hilfe dieser Aussagen eindeutig feststeht, welcher Spieler den Fingerhut genommen hatte! Ist dies der Fall, so ermittle diesen Spieler!

Aufgabe 170822:

Beweise folgenden Satz:

> Jede Strecke, die zwei Punkte paralleler Seiten eines Parallelogramms miteinander verbindet und durch den Schnittpunkt der Diagonalen geht, wird von diesem Schnittpunkt halbiert.

Aufgabe 170823:



Die Abbildung zeigt einen fünfstrahligen Stern, dessen Spitzen A, B, C, D, E Eckpunkte eines regelmäßigen Fünfecks sind.

Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle ADB$!

Aufgabe 170824:

Dieter erzählt seinen Klassenkameraden:

> "Mein Bruder Fritz ist nur halb so alt wie ich. Wenn man die Anzahl seiner Lebensjahre mit sich selbst multipliziert, erhält man das Alter meines Vaters. Meine Mutter ist drei Jahre jünger als mein Vater. Alle zusammen sind wir 87 Jahre alt."

Ermittle das Alter aller 4 Personen! (Es sind jeweils nur die vollendeten Lebensjahre zu berücksichtigen.)

17. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 170831:
Es ist zu beweisen:

> Wenn der Winkel $\sphericalangle CBA$ eines Dreiecks ABC die Größe 30° hat, dann hat die Seite AC des Dreiecks ABC die gleiche Länge wie der Radius des Umkreises k dieses Dreiecks!

Aufgabe 170832:
Gegeben seien ein Punkt S und zwei von S ausgehende Strahlen a und b, die miteinander einen spitzen Winkel bilden.

Konstruiere im Innern dieses Winkels einen Punkt P, der folgenden Bedingungen entspricht:

(1) P hat von a den doppelten Abstand wie von b.

(2) Die Länge der Strecke SP beträgt $5,0$ cm.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Stelle fest, ob durch die Bedingungen der Aufgabe ein Punkt P eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 170833:
Die gebrochene Zahl $\frac{9}{91}$ soll als Differenz zweier positiver echter Brüche mit den Nennern 7 und 13 dargestellt werden.

Untersuche, ob es eine solche Darstellung gibt, ob es mehr als eine gibt, und ermittle alle derartigen Darstellungen!

Aufgabe 170834:
Eine Pioniergruppe sammelte Altpapier; der gesamte Erlös wurde auf das Solidaritätskonto überwiesen. Die Pioniere bildeten zwei Brigaden, jeder Pionier der Gruppe gehörte genau einer dieser Brigaden an. Über das Sammelergebnis ist folgendes bekannt:

(1) Jeder Pionier der Brigade A sammelte genau 13 kg, außer einem, der nur 6 kg mitbrachte.

(2) Jeder Pionier der Brigade B sammelte genau 10 kg, außer einem mit nur genau 5 kg.

(3) Brigade A sammelte insgesamt die gleiche Menge wie Brigade B.

(4) Die gesamte Pioniergruppe sammelte mehr als 100 kg, jedoch weniger als 600 kg Altpapier.

a) Wieviel Pioniere gehörten einer jeden Brigade insgesamt an?

b) Wieviel Mark konnte die Pioniergruppe auf das Solidaritätskonto überweisen, wenn der Altstoffhandel 0,15 Mark pro kg Altpapier bezahlte?

Aufgabe 170835:

Man ermittle alle geordneten Tripel $[P_1; P_2; P_3]$ von Primzahlen P_1, P_2, P_3 mit $P_2 > P_3$, die der Gleichung

$$P_1 (P_2 + P_3) = 165 \tag{1}$$

genügen!

Aufgabe 170836:

Zwei Platten von gleicher Dicke bestehen aus Eichenholz bzw. Stahl. Der Flächeninhalt der Grundfläche der Eichenplatte ist um 20% größer als der Flächeninhalt der Grundfläche der Stahlplatte. Die Dichte des Eichenholzes verhält sich zur Dichte des Stahls wie 1 : 10.

Ermittle, um wie viel Prozent die Masse der Stahlplatte größer als die Masse der Eichenplatte ist!

18. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180811:

Die FDJler Arnim, Bertram, Christian, Dieter, Ernst und Fritz waren Teilnehmer an einem 400-m-Lauf. Keine zwei von ihnen liefen zur gleichen Zeit durchs Ziel.

Vorher waren folgende drei Voraussagen über das Ergebnis des Wettkampfes gemacht worden (jeder Teilnehmer wird mit dem Anfangsbuchstaben seines Vornamens bezeichnet):

Platz	1.	2.	3.	4.	5.	6.
1. Voraussage	A	B	C	D	E	F
2. Voraussage	A	C	B	F	E	D
3. Voraussage	C	E	F	A	D	B

Nach Abschluß des Laufes zeigte sich, daß in der ersten Voraussage für genau drei Läufer die von ihnen erreichten Plätze richtig angegeben waren. Keine zwei dieser drei Plätze waren zueinander benachbart. Bei der 2. Voraussage war für keinen Läufer der erreichte Platz richtig angegeben. Bei der dritten Voraussage war für einen Platz derjenige Läufer richtig angegeben, der diesen Platz erreichte.

Gib alle Möglichkeiten für die von den Läufern unter diesen Bedingungen erreichten Platzreihenfolgen an!

Aufgabe 180812:

Über das Ergebnis einer Klassenarbeit ist folgendes bekannt:

- Es nahmen daran mehr als 20 und weniger als 40 Schüler teil.
- Das arithmetische Mittel aller Zensuren, die die Schüler in dieser Klassenarbeit erreichten, betrug 2,3125.
- Kein Schüler erhielt bei dieser Arbeit die Note "5".
- Die Anzahl der "Zweien" war eine ungerade Zahl und größer als 12.
- Die Anzahl der "Dreien" war genau so groß wie die der "Zweien".

a) Ermittle die Anzahl der Schüler, die an dieser Klassenarbeit teilnahmen!

b) Wie viele von ihnen erhielten hierbei die Note "1"?

Aufgabe 180813:

Gegeben sei eine dreiseitige Pyramide $ABCS$, deren Grundfläche ABC ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 4 cm bildet und deren Spitze S so gelegen ist, daß das Lot von S auf die Ebene durch A, B, C den Schwerpunkt F der Grundfläche als Fußpunkt besitzt und daß FS die Länge 6 cm hat.

Diese Pyramide ist in einer Zweitafelprojektion darzustellen. Dabei wird gefordert, daß die Seitenfläche ABS in der Grundrißtafel liegt. Zu konstruieren ist die Abbildung nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal aus den gegebenen Streckenlängen 4 cm, 6 cm.

Bemerkung: Beschreibung und Begründung der Konstruktion werden nicht verlangt. Man kann z.B. die geforderte Abbildung aus einer anderen Darstellung gewinnen, in der das gleichseitige Dreieck ABC in der Grundrißtafel liegt.

Aufgabe 180814:

Gegeben sei ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse AB, dessen Innenwinkel $\sphericalangle CAB$ die Größe $60°$ hat.

Fälle von C aus das Lot CD auf AB, danach von D aus die Lote DE und DF auf AC bzw. BC sowie von F das Lot FH auf AB!

Weise nach, daß $\overline{HB} = \overline{HA} + \overline{AE}$ ist!

18. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180821:

Über vier Schüler mit den Vornamen Alfred, Benno, Detlev, Egon und den Nachnamen Ampler, Baumbach, Dürer, Erbe werden folgende Angaben gemacht:

(1) Egon ist jünger als Benno, aber älter als Alfred.

(2) Detlev ist älter als Alfred, aber jünger als Benno.

(3) Der Schüler Dürer ist älter als der Schüler Erbe, aber jünger als der Schüler Ampler.

(4) Der Schüler Baumbach ist älter als der Schüler Dürer, aber jünger als Benno.

(5) Genau einer dieser vier Schüler hat einen Vornamen, der mit dem gleichen Buchstaben beginnt wie sein Familienname.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutige Antworten auf die folgenden Fragen (a), (b) beweisen lassen! Wenn dies der Fall ist, ermittle die Antworten!

(a) Wie heißen die vier Schüler mit Vor- und Familiennamen?

(b) Wie lautet die Reihenfolge der Schüler nach ihrem Alter, beginnend mit dem jüngsten Schüler?

Aufgabe 180822:

Man ermittle die Größen der Innenwinkel eines Dreiecks ABC, auf dessen Außenwinkel folgende Aussage zutrifft:

Einer der Außenwinkel mit dem Scheitel A sei um $16°$ größer, einer der Außenwinkel mit dem Scheitel B sei um $49°$ kleiner als einer der Außenwinkel bei C.

Aufgabe 180823:

Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen mit folgender Eigenschaft:

Addiert man 2 zu der gesuchten Zahl, so erhält man das Dreifache derjenigen Zahl, die durch Vertauschen der Ziffern der Ausgangszahl entsteht.

Aufgabe 180824:

Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$. Mit $\overline{AB}$ als Radius sei um A ein Kreis gezeichnet. Dieser schneide die Diagonale AC in E. Die in E an den Kreis gelegte Tangente schneide die Seite BC in F.

Beweise, daß die Strecken CE, EF und FB gleich lang sind!

18. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 180831:

Im Inneren eines spitzwinkligen Dreiecks ABC, dessen Innenwinkel die Größen α, β, γ haben, sei ein Punkt P so gelegen, daß $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$ gilt. Die Größen der Winkel $\sphericalangle PAB$, $\sphericalangle PAB$ bzw. $\sphericalangle PAC$ seien mit δ, ϵ bzw. η bezeichnet.

a) Berechne δ, ϵ und η für den Fall, daß $\alpha = 70°$ und $\beta = 80°$ gilt!

b) Ermittle eine Formel für δ in Abhängigkeit von α, β und γ, ebenso eine Formel für ϵ und eine Formel für η!

Aufgabe 180832:

Von einem Dreieck ABC wird gefordert, daß für die Länge a der Seite BC, die Länge c der Seite AB, die Länge w_α der Halbierenden des Winkels $\sphericalangle BAC$ und für die Größe β des Winkels $\sphericalangle ABC$ die Beziehungen $a : c = 2 : 3$; $w_\alpha = 6$ cm; $\beta = 35°$ gelten.

a) Konstruiere ein solches Dreieck, und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise, daß jedes so konstruierte Dreieck die gestellten Forderungen erfüllt! Eine Analysis und eine Determination werden nicht verlangt.

Aufgabe 180833:

Jürgen ist im Ferienlager und will für seine Gruppe Brause zu 0,21 M je Flasche einkaufen. Er nimmt kein Bargeld, sondern nur leere Flaschen mit. Für das eingelöste Pfandgeld (0,30 M für jede der leere Flaschen) kauft er möglichst viele Flaschen Brause, wobei er für jede volle Flasche außer dem Preis von 0,21 M auch 0,30 M Pfand zu zahlen hat. Es stellt sich heraus, daß er sieben Flaschen weniger erhält, als er abgegeben hat. Außerdem bekommt er noch Geld zurück.

Ermittle alle Möglichkeiten, wie viele leere Flaschen Jürgen mitgenommen haben könnte und wie viel Geld er dann zurückerhielt!

Aufgabe 180834:

Beweise folgenden Satz:

Ist p eine Primzahl größer als 3, so ist die Zahl $(p-1)(p+1)$ durch 24 teilbar.

Aufgabe 180835:

Zum Experimentieren wird eine 30%ige Salzlösung benötigt. Vorhanden sind aber lediglich 2 Liter 10%iger Salzlösung sowie eine Flasche mit 42%iger Salzlösung.

Ermittle, wie viel Liter 42%iger Salzlösung den 2 Litern 10%iger Salzlösung zuzusetzen sind, damit eine 30%ige Salzlösung entsteht!

Aufgabe 180836:

Es sei ΔABC ein spitzwinkliges Dreieck, d die Länge des Durchmessers seines Umkreises, a bzw. b die Längen der Seiten BC bzw. AC und schließlich h die Länge der auf AB senkrecht stehenden Höhe.

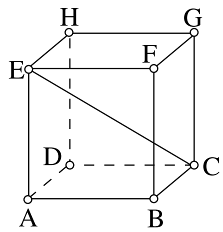
Beweise, daß dann stets $d = \frac{a \cdot b}{h}$ gilt!

19. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190811:

Gegeben sei ein Würfel $ABCDEFGH$ mit der Kantenlänge 5 cm (siehe Bild). Dieser Würfel ist in senkrechter Zweitafelprojektion abzubilden. Dabei wird gefordert, daß die Raumdiagonale EC parallel zur Grundrißtafel und senkrecht zur Aufrißtafel liegt. Unter Beachtung dieser Forderung kann die Lage des Würfels im Raum sonst beliebig gewählt werden. Alle Eckpunkte sind entsprechend dem Bilde zu benennen.



Beschreibung und Begründung der Konsruktion sind nicht erforderlich.

Aufgabe 190812:

Aus den Ziffern 0, 1, ..., 9 seien genau sieben ausgewählt, von denen keine zwei einander gleich sind.

Ermittle die Anzahl derjenigen (im dekadischen System) siebenstelligen Zahlen, die in ihrer (dekadischen) Zifferndarstellung jede der ausgewählten Ziffern enthalten!

Dabei werde

a) vorausgesetzt, daß die 0 nicht unter den ausgewählten Ziffern vorkommt,

b) vorausgesetzt, daß die 0 unter den ausgewählten Ziffern vorkommt.

Aufgabe 190813:

Gegeben seien die vier periodischen Dezimalbrüche

$$p = 0,\overline{3456}..., \qquad q = 0,3\overline{456}..., \qquad r = 0,34\overline{56}..., \qquad s = 0,345\overline{6}.$$

a) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, für die folgende Aussage gilt: In der n-ten Stelle nach dem Komma haben alle vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer.

b) Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen m, für die folgende Aussage gilt: In der m-ten Stelle nach dem Komma haben keine zwei der vier Dezimalbrüche p, q, r, s dieselbe Ziffer!

Aufgabe 190814:

Von zwei Kreisen werde vorausgesetzt, daß sie sich von außen in einem Punkt P berühren. Die Gerade, die beide Kreise in P berührt, sei t. Ferner sei s eine weitere gemeinsame Tangente beider Kreise; sie berühre diese in den Punkten Q bzw. R. Der Schnittpunkt von s mit t sei S.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen S der Mittelpunkt der Strecken QR ist!

19. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190821:

Eine Gruppe von 39 Schülern unterhält sich über ihre Zensuren in den Fächern Mathematik, Russisch und Deutsch. Dabei wird festgestellt:

(1) Genau 11 Schüler haben in Mathematik die Zensur 2.

(2) Genau 19 Schüler haben in Russisch die Zensur 2.

(3) Genau 23 Schüler haben in Deutsch die Zensur 2.

(4) Genau ein Schüler hat in allen drei Fächern die Zensur 2.

(5) Genau 4 Schüler haben in Mathematik und Deutsch, aber nicht in Russisch eine "2".

(6) Genau 7 Schüler haben in Russisch und Deutsch, aber nicht in Mathematik eine "2".

(7) Genau 2 Schüler haben in Mathematik und Russisch, aber nicht in Deutsch eine "2".

Ermittle aus diesen Angaben, wieviel Schüler dieser Gruppe in genau einem und wieviel in keinem der angegebenen Fächer die Zensur 2 haben!

Aufgabe 190822:

In einer AG Mathematik stellte ein Mitglied der Patenbrigade den Teilnehmern folgende Aufgabe:

> "Unsere Brigade hat mehr als 20, aber weniger als 35 Mitglieder. Von ihnen nahmen im letzten Jahr im Juli dreimal soviel, im Februar doppelt soviel ihren Jahresurlaub wie im Mai. Im Januar nahmen drei Personen weniger als im Juli Urlaub, im August dagegen eine Person mehr als im Mai. In den nicht genannten Monaten dieses Jahres nahm kein Mitglied unserer Brigade Urlaub. Unter den genannten Urlaubern ist jedes Mitglied unserer Brigade genau einmal vertreten.
>
> Stellt fest, ob ihr allein aus diesen Angaben die Anzahl unserer Brigademitglieder ermitteln könnt!"

Aufgabe 190823:

In einem Parallelogramm $ABCD$ sei P ein beliebiger Punkt auf der Diagonalen AC ($P \neq A$, $P \neq C$). Die Parallele durch P zu AB schneide BC in H und AD in G; die Parallele durch P zu BC schneide AB in E und CD in F.

Beweise, daß die beiden Parallelogramme $EBHP$ und $GPFD$ den gleichen Flächeninhalt haben!

Aufgabe 190824:

Klaus sagt:

> ”Ich denke mir drei natürliche Zahlen. Die zweite Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der ersten Zahl. Die dritte Zahl ist um 2 größer als die Hälfte der zweiten Zahl. Das Produkt der drei gedachten Zahlen beträgt 1 120.
>
> Welche Zahl habe ich mir als erste gedacht, welche als zweite und welche als dritte ?”

Kann diese Frage eindeutig beantwortet werden? Wenn das der Fall ist, so nenne die drei gedachten Zahlen!

19. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 190831:
Klaus erzählt:

> "Als ich kürzlich einkaufte, hatte ich genau drei Münzen bei mir. Beim Bezahlen stellte ich folgendes fest. Wenn ich zwei meiner Münzen hingebe, so fehlen noch 3,50 M bis zum vollen Preis der gekauften Ware, lege ich aber nur die übrige Münze hin, so erhalte ich 3,50 M zurück"

Ermittle aus diesen Angaben alle Möglichkeiten dafür, wieviel Münzen welcher Sorte Klaus bei sich gehabt hat! Dabei sind nur 1, 5, 10, 20, und 50 Pf. sowie 1, 2, 5, 10 und 20 Mark zu berücksichtigen.

Aufgabe 190832:
Gegeben seien ein Punkt M sowie ein Kreis k mit M als Mittelpunkt. Gesucht ist ein Quadrat $ABCD$, das folgende Eigenschaften hat:

(1) Die Eckpunkte A und D liegen auf der Kreislinie k.

(2) Die Quadratseite BC berührt den Kreis k in einem Punkt P, der zwischen B und C liegt.

Begründe und beschreibe eine Konstruktion, die (ausgehend von dem gegebenen Kreis k) zu einem Quadrat mit diesen Eigenschaften führt! Untersuche, ob es (zu gegebenen k) bis auf Kongruenz genau ein solches Quadrat gibt!

Aufgabe 190833:
Gegeben sei ein Quadrat $ABCD$ mit der Seitenlänge a.

Eine Parallele zu AB schneide die Seiten BC und AD in den Punkten E bzw. F, eine Parallele zu BC schneide AB und EF in den Punkten G bzw. H, und eine Parallele zu AB schneide die Strecken BE und GH in den Punkten J bzw. K.

a) Ermittle den Umfang des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, daß die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander flächeninhaltsgleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Rechtecks $KJEH$ in Abhängigkeit von a unter der Bedingung, daß die Rechtecke $AGHF$, $GBJK$, $KJEH$ und $FECD$ untereinander umfangsgleich sind!

Aufgabe 190834:
Beweise, daß das Produkt dreier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, vermehrt um die mittlere Zahl, stets die dritte Potenz der mittleren Zahl ergibt!

Aufgabe 190835:

Es sei EG ein Durchmesser eines Kreises k. Die in E und G an k gelegten Tangenten seien t bzw. t'. Auf t sei eine Strecke AB so gelegen, daß E ihr Mittelpunkt ist. Die von A und B aus an k gelegten (und von t verschiedenen) Tangenten mögen t' in D bzw. C schneiden. Der Radius von k sei r; die Längen von AB bzw. CD seien a bzw. c.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die Gleichung $r^2 = \frac{ac}{4}$ gilt!

Aufgabe 190836:

Ein Taxifahrer hatte den Auftrag, um 15.00 Uhr einen Gast vom Bahnhof abzuholen. Bei einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 50 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ hätte er sein Ziel pünktlich erreicht. Auf Grund ungünstiger Verkehrsverhältnisse konnte er jedoch nur mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 30 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fahren und kam deshalb erst um 15.10 Uhr am Bahnhof an.

a) Berechne die Länge des Weges, den der Fahrer bis zum Bahnhof zurückgelegt hat!

b) Berechne die Zeit, die der Fahrer bis zum Bahnhof benötigte!

20. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

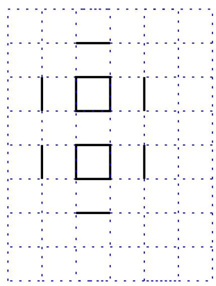
Aufgabe 200811:

Im Bild sind die Buchstaben so durch Ziffern zu ersetzen, daß alle waagerecht und senkrecht zu lesenden Aufgaben richtig gerechnet sind. Dabei sind gleiche Buchstaben durch gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern zu ersetzen. Eine Begründung wird nicht verlangt;

$$\begin{array}{cccccccccc}
a & a & c & - & d & e & = & f & f & e \\
 & : & & & & + & & & - & \\
 & g & b & * & g & f & = & d & b & a \\
\hline
 & h & e & + & i & g & = & k & g & f
\end{array}$$

Aufgabe 200812:

Ulrike fertigt gern Stickarbeiten an.



In der Mitte eines kleinen Deckchens möchte sie ein Muster erhalten, das im Bild zur größeren Deutlichkeit auf quadratisch angeordneten Gitterlinien gezeichnet wurde.

Ulrike will bei der Herstellung dieses Musters den Stoff bei jedem Nadelstich genau in einem Kreuzungspunkt von Gitterlinien durchstechen und dann den Faden so weiterführen, daß der Stoff beim nächsten Mal in einem Kreuzungspunkt durchstochen wird, der von dem vorangehenden mindestens den im Bild angegebenen Abstand a hat. Auf diese Weise soll das Muster mit einem einzigen Faden hergestellt werden, und dieser soll so kurz wie möglich sein.

Zeichne eine Möglichkeit für die zu durchstechenden Kreuzungspunkte und ihre Reihenfolge sowie für den Verlauf des Fadens auf Vorder- und Rückseite des Deckchens! Begründe, daß eine kürzere Fadenführung nicht möglich ist!

Aufgabe 200813:

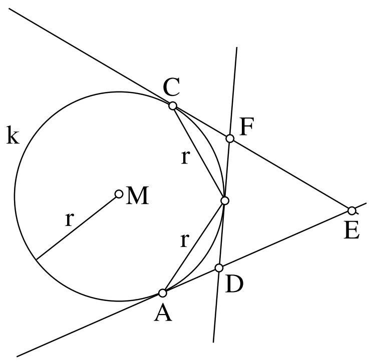
Ein Vater, der von seinen Söhnen Fritz und Heinz begleitet wurde, kaufte sich im Warenhaus einen Anzug, der mit einem Schild folgenden Inhalts versehen war: "im Preis um 20% herabgesetzt."

Auf dem Heimweg sagte Heinz: "Vati, da hast du 25% des von dir gezahlten Preises eingespart." Fritz, der diese Bemerkung bezweifelte, fragte den Vater: "Stimmt das?".

Dieser erklärte ihm darauf: "Das stimmt. Wäre der Preis des Anzugs nur um 10% herabgesetzt worden, dann hätte ich allerdings nur $11\,\frac{1}{9}$% des von mir gezahlten Preises eingespart."

Beweise, daß diese Aussagen unabhängig von dem speziellen Wert des Preises vor der Preisherabsetzung wahr sind!

Aufgabe 200814:



Gegeben sei ein Kreis k mit dem Radius r. AB und BC seien zwei Sehnen der Länge r. In A, B und C seien die Tangenten an den Kreis gelegt. Diese ergeben Schnittpunkte D, E und F, wie im Bild angegeben.

Beweise aus diesen Voraussetzungen, daß das Dreieck DEF gleichseitig ist!

20. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200821:

Herr Schäfer hatte sich zwei Hunde gekauft. Er mußte sie aber bald wieder verkaufen. Dabei erhielt er für jeden Hund 180 Mark.

Wie Herr Schäfer feststellte, hatte er damit an dem einen Hund 20% von dessen früherem Kaufpreis dazugewonnen, während er den anderen Hund mit 20% Verlust von dessen früherem Kaufpreis weiterverkauft hatte.

Untersuche, ob sich hiernach für Herrn Schäfer insgesamt beim Verkauf beider Hunde ein Gewinn oder ein Verlust gegenüber dem gesamten früheren Kaufpreis ergeben hat! Wenn dies der Fall ist, so ermittle, wieviel der Gewinn bzw. Verlust beträgt!

Aufgabe 200822:

Ermittle alle Paare $(a; b)$ natürlicher Zahlen mit $a < b$, die folgende Eigenschaften besitzen:

> Die Summe der Zahlen a und b beträgt 192.
> Der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b ist 24.

Aufgabe 200823:

Gegeben sei ein Halbkreis mit dem Durchmesser AB und dem Mittelpunkt M. Ferner seien P und Q zwei von A und B und voneinander verschiedene Punkte auf diesem Halbkreis. Die in P und Q auf der Geraden durch P und Q errichteten Senkrechten mögen AB in R bzw. in S schneiden.

Beweise, daß dann $\overline{RM} = \overline{SM}$ gilt!

Aufgabe 200824:

Von einem Dreieck ABC und einer Geraden g werde vorausgesetzt:

(1) Es gilt $\overline{AB} = \overline{AC}$.

(2) Die Gerade g schneidet die Strecke BC in einem Punkt F, die Strecke AC in einem Punkt E und die Verlängerung der Strecke BA über A hinaus in einem Punkt D.

(3) Es gilt $\overline{CE} = \overline{CF}$.

(4) Der Winkel $\sphericalangle EDA$ hat die Größe 18°.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe α des Winkels $\sphericalangle ABC$, die Größe β des Winkels $\sphericalangle EFC$ sowie die Größe γ des Winkels $\sphericalangle CAB$!

20. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 200831:

Uwe erzählt:

> ”In den Winterferien machten wir mit einer Reisegesellschaft eine Fahrt in den Harz. Daran nahmen nicht mehr als 80 Personen teil, und zwar waren es genau 3 Männer weniger als Frauen und genau 20 Erwachsene mehr als Kinder. Unterwegs wurden wir in genau 7 Gruppen von gleicher Personenzahl aufgeteilt.”

Ermittle alle Möglichkeiten, die Anzahlen der Männer, Frauen und Kinder so anzugeben, daß Uwes Aussagen zutreffen!

Aufgabe 200832:

Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit der Eigenschaft, daß das Produkt aus den einzelnen Ziffern von n gleich dem Fünffachen der Quersumme von n ist!

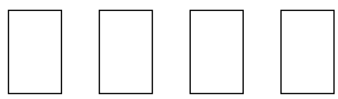
Aufgabe 200833:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $r = 4$ cm; $b = 6$ cm und $c = 7$ cm! Dabei seien r der Umkreisradius des Dreiecks und b, c die Längen der Seiten AC bzw. AB des Dreiecks ABC.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 200834:

Auf einem Tisch liegen vier Spielkarten mit der Bildseite nach unten. Sie sind von links nach rechts in einer Reihe angeordnet, mit gleichgroßen Abständen jeweils zwischen unmittelbar benachbarten Karten (siehe Abbildung).



Den Mitspielern werden folgende Angaben mitgeteilt: Die vier Karten sind ein Bube, eine Dame, ein König und ein As, jede Karte in einer der vier Farben Kreuz, Pik, Herz, Karo, wobei jede dieser Farben genau einmal vertreten ist. Ferner gilt:

(1) Die Dame ist weiter vom As entfernt als das As vom König.

(2) Der Bube liegt näher am As als der König.

(3) Von der Herzkarte bis zur Karokarte ist der Abstand geringer als von der Kreuzkarte bis zur Herzkarte.

(4) Die Karokarte liegt weiter entfernt von der Herzkarte als von der Pikkarte.

(5) Die Pikkarte liegt unmittelbar benachbart links neben der Dame.

Beweise, daß aus diesen Angaben eindeutig hervorgeht, um welche Karten es sich handelt und in welcher Reihenfolge von links nach rechts sie auf dem Tisch liegen!

Aufgabe 200835:

Zwei Strahlen s_1 und s_2, die von einem Punkt S ausgehen und miteinander einen rechten Winkel bilden, mögen von zwei zueinander parallelen Geraden g und h geschnitten werden. Die Gerade g schneide s_1 in A und s_2 in C, die Gerade h schneide s_1 in B und s_2 in D. Ferner gelte $\overline{SB} = 5\,\text{cm}$, und der Flächeninhalt des Dreiecks SAC betrage genau 36% des Flächeninhalts des Dreiecks SBD.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Länge der Strecke SA!

Aufgabe 200836:

Von zwei Dreiecken ABC_1 und ABC_2 werden die folgenden Eigenschaften (1), (2) und (3) vorausgesetzt:

(1) $\overline{\sphericalangle C_1AB} = \overline{\sphericalangle C_2AB}$,

(2) $\overline{BC_1} = \overline{BC_2}$,

(3) $\overline{AC_1} < \overline{AC_2}$.

Beweise aus dieser Voraussetzung, daß die Umkreise der Dreiecke ABC_1 und ABC_2 gleiche Radien haben!

21. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210811:

In nebenstehender Figur soll jedes Zeichen X durch eine der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so ersetzt werden, daß in der zweiten bis neunten Zeile jede Zahl gleich dem absoluten Betrag der Differenz der beiden darüberstehenden Zahlen ist!

```
X X X X X X X X X
 X X X X X X X X
  X X X X X X X
   X X X X X X
    X X X X X
     X X X X
      X X X
       X X
        X
```

Gib eine derartige Ersetzung an!

Aufgabe 210812:

Bei einem GST-Wettkampf im Luftgewehrschießen gaben Falk und Heiko je 5 Schuß ab. Auf den Scheiben wurden folgende Treffer ermittelt: Je genau einmal die 3, zweimal die 5, zweimal die 6, zweimal die 7, einmal die 8, einmal die 9, einmal die 10. Weiterhin ist bekannt:

(1) Falk erzielte mit seinen letzten vier Schüssen neunmal so viele Ringe wie mit seinem ersten Schuß.

(2) Falk schoß die 9.

Lassen sich nach diesen Angaben die folgenden beiden Fragen eindeutig beantworten?

a) Welcher der beiden Jungen erzielte das bessere Ergebnis?

b) Welcher der beiden Jungen schoß die 10?

Aufgabe 210813:

a) Beweise den folgenden Satz:

   Wenn alle vier Seiten eines Vierecks dieselbe Länge haben, dann stehen die Diagonalen des Vierecke aufeinander senkrecht.

b) Formuliere die Umkehrung dieses Satzes und untersuche, ob sie auch gilt!

Aufgabe 210814:

Einer Brigade der ausgezeichneten Qualität war der Auftrag erteilt worden, in möglichst kurzer Zeit eine gewisse Anzahl Meßgeräte fertigzustellen. Die Brigade bestand aus einem erfahrenen Arbeiter als Brigadier und neun jungen Arbeitern, die eben erst ihre Ausbildung beendet hatten.

Im Laufe eines Tages stellte jeder von den neun jungen Arbeiter 15 Geräte fertig, der Brigadier aber 9 Geräte mehr als jedes der zehn Brigademitglieder im Durchschnitt.

Wieviel Meßgeräte wurden insgesamt von der Brigade an diesem Arbeitstag fertiggestellt?

21. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

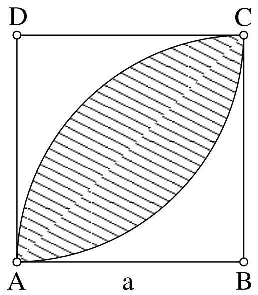
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210821:

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen a, für die $\frac{1}{4} < \frac{a}{a+12} < \frac{1}{3}$ gilt!

Aufgabe 210822:

Gegeben sei die Seitenlänge a eines Quadrates $ABCD$. Um B und D seien mit dem Radius a Kreisbögen gezeichnet, die in dem Quadrat $ABCD$ eine blattartige Figur (im Bild schraffiert) einschließen.



a) Berechne für $a = 3{,}5$ cm den Flächeninhalt der schraffierten Fläche!

b) Ermittle eine allgemeine Formel, die angibt, wie der Flächeninhalt der blattartigen Figur von der gegebenen Seitenlänge a abhängt!

Aufgabe 210823:

a) Beweise folgenden Satz:

Wenn ein Dreieck ABC gleichseitig ist, dann ist die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß wie die Summe der zugehörenden Innenwinkel.

b) Untersuche, ob auch die folgende Umkehrung des in a) genannten Satzes gilt: Wenn in einem Dreieck ABC die Summe irgend zweier zu verschiedenen Ecken gehörender Außenwinkel stets doppelt so groß ist wie die Summe der zugehörigen Innenwinkel, dann ist das Dreieck ABC gleichseitig.

Aufgabe 210824:

Über den Mitgliederstand einer Betriebssportgemeinschaft (BSG), in der genau fünf Sektionen bestehen, wurden folgende Angaben gemacht:

- Genau 22 Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Schach.
- Genau ein Drittel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Fußball.
- Genau ein Fünftel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Leichtathletik.
- Genau drei Siebentel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Tischtennis.
- Genau zwei Neuntel aller Mitglieder der BSG gehören zur Sektion Turnen.
- Genau 8 Mitglieder der BSG gehören zu je genau drei verschiedenen Sektionen.
- Genau 72 Mitglieder der BSG gehören zu mindestens zwei verschiedenen Sektionen.

- Kein Mitglied der BSG gehört mehr als drei Sektionen an, aber jedes Mitglied mindestens einer Sektion.

Untersuche, ob es eine Zusammenstellung von Mitgliederzahlen sowohl der gesamten BSG als auch der fünf einzelnen Sektionen gibt, so daß alle diese Aussagen zutreffen! Untersuche, ob diese Mitgliederzahlen durch die Aussagen eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib die Mitgliederzahlen an!

21. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 210831:

In dem Schema

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
A & B & B & C & - & D & C & E & = & F & B & E & G \\
 & & & : & & & & + & & & & & - \\
 & & C & D & \cdot & & H & E & = & J & D & A & F \\
\hline
 & J & F & K & + & D & D & A & = & J & J & F & C
\end{array}$$

sollen die Buchstaben so durch Ziffern (0, 1, 2, ... , 9) ersetzt werden, daß alle waagerechten und senkrechten Aufgaben richtig gerechnet sind. Insbesondere soll die Ziffer 0 nicht als Anfangsziffer einer mehrstelligen Zahl auftreten. Gleiche Buchstaben sollen durch gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben durch verschiedene Ziffern ersetzt werden.

Ermittle alle Ersetzungen, die diese Forderungen erfüllen!

Aufgabe 210832:

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Der Mittelpunkt der Seite AC sei M. Der Kreis k um M durch A schneide die Seite AB außer in A auch in E. Die Tangente an k in E schneide die Seite BC in D.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen das Dreieck BDE gleichschenklig ist!

Aufgabe 210833:

Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen $\overline{BC} = 4$ cm. Auf der Seite CB sei M_1 derjenige Punkt, für den $\overline{BM_1} = 3$ cm ist. Um M_1 sei der Kreis k_1 mit dem Radius 5, 5 cm gezeichnet.

Zu diesen gegebenen Stücken soll ein dem Dreieck ABC ähnliches Dreieck $A'B'C'$ konstruiert werden, dessen Eckpunkte sämtlich auf dem Kreis k_1 liegen.

Beschreibe eine Konstruktion eines solchen Dreiecks $A'B'C'$ und beweise, daß es die geforderten Eigenschaften hat, wenn es nach dieser Konstruktionsbeschreibung konstruiert wird!

Hinweis: Eine "Analyse" (Schlussfolgerung aus der Annahme, ein Dreieck $A'B'C'$ habe die verlangten Eigenschaften, zur Herleitung der Konstruktionsbeschreibung) und eine "Determination" (Diskussion auf Existenz und Eindeutigkeit der Konstruktion) werden nicht verlangt.

Aufgabe 210834:

Von einem Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$, dessen Diagonalenschnittpunkt S genannt sei, wird vorausgesetzt, daß $\overline{AB} = 2,5$ cm gilt.

Untersuche, ob bereits durch diese Voraussetzung das Verhältnis des Flächeninhaltes des Dreiecks ABS zu dem des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, so ermittle dieses Verhältnis!

Aufgabe 210835:

Jemand hebt von seinem Sparkonto einen bestimmten Geldbetrag ab. Er erhält diesen in insgesamt 29 Banknoten ausgezahlt, und zwar ausschließlich in Zehnmarkscheinen, Zwanzigmarkscheinen und Fünfzigmarkscheinen. Dabei ist die Anzahl der 10-M-Scheine um 1 kleiner als die Anzahl der 20-M-Scheine. Die Anzahl der 50-M-Scheine ist größer als das Zweifache, aber kleiner als das Dreifache der Anzahl der 20-M-Scheine.

Ermittle die Höhe des abgehobenen Geldbetrages!

Aufgabe 210836:

Ermittle alle sechsstelligen natürlichen Zahlen z mit folgender Eigenschaft:

Setzt man die erste Ziffer von z an die letzte Stelle, während die Ziffernfolge der übrigen fünf Ziffern unverändert bleibt, so ist die entstehende Zahl z' dreimal so groß wie die ursprüngliche Zahl z.

22. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220811:

Vier Männer heißen Bäcker, Fischer, Förster und Müller. Sie üben die Berufe Bäcker, Fischer, Förster und Müller aus, jeder genau einen dieser Berufe. Einer der vier Männer ist Bruder eines fünften Mannes, der Herr X genannt sei. (Er hat natürlich denselben Namen wie sein Bruder.) Über diese fünf Männer werden folgende Angaben gemacht:

(1) Auch Herr X übt genau einen Beruf aus, denselben wie Herr Bäcker.

(2) Herr X übt einen anderen Beruf aus als sein Bruder.

(3) Bei jedem der fünf Männer lautet der Anfangsbuchstabe seines Namens anders als der Anfangsbuchstabe seines Berufes.

a) Beweise, daß Herr X nach diesen Angaben nicht Bäcker heißen kann!

b) Beweise, daß sich aus den Angaben eindeutig ermitteln läßt, wie Herr X heißt und welche zwei Berufe Herr X und sein Bruder haben!

c) Beweise, daß sich aus den Angaben nicht eindeutig ermitteln läßt, welchen Beruf Herr X hat und wie derjenige der vier anderen Männer heißt, der von Beruf Bäcker ist!

Aufgabe 220812:

Von einer 22stelligen Zahl z werden folgende Eigenschaften gefordert:

z hat die Einerziffer 7; streicht man diese Endziffer und setzt sie vor die übrigen 21 Ziffern, so entsteht dasselbe Ergebnis wie bei der Multiplikation $7 \cdot z$.

Beweise, daß es genau eine solche Zahl z gibt! Ermittle diese Zahl!

Aufgabe 220813:

Eine NVA-Marschkolonne ist $3,2$ km lang. Ein Regulierungsposten fährt mit dem Krad vom Ende der Marschkolonne ab, holt die Spitze der Marschkolonne nach $5,6$ km Fahrt ein, fährt sofort mit gleichbleibender Geschwindigkeit genau 6 min lang weiter und hat dann seinen Genossen erreicht, der an der nächsten Straßenkreuzung steht, um den Gegenverkehr zu sperren. Hier wartet er auf die Marschkolonne, die während der gesamten Zeit ihre Durchschnittsgeschwindigkeit beibehalten hat.

a) Wie verhalten sich die Durchschnittsgeschwindigkeiten des Regulierungspostens und der Marschkolonne zueinander?

b) Wieviel Minuten muß der Regulierungsposten an der Kreuzung insgesamt auf die Spitze der Marschkolonne warten?

Aufgabe 220814:

In einer Ebene seien k_1 und k_2 zwei Kreise, die sich in einem Punkt A von außen berühren. Eine der gemeinsamen äußeren Tangenten von k_1 und k_2 berühre den Kreis k_1 in B, den Kreis k_2 in C.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\sphericalangle BAC$ ein rechter Winkel ist!

22. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220821:

Vor zwei Jahren unterhielten sich Anke, Birgit und Christine über ihre Reiseziele in den Sommerferien 1981 und 1982. In jedem Jahr wollte eine von ihnen an die Ostsee fahren, die andere in die Sächsische Schweiz und die dritte in den Thüringer Wald. Für beide Jahre wurden folgende Aussagen gemacht

(1) Anke fährt an die Ostsee.

(2) Christine fährt in den Thüringer Wald oder Anke fährt in die Sächsische Schweiz.

Später stellte sich heraus: Für das Jahr 1981 ist Aussage (1) wahr und Aussage (2) falsch; für das Jahr 1982 ist Aussage (1) falsch und Aussage (2) wahr.

Untersuche

a) für das Jahr 1981,

b) für das Jahr 1982,

für welche der drei Schülerinnen sich damit das Reiseziel eindeutig ermitteln läßt und für welche nicht! Nenne alle dabei eindeutig zu ermittelnden Reiseziele!

Hinweis: Eine Aussage der Form "A oder B" ist genau dann falsch, wenn sowohl A als auch B falsche Aussagen sind.

Aufgabe 220822:

In einer Umfrage beantworteten 50 Pioniere einer Schule die folgenden Fragen auf einer Fragenliste:

		Ja	Nein
(A)	Hast du in diesem Sommer an einem Betriebsferienlager teilgenommen?	o	o
(B)	Hast du in diesem Sommer an der Feriengestaltung der Schule teilgenommen?	o	o
(C)	Warst du in diesem Sommer mit deinen Eltern verreist?	o	o

Anschließend wurden die Antworten mehrfach ausgezählt. In einer ersten Zählung wurde bei allen Fragenlisten nur auf die Frage (A) geachtet. Diese hatten genau 20 Pioniere mit Ja beantwortet. Dann wurde in einer zweiten Zählung bei allen 50 Listen nur auf Frage (B) geachtet, usw., wie in der folgenden Tabelle angegeben:

Zählung Nr.	Gezählte Antworten	Erhaltene Anzahl
1	(A) Ja	20
2	(B) Ja	25
3	(C) Ja	30
4	(A) Ja und (B) Ja	8
5	(B) Ja und (C) Ja	12
6	(A) Ja und (C) Ja	10
7	(a) Ja und (B) Ja und (C) Ja	3

Aus diesen Zählungsergebnissen soll die Anzahl derjenigen Pioniere ermittelt werden, die

a) an keiner der drei Arten der Feriengestaltung teilnahmen,

b) an genau einer dieser Arten teilnahmen,

c) an einem Betriebsferienlager, aber nicht an der Feriengestaltung der Schule teilnahmen,

d) mindestens eine der Möglichkeiten nutzten, an einem Betriebsferienlager teilzunehmen oder mit den Eltern zu verreisen.

Trage die gesuchten Antworten in folgende Tabelle ein! Nenne die Rechnungen oder Überlegungen, mit denen du deine Antworten begründest!

Aufgabe	Gesuchte Antworten	Erhaltene Anzahl
a)	Keinmal Ja	
b)	Genau einmal Ja	
c)	(A) Ja und (B) Nein	
d)	(A) Ja oder (C) Ja oder beides	

Aufgabe 220823:

Beweise die folgende Aussage!

Wenn F der Flächeninhalt, u der Umfang und ρ der Inkreisradius eines Dreiecks sind, dann gilt $\rho = \frac{2F}{u}$.

Aufgabe 220824:

Von einem Parallelogramm werden die folgenden Eigenschaften (1) und (2) gefordert:

(1) Der Umfang des Parallelogramms beträgt 36 cm.

(2) Die Halbierende des Winkels $\sphericalangle BAD$ schneidet die Verlängerung der Seite BC über C hinaus in einem Punkt E, für den $\overline{CE} = 3$ cm gilt.

Beweise, daß die Seitenlängen $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$ des Parallelogramms durch die Forderungen (1), (2) eindeutig bestimmt sind! Ermittle diese Seitenlängen!

22. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 220831:

Cathrin fragt an einem Tag des Jahres 1981 ihren Großvater nach seinem Geburtsjahr. Der Großvater, ein Freund von Knobelaufgaben, antwortete:

> ”Ich bin älter als 65 Jahre, aber jünger als 100 Jahre. Die Jahreszahl meiner Geburt ist weder durch 2 noch durch 3 noch durch 5 teilbar. Der Rest, der bei der Division dieser Jahreszahl durch 60 entsteht, ist keine Primzahl.”

Untersuche, ob diese Angaben insgesamt für ein Geburtsjahr zutreffen können und ob sie das Geburtsjahr eindeutig festlegen! Wie lautet dann das Geburtsjahr des Großvaters?

Hinweis: Die Jahreszahl soll vollständig angegeben werden, also z. B. nicht 11 sondern 1911.

Aufgabe 220832:

a) Beweise, daß für $n = 2, 3, 4$ und 5 der folgende Satz gilt:

   Wenn q das arithmetische Mittel von n unmittelbar aufeinanderfolgenden ungeraden natürlichen Zahlen ist, dann ist q stets eine natürliche Zahl.

b) Ermittle unter den Zahlen $n = 2, 3, 4, 5$ alle diejenigen, für die das in a) genannte Mittel q stets eine gerade Zahl ist!

Aufgabe 220833:

Konstruiere ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel DC$ und den folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) aus $b = 6$ cm. Dabei sei b die Länge der Seite BC. Die geforderten Eigenschaften sind:

(1) Es gilt $\overline{AD} = \overline{BC}$.

(2) Es gilt $\overline{AB} : \overline{DC} = 2 : 1$.

(3) Die Kreise mit den Durchmessern AD und BC berühren einander.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebene Länge b ein Trapez mit den genannten Eigenschaften bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 220834:

Ein Hubschrauber startete um 4.30 Uhr in einer Stadt A und flog mit der Geschwindigkeit 250 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ zu einer Stadt B. Dort blieb er 30 Minuten und flog dann auf demselben Weg mit der Geschwindigkeit 200 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ nach A zurück, wo er an demselben Tag um 11.45 Uhr ankam.

Ermittle die Länge des Weges von A nach B!

Aufgabe 220835:

Der Zentriwinkel $\sphericalangle ASB$ eines Kreissektors s betrage 60°. In diesem Kreissektor sei derjenige Kreis k gezeichnet, der die Strecken AS, BS und den Bogen $\overset{\frown}{AB}$ von innen berührt.

Wieviel Prozent vom Flächeninhalt des Kreissektors s beträgt der Flächeninhalt des Kreises k?

Aufgabe 220836:

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Auf k seien Punkte A, B, C, D in dieser Reihenfolge so gelegen, daß folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(1) Die Sehnen AC und BD schneiden einander in einem von M verschiedenen Punkt S.

(2) Derjenige Teilbogen von A nach B, der C und D nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.

(3) Derjenige Teilbogen von C nach D, der A und B nicht enthält, ist kleiner als ein Halbkreis.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets

$$\overline{\sphericalangle ASD} = \frac{1}{2}\left(\overline{\sphericalangle AMB} + \overline{\sphericalangle CMD}\right) \qquad \text{gilt!}$$

23. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230811:

Ein quaderförmiger Holzblock hat eine Masse von 25 g.

Welche Masse hat ein quaderförmiger Holzblock gleicher Holzart mit den vierfachen Kantenlängen?

Aufgabe 230812:

Ermittle alle dreistelligen natürlichen Zahlen n mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Quersumme von n ist 17.

(2) Multipliziert man die erste Ziffer (d.h. die Hunderterziffer) von n mit 4, so erhält man eine zweistellige Zahl, und zwar gerade die aus den letzten beiden Ziffern von n gebildete Zahl.

Aufgabe 230813:

Auf einer $22,5$ km langen Straßenbahnstrecke sollen Wagenzüge während der Zeit von 8.00 Uhr bis 16.00 Uhr in beiden Richtungen in zehnminütigem Abstand verkehren, beginnend mit der Abfahrtzeit genau 8.00 Uhr an beiden Endhaltestellen. Die Durchschnittsgeschwindigkeit der Wagenzüge betrage 18 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Jeder Wagenzug, der an einer Endhaltestelle angekommen ist, soll bis zu seiner Abfahrt eine Pause einlegen, die mehr als 10 Minuten, aber weniger als 20 Minuten beträgt.

a) Wann hat der Wagenzug, der um 8.00 Uhr en einer Endhaltestelle abfuhr, dieselbe Endhaltestelle zum zweiten Mal zu verlassen?

b) Wieviel Wagenzüge sind ausreichend, um den geschilderten Verkehrsablauf einzuhalten?

c) Wieviel Zeit vergeht für einen Wagenzug, der sich auf der Fahrt von einer Endhaltestelle zur anderen befindet, durchschnittlich von einer Begegnung mit einem entgegenkommenden Wagenzug bis zur Begegnung mit dem nächsten entgegenkommenden Wagenzug?

Aufgabe 230814:

a) Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 12$ cm.

Gesucht sind drei Punkte F, Q, R, die so auf der Berandung dieses Quadrates liegen, daß die Strecken AP, AQ, AR das Quadrat in vier flächengleiche Teile zerlegen.

Gib solche Punkte P, Q, R an und weise nach, daß sie die geforderte Eigenschaft haben!

b) Ermittle entsprechend zwei Punkte S, T auf der Berandung des Quadrats $ABCD$, so daß die Strecken AS, AT dieses Quadrat in drei flächengleiche Teile zerlegen!

c) Untersuche die Möglichkeit einer entsprechenden Zerlegung eines Quadrats (mit der Seitenlänge a) in n flächengleiche Teile!

23. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230821:

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) Die aus den ersten beiden Ziffern von z in dieser Reihenfolge gebildete zweistellige Zahl ist eine Quadratzahl.

(2) Die aus der ersten und vierten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

(3) Die aus der zweiten und dritten Ziffer von z in dieser Reihenfolge gebildete Zahl ist ebenfalls eine Quadratzahl.

Hinweis: Unter der ersten Ziffer verstehen wir diejenige Ziffer von z, die an der Tausenderstelle steht.

Aufgabe 230822:

Eine Schulklasse wird so in Lernbrigaden aufgeteilt, daß die Anzahl der Mitglieder jeder Brigade um 2 größer ist als die Anzahl der Brigaden. Hätte man eine Brigade weniger gebildet, so hätte jede Brigade 2 Mitglieder mehr haben können.

Weise nach, daß man aus diesen Angaben die Anzahl der Schüler dieser Klasse eindeutig ermitteln kann, und gib diese Anzahl an!

Aufgabe 230823:

Es sei k ein Kreis mit dem Mittelpunkt M. Drei Punkte A, B und C auf k seien so gelegen, daß der Punkt M im Innern des Dreiecke ABC liegt. Ferner sei $\overline{\sphericalangle CAM} = 20°$ und $\overline{\sphericalangle AMB} = 120°$.

Ermittle aus diesen Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle CBM$!

Aufgabe 230824:

Es sei ABC ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über den Seiten AB, BC und AC seien Quadrate nach außen errichtet. Die Diagonalenschnittpunkte dieser Quadrate seien in dieser Reihenfolge mit D, B und F bezeichnet.

Beweise, daß der Flächeninhalt A_D des Dreiecks DEF gleich dem Flächeninhalt A_Q eines der Quadrate über AC bzw. BC ist!

23. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 230831:

Ein vollständig gefülltes Wasserbecken besitzt einen großen und einen kleinen Abflußhahn. Öffnet man nur den großen Hahn, so läuft das Becken in genau einer Stunde aus; öffnet man nur den kleinen Hahn, so ist das Becken in genau drei Stunden leer.

Nach welcher Zeit ist das Becken leer, wenn beide Hähne gleichzeitig geöffnet sind? Vorausgesetzt wird für jeden der beiden Hähne, daß aus ihm jeweils in gleich langen Zeiten gleich große Wassermengen entströmen.

Aufgabe 230832:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Der Mittelpunkt der Seite AD sei E. Auf der Strecke CE sei F derjenige Punkt, für den $\overline{CF} : \overline{FE} = 1 : 2$ gilt.

a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Flächeninhalte der Dreiecke BCF und AEF einander gleich sind!

b) Ermittle den Flächeninhalt des Dreiecks ABF in Abhängigkeit von a!

Aufgabe 230833:

Konstruiere ein Dreieck ABC aus $b = 7$ cm, $\rho = 2$ cm und $\gamma = 80°$! Dabei sei b die Länge der Seite AC, ρ der Radius des Inkreises des Dreiecks ABC, und γ sei die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle ACB$.

Beschreibe und begründe deine Konstruktion! Untersuche, ob durch die gegebenen Stücke ein Dreieck ABC bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 230834:

Ermittle die Anzahl aller derjenigen natürlichen Zahlen von 1 bis 1984, die durch 5, aber nicht durch 7 und nicht durch 11 teilbar sind!

Aufgabe 230835:

a) Zu einem gegebenen Kreis K werde dasjenige Quadrat Q betrachtet, das den gleichen Umfang wie K hat.

Ist der Flächeninhalt von Q größer, gleich oder kleiner als der Flächeninhalt von K? Wieviel Prozent des Flächeninhaltes von K beträgt der Flächeninhalt von Q?

b) Zu einem gegebenen Kreis k werde dasjenige Quadrat q betrachtet, das den gleichen Flächeninhalt wie k hat.

Ist der Umfang von q größer, gleich oder kleiner als der Umfang von k? Wieviel Prozent des Umfanges von k beträgt der Umfang von q?

Für π kann der auf 4 Dezimalen genaue Näherungswert $\pi \approx 3,1416$ verwendet werden. Die gesuchten Prozentsätze sind auf eine Dezimale nach dem Komma genau anzugeben.

Aufgabe 230836:

Über fünf Punkte A, B, C, D, M wird folgendes vorausgesetzt:

M ist der Mittelpunkt der Strecke AB;

die Punkte A, C, D, B liegen in dieser Reihenfolge auf einem Halbkreis über AB;

es gilt $AB \parallel CD$;

die Strecke MC schneidet die Strecke AD in einem Punkt E, für den $\overline{AC} = \overline{EC}$ gilt.

Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Größe des Winkels $\sphericalangle ACM$ eindeutig bestimmt ist! Ermittle diese Winkelgröße!

24. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240811:

An einer Schule wird in den Klassen 5 bis 10 eine Altstoffsammlung durchgeführt. Bei der anschließenden Auswertung für einen Wettbewerb zwischen den Klassenstufen wird folgendes festgestellt:

Die Schüler der Klassenstufe 9 sammelten Altstoffe im Wert von 42 M; ebensoviel sammelten die Schüler der Klassenstufe 10. Die Klassenstufe 8 erbrachte doppelt so viel wie die Klassen 9 und 10 zusammengenommen. Die Schüler der Klassenstufe 5 erreichten 21% des Gesamtergebnisses der Schule; die Klassenstufe 6 lieferte 30% des Gesamtergebnisses der Schule, und die Klassenstufe 7 erreichte 2% des Gesamtergebnisses der Schule weniger als die Klassenstufe 6.

Welchen Betrag hat nach diesen Feststellungen das Gesamtergebnis der Schule?

Aufgabe 240812:

Cathrin stellt ihren Mitschülern in der Arbeitsgemeinschaft "Mathematik" folgende Knobelaufgabe:

Eine Flasche und ein Glas wiegen zusammen so viel wie ein Krug. Die Flasche wiegt allein so viel wie das Glas zusammen mit einem Teller, während drei solcher Teller zusammen so viel wie zwei solcher Krüge wiegen. Wieviel solcher Gläser wiegen zusammen so viel wie die Flasche?

Aufgabe 240813:

Gesucht ist eine Zerlegung der Zahl 500 in vier Summanden, wobei folgende Bedingungen gefordert werden:

(1) Alle vier Summanden sind natürliche Zahlen.

(2) Wenn man zum ersten Summanden 4 addiert, so ergibt sich dasselbe Ergebnis, wie wenn man vom zweiten Summanden 4 subtrahiert. Ebenfalls dasselbe Ergebnis entsteht, wenn man den dritten Summanden mit 4 multipliziert, und auch dann, wenn man den vierten Summanden durch 4 dividiert.

Untersuche, ob es nur eine solche Zerlegung gibt! Ist dies der Fall, so ermittle sie und bestätige, daß sie die Eigenschaften (1), (2) hat!

Aufgabe 240814:

Aus drei kongruenten gleichschenklig-rechtwinkligen Dreiecken mit gegebener Schenkellänge a läßt sich ein Trapez zusammensetzen.

a) Zeichne ein solches Trapez!

b) Ein derartiges Trapez läßt sich in vier untereinander kongruente Trapeze zerlegen. Zeichne eine solche Zerlegung!

c) Ermittle die Länge der Parallelseiten, die Länge der Höhe und den Flächeninhalt eines dieser Teiltrapeze in Abhängigkeit von a!

24. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240821:
Klaus berichtet über alle Tage seines Aufenthaltes im Ferienlager:

(1) An jedem Vormittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.

(2) An jedem Nachmittag war das Wetter entweder durchgehend sonnig oder durchgehend regnerisch.

(3) An genau sieben Tagen kam regnerisches Wetter vor.

(4) Wenn es nachmittags regnete, war es vormittags sonnig.

(5) An genau fünf Nachmittagen war es sonnig.

(6) An genau sechs Vormittagen war es sonnig.

Stelle fest, ob sich aus diesen Angaben die Anzahl der Tage, die Klaus im Ferienlager war, eindeutig ermitteln läßt! Ist dies der Fall, so gibt diese Anzahl an! Gib ferner eine (nach den Angaben) mögliche Verteilung sonniger und regnerischer Vor- und Nachmittage an!

Aufgabe 240822:
Es sei ABC ein Dreieck; die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ betrage 30°.

Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich dem Umkreisradius r des Dreiecks ABC ist!

Aufgabe 240823:
Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen x, die die Ungleichung

$$\frac{11}{15} < \frac{7}{x} < \frac{15}{11} \quad \text{erfüllen!}$$

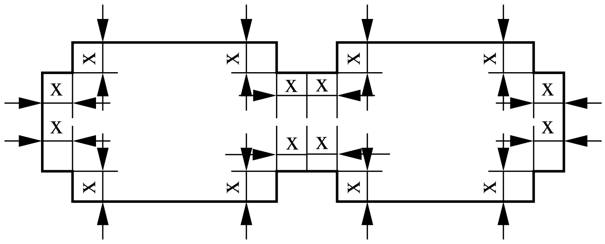
Aufgabe 240824:
Eine Blechtafel hat die in der Abbildung ersichtliche Gestalt, wobei a, b und x gegebene Längen sind. Die Tafel soll längs der gestrichelten Linie in zwei Teile zerlegt werden, und aus jedem Teil soll dann ein oben offener quaderförmiger Kasten der Höhe x hergestellt werden.

1. Berechne das Volumen eines solchen Kastens, wenn $a = 360\,\text{mm}$, $b = 120\,\text{mm}$, $x = 25\,\text{mm}$ gegeben sind!

2. Ermittle das Volumen eines solchen Kastens, dargestellt in Abhängigkeit von Variablen a, b und x, die (wegen ihrer Bedeutung als Längen) nur positive Werte annehmen können!

3. Es seien beliebige positive Werte a und b fest vorgegeben.

   Ermittle in Abhängigkeit von diesen a, b alle diejenigen Werte für die Variable x, mit denen es möglich wird, Kästen der genannten Art herzustellen!



24. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240831:

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen, deren sechste Potenz in ihrer dekadischen Zifferndarstellung genau je einmal die Ziffern 2, 4, 5, genau je zweimal die Ziffern 8, 9 und keine weitere Ziffer enthält!

Aufgabe 240832:

Um die Haltbarkeit eines Motorradreifentyps zu ermitteln, wurden zwei Reifen getestet. Dabei wurde festgestellt, daß der Reifen auf dem Hinterrad nach 15 000 gefahrenen Kilometern und der Reifen auf dem Vorderrad nach 25 000 gefahrenen Kilometern nicht mehr die erforderliche Profiltiefe hatte und damit abgenutzt war.

a) Es soll nun erreicht werden, daß zwei solche Reifen gleichzeitig abgenutzt sind, indem man sie nach einer bestimmten Anzahl gefahrener Kilometer gegeneinander austauscht. Ermittle diese Kilometerzahl!

b) Nach wieviel Kilometern sind unter den Voraussetzungen der Teilaufgabe a) beide Reifen abgenutzt?

Es werde angenommen, daß sowohl auf dem Vorderrad als auch auf dem Hinterrad die Abnutzung jeweils proportional zur Fahrstrecke ist.

Aufgabe 240833:

Konstruiere ein nicht überschlagenes Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (I) bis (V) erfüllt!

(I) Die Seite AB hat die Länge $a = 7,0$ cm.

(II) C liegt auf der Mittelsenkrechten p der Strecke AB.

(III) D liegt auf der Mittelsenkrechten q der Strecke AC.

(IV) A liegt auf der Mittelsenkrechten r der Strecke BD.

(V) Die Geraden p und q schneiden sich in einem Punkt S, der auf der Stecke AB liegt.

Beschreibe deine Konstruktion! Beweise, daß jedes Viereck, das die geforderten Eigenschaften hat, nach deiner Beschreibung konstruiert werden kann! Beweise, daß jedes Viereck, das nach deiner Beschreibung konstruiert wird, die geforderten Eigenschaften hat!

Hinweis: Ein Viereck $ABCD$ heißt genau dann "nicht überschlagen", wenn die Strecken AB und CD sich nicht schneiden und die Strecken AD und BC sich nicht schneiden.

Aufgabe 240834:

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. In diesem Dreieck sei CS die Seitenhalbierende von AB, CW die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ und CH die Höhe auf AB.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{\sphericalangle SCW} = \overline{\sphericalangle WCH}$ gilt!

Aufgabe 240835:

Es sei ABC ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis AB; deren Länge sei 3 cm, der Umfang des Dreiecks betrage 13 cm. Eine Parallele zu AB schneide die Strecke AC in einem Punkt D zwischen A und C sowie die Strecke BC in einem Punkt E. Der Umfang des Vierecks $ABED$ betrage $7,4$ cm.

Beweise, daß durch diese Voraussetzungen die Länge der Strecke AD eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Länge!

Aufgabe 240836:

Zwei Motorradfahrer unternehmen eine Fahrt, auf der beide die gleiche Entfernung zurücklegen. Sie starten gleichzeitig und kommen gleichzeitig am Ziel an. Dabei benötigt A doppelt so viel Zeit zum Fahren wie B zum Rasten. B dagegen fuhr dreimal so lange, wie A rastete.

Welcher der beiden Fahrer hatte die längere Rastzeit?

25. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250811:

a) Es sei b diejenige Zahl, die man erhält, wenn man die Zahl 30 um 50% vergrößert.

Um wieviel Prozent muß diese Zahl b verkleinert werden, um wieder die Zahl 30 zu erhalten?

b) Überprüfe, ob die für die Zahl 30 gefundene Aussage bei gleicher Aufgabenstellung auch für jede beliebige positive Zahl a zutrifft!

Aufgabe 250812:

In einer Arbeitsgemeinschaft Mathematik stellen sich die Schüler gegenseitig Aufgaben. Rainer stellt folgendes Kryptogramm zur Diskussion:

$$\begin{array}{cccccccc}
* & * & * & 2 & 7 & \cdot & * & * \\
\hline
 & & * & * & * & * & * & 5 \\
 & & * & * & * & * & * & \\
\hline
 & & * & * & * & * & 9 & 5 \\
\hline\hline
\end{array}$$

Für jedes Zeichen * soll eine Ziffer so eingesetzt werden, daß eine richtig gerechnete Aufgabe entsteht. Die eingesetzten Ziffern dürfen einander gleich oder voneinander verschieden sein. Günter ist der Meinung, daß es zu dieser Aufgabe keine Lösung gibt.

Hat er damit recht? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 250813:

Beweise folgenden Satz: Die Summe zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, ist stets durch 3 teilbar.

Aufgabe 250814:

Ein Quader habe die Kantenlängen a, $2a$ und $\frac{a}{2}$, wobei a vorgegeben ist. Von diesem Quader werde ein gerades Prisma abgetrennt. Die Höhe dieses Prismas habe die Länge $\frac{a}{2}$, seine Grundfläche sei ein gleichschenkligrechtwinkliges Dreieck mit der Schenkellänge a. Der Restkörper sei ein Prisma mit trapezförmiger Grundfläche.

a) Zeichne den Restkörper in Kavalierperspektive und wähle dafür $a = 6$ cm!

b) Ermittle das Volumen des Restkörpers in Abhängigkeit von a!

c) Gib das Verhältnis der Volumina des Restkörpers und des Quaders an!

25. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250821:

Ermittle diejenigen zwölf aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen, die die Eigenschaft haben, daß die Summe der beiden größten dieser Zahlen gleich der Summe der zehn übrigen ist!

Aufgabe 250822:

Beweise folgenden Satz:

Das Produkt zweier aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, die beide nicht durch 3 teilbar sind, läßt bei Division durch 9 stets den Rest 2!

Aufgabe 250823:

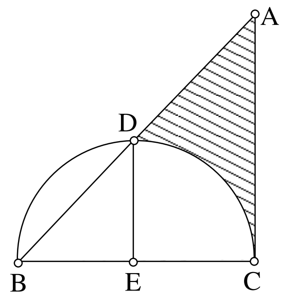
Ein Sicherheitsschloß besitze vier Rädchen, die jeweils mit den Ziffern 1 bis 9 versehen sind. Nur durch Einstellen genau einer Zahlenkombination (an jedem Rädchen eine bestimmte Ziffer) läßt sich das Schloß öffnen. Der Besitzer eines solchen Schlosses hat sich beim Kauf die genaue Zahlenkombination nicht gemerkt. Er weiß nur noch, daß in der Zahlenkombination jede der Ziffern 1, 4 und 6 genau einmal vorkommt. Die Reihenfolge der einzelnen Ziffern ist ihm ebenfalls entfallen.

a) Wie viele verschiedene Einstellungen sind im ungünstigsten Falle für das Öffnen des Schlosses auszuführen?

b) Wie viele verschiedene Einstellungen wären höchstens nötig, wenn der Besitzer noch weiß, mit welchem Rädchen er die Ziffer 4 einstellen muß?

Aufgabe 250824:

Es sei ABC ein gleichschenklig rechtwinkliges Dreieck mit C als Scheitel des rechten Winkels. Über BC als Durchmesser sei derjenige Halbkreis gezeichnet, der AB in einem Punkt D zwischen A und B schneidet (siehe Abbildung).



a) Beweise, daß die Gerade durch D und den Mittelpunkt E von BC senkrecht auf BC steht!

b) Berechne, wieviel Prozent der Fläche des Dreiecks ABC nicht von dem Halbkreis bedeckt sind! Der gesuchte Prozentsatz ist auf eine Dezimalstelle nach dem Komma anzugeben.

Hinweis: Benutze den Näherungswert $\pi \approx 3,142$!

25. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250831:

Beweise folgenden Satz:

Es gibt keine Quadratzahl, die bei der Division durch 3 den Rest 2 läßt.

Aufgabe 250832:

Brigade Schulz spielt im "Tele-Lotto (5aus 35)" nach einem sogenannten "vollmathematischen System mit n Zahlen". Darunter versteht man, wenn n eine natürliche Zahl mit $5 < n \leq 35$ ist, folgendes System:

Es werden von der Brigade genau n Zahlen 1, 2, ... , 35 ausgewählt, und dann werden in der Menge dieser n Zahlen alle verschiedenen Teilmengen aus je fünf Elementen ermittelt. Jede dieser Teilmengen wird als Tip abgegeben.

a) Die Brigade spielt nach einem "vollmathematischen System mit 6 Zahlen". Bei der nachfolgenden Ziehung im Tele-Lotto stellt sich heraus, das genau vier der fünf Gewinnzahlen unter den sechs von der Brigade in ihrem System verwendeten Zahlen vorkommen.

Ferner werden nach dieser Ziehung folgende Gewinnquoten bekanntgegeben: Für jeden Tip mit genau drei richtig getippten Zahlen gibt es 20 M, für jeden Tip mit genau vier richtig getippten Zahlen gibt es 400 M, für jeden Tip mit fünf richtig getippten Zahlen 3 000 M.

Ermittle den hiermit zustandekommenden Gewinn der Brigade!

b) Die Brigade spielt nach einem "vollmathematischen System mit 7 Zahlen". Bei einer Ziehung wird festgestellt: Genau vier der fünf Gewinnzahlen kommen unter den sieben von der Brigade verwendeten Zahlen vor. Die Gewinnquoten sind dieselben wie in a).

Ermittle ebenfalls den Gewinn der Brigade!

Hinweis: Die Kosten, d.h. der Spieleinsatz, sollen in beiden Aufgaben nicht berücksichtigt werden.

Aufgabe 250833:

Es sei g eine gegebene Gerade. Ferner seien zwei Punkte A und B gegeben, die beide nicht auf g liegen, deren Verbindungsstrecke AB aber g schneidet und nicht auf g senkrecht steht.

Für einen Streckenzug $APQB$ seien folgende Bedingungen (1), (2), (3) gefordert:

(1) Die Punkte P und Q liegen auf g.

(2) Die Gerade durch A und P ist parallel zur Geraden durch B und Q.

(3) Die Strecke PQ hat die Länge $t = 6$ cm.

a) Beweise, daß jeder Streckenzug $APQB$, der die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, durch eine Konstruktion (aus gegebenen g, A, B und der gegebenen Länge $t = 6$ cm) erhalten werden kann!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, daß jeder Streckenzug $APQB$, der nach dieser Beschreibung konstruiert werden kann, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

d) Wähle selbst eine Gerade g und Punkte A, B, wie oben beschrieben, und konstruiere dazu *alle* diejenigen Streckenzüge $APQB$, die die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen! (Ein Beweis, daß *alle* verlangten Streckenzüge konstruiert wurden, wird nicht gefordert.)

Aufgabe 250834:

Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Eine Sehne von k, die nicht Durchmesser ist, sei AB. Ferner sei t die in A an k gelegte Tangente, und C sei der Fußpunkt des von B auf t gefällten Lotes.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen die Gerade durch A und B stets den Winkel $\sphericalangle CBM$ halbiert!

Aufgabe 250835:

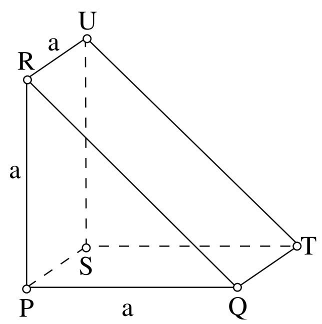
Von Lew Nikolajewitsch Tolstoi (1828 - 1910), einem bedeutenden russischen Schriftsteller, stammt folgende Aufgabe:

> Schnitter sollen zwei Wiesen mähen. Am Morgen begannen alle, die größere Wiese zu mähen. Vom Mittag dieses Tages an teilten sie jedoch die Arbeit anders ein: Die Hälfte der Schnitter verblieb beim Mähen der ersten Wiese, die sie bis zum Abend fertig mähen. Die anderen Schnitter gingen zum Mähen der zweiten Wiese über, deren Flächeninhalt gleich dem der Hälfte der ersten war, und arbeiteten bis zum Abend. Nun blieb auf der zweiten Wiese ein Rest, für den ein Schnitter allein einen ganzen Tag benötigte.
>
> Wieviel Schnitter waren am ersten Tag bei der Arbeit?

Anmerkung: Es sei vorausgesetzt, daß jeder Schnitter an jedem Vormittag eine gleichgroße Fläche wie an jedem Nachmittag mäht und daß diese Arbeitsleistung aller Schnitter die gleiche ist.

Aufgabe 250836:

Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kantenlänge a des Dreiecks PQR.



Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratischen Seitenflächen F des Prismas verläuft und die das Prisma in zwei Körper zerlegt, deren Volumina sich in irgendeiner Reihenfolge wie 9 : 16 verhalten.

Ermittle zu gegebenen a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!

26. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260811:

In das nachstehende Kryptogramm sind für die Buchstaben die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern und für verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern stehen und daß alle angegebenen Rechenaufgaben richtig gelöst sind.

$$\begin{array}{ccccccccc}
A & B & C & - & D & B & = & E & C & C \\
 & : & & & & - & & & - & \\
 & F & G & \cdot & C & H & = & D & I & H \\
\hline
 & K & C & + & C & K & = & & D & D
\end{array}$$

a) Gib eine Eintragung an und zeige, daß sie den oben angegebenen Bedingungen genügt!

b) Untersuche, ob es außer der von dir gefundenen Eintragung weitere Möglichkeiten gibt. ist dies der Fall, dann ermittle alle Eintragungen, die den Bedingungen genügen!

Aufgabe 260812:

Uwe möchte mit einem Taschenrechner feststellen, ob 37 ein Teiler von 45 679 091 ist. Wenn er dabei den Rechner SR1 verwendet, könnte er folgendermaßen vorgehen: Er dividiert 45 679 091 durch 37. Der Rechner SR1 zeigt 1 234 570 an, also ein ganzzahliges Ergebnis. Zur Kontrolle multipliziert Uwe dieses Ergebnis, ohne es neu einzutippen, wieder mit 37. Der Rechner zeigt als Ergebnis wieder 45 679 091 an. (Du kannst dies mit einem SR1 selbst ausprobieren.)

Kann Uwe nun schließen, daß 37 ein Teiler von 45 679 091 ist?

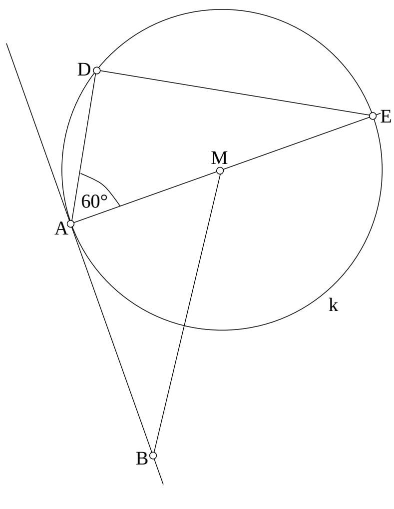
Aufgabe 260813:

Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Vier Punkte A, C, E und D seien in dieser Reihenfolge auf k so gelegen, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind (siehe Bild):

(1) A, M und E liegen auf ein und derselben Geraden.

(2) Es gilt $\sphericalangle MAD = 60°$.

(3) Die Gerade durch M und C schneide die in A an k gelegte Tangente in einem Punkt B derart, daß $\overline{MC} = \overline{BC}$ gilt.



Untersuche, ob unter diesen Voraussetzungen die Strecken AB und DE die gleiche Länge haben!

Aufgabe 260814:

Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma. Alle drei Seitenflächen $ABED$, $BCFE$, $CADF$ sowie die Grund- und die Deckfläche ABC bzw. DEF seien sämtlich einander umfangsgleich. Gegeben sei die Länge h der Strecke AD.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken BC, CA und AB!

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260821:

In der Kleinstadt A hat der Fleischer jeden Montag geschlossen, das Haushaltswarengeschäft jeden Dienstag und der Schuhmacher jeden Donnerstag. Der Optiker hat nur montags, mittwochs und freitags geöffnet. Am Sonntag sind alle Geschäfte geschlossen.

Eines Tages gingen die Freundinnen Anja, Ilka, Katrin und Susann, jede in ein anderes dieser vier Geschäfte. Als sie sich unterwegs trafen, sagten sie:

(1) Anja: "Susann und ich wollten eigentlich schon eher in dieser Woche einkaufen gehen, aber da gab es keinen Tag, an dem wir beide hätten unsere Besorgungen machen können."

(2) Ilka: "Ich wollte heute eigentlich nicht einkaufen, aber morgen hat das Geschäft geschlossen, in dem ich einkaufen will."

(3) Katrin: "Ich hätte auch schon gestern oder vorgestern alles besorgen können."

(4) Susann: "Ich hätte ebenso gestern oder auch morgen meinen Einkauf erledigen können."

Untersuche, ob diese Angaben miteinander vereinbar sind und ob dann aus ihnen eindeutig folgt,

(a) wer von den genannten Mädchen in welchem der angegebenen Geschäfte war.

(b) an welchem Wochentag das Gespräch stattgefunden hat!

Ist dies der Fall, dann gib die entsprechenden Antworten auf die Fragen (a) und (b)!

Aufgabe 260822:

Es sei k ein Halbkreis über dem Durchmesser AB. Eine Gerade schneide k in zwei von A und B verschiedenen Punkten D und C sowie die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt E derart, daß C zwischen D und E liegt. Außerdem gelte

(1) $\overline{BD} = \overline{BE}$ und

(2) $\sphericalangle DAC = 27°$.

Ermittle die Größe α des Winkels $\sphericalangle ACD$!

Aufgabe 260823:

Es sei $ABCDEFGHJKLM$ ein gerades sechsseitiges Prisma, in dem die sechs Seitenflächen $ABHG$, $BCJH$, $CDKJ$, $DELK$, $EFML$, $FAGM$ sowie die Grund- und Deckfläche $ABCDEF$ und $GHJKLM$ sämtlich einander umfangsgleich sind. Gegeben sei die Länge h der Strecke AG.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken AB, BC, CD, DE, EF und FA!

Aufgabe 260824:

a) Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die beiden Ziffern von z eine dritte Ziffer, so entsteht eine dreistellige Zahl, die 29mal so groß ist wie z.

b) Gib an, wie man weitere natürliche Zahlen z' bilden kann, die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer, so entsteht eine neue Zahl, die 29mal so groß ist wie z'.

c) Ermittle alle diejenigen natürlichen, nicht durch 10 teilbaren Zahlen z'', die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer oder mehrere weitere Ziffern, so entsteht eine neue Zahl, die 29mal so groß ist wie z''.

26. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260831:

Gegen Ende eines Kinderfestes kommen fünf Mädchen zur Solidaritätstombola und wollen Lose kaufen. Der Pionierleiter zählt die vorrätigen Lose und sagt dann: "Der Vorrat reicht dafür, daß jede von euch, eine nach der anderen, jeweils genau die Hälfte der gerade noch vorhandenen Lose und ein halbes Los dazu kauft. Dann bleibt kein Los übrig."

(I) Weise nach, daß es als Vorrat an Losen höchstens eine Anzahl geben kann, bei der die Aussagen des Pionierleiters zutreffen!

(II) Weise nach, daß für diese Anzahl die Aussagen des Pionierleiters zutreffen! Wie viele Lose kann jedes der fünf Mädchen nach diesen Angaben kaufen?

Aufgabe 260832:

Ermittle alle diejenigen Paare $(p; q)$ von Primzahlen, die die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

(1) Die Differenz $q - p$ ist größer als 0 und kleiner als 10.

(2) Die Summe $p + q$ ist das Quadrat einer natürlichen Zahl n.

(3) Addiert man zu dieser Zahl n die Summe von p und q, so erhält man 42.

Aufgabe 260833:

Gegeben seien ein Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius $r = 5$ cm sowie eine Gerade g, die von M den Abstand $d = 6$ cm hat. Zu konstruieren sind alle diejenigen Punkte P, die die folgenden Bedingungen (a) und (b) erfüllen:

(a) Der Punkt P liegt auf der Geraden g.

(b) Die von P an k gelegten Tangenten bilden miteinander einen rechten Winkel.

Beschreibe eine Konstruktion! Fertige eine Konstruktionszeichnung an! Beweise die beiden folgenden Sätze (I) und (II)!

(I) Wenn ein Punkt P die Bedingungen (a) und (b) erfüllt, dann läßt er sich nach der angegebenen Beschreibung konstruieren.

(II) Wenn ein Punkt P nach der angegebenen Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt er die Bedingungen (a) und (b).

Aufgabe 260834:

In einer Ebene seien 100 verschiedene Punkte so gelegen, daß folgende Voraussetzungen erfüllt sind:

(1) Es gibt genau eine Gerade, auf der mehr als zwei der 100 Punkte liegen.

(2) Auf dieser Geraden liegen genau drei der 100 Punkte.

Ermittle unter diesen Voraussetzungen die Anzahl derjenigen Geraden, die durch mehr als einen der 100 Punkte gehen!

Aufgabe 260835:

Beweise folgende Sätze:

I) Wenn ABC ein Dreieck mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ ist, dann ist die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$.

II) Wenn in einem Dreieck ABC die Seitenhalbierende von AB zugleich auch Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$ ist dann gilt $\overline{AC} = \overline{BC}$.

Aufgabe 260836:

Es sei $ABCD$ eine dreiseitige Pyramide, die die Bedingung erfüllt, daß die vier Dreiecke ABC, ABD, ACD und BCD sämtlich einander umfangsgleich sind.

Untersuche, ob durch diese Bedingung und durch die Längen

$$\overline{AD} = p, \qquad \overline{BD} = q, \qquad \overline{CD} = r$$

die Längen $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$ und $\overline{AB} = c$ eindeutig bestimmt sind!

Wenn dies der Fall ist, gib diese Längen a, b, c in Abhängigkeit von p, q, r an!

27. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270811:

Steffen stellt den Mitgliedern der AG Mathematik folgende Aufgabe:

> "Jeder denke sich eine Zahl, multipliziere diese mit 2, addiere zum Produkt 30, dividiere die Summe durch 2, subtrahiere von dem erhaltenen Ergebnis die anfangs gedachte Zahl!
>
> Schreibe des Ergebnis auf!"

Es stellte sich heraus, daß alle Schüler der Arbeitsgemeinschaft das gleiche Ergebnis hatten. Müssen sich Steffens Mitschüler unbedingt auch die gleiche Zahl gedacht haben?

Aufgabe 270812:

In einen rechtwinkligen Koordinatensystem seien die Punkte $A(1;5)$, $B(4;4)$, $C(2;8)$, $A'(8;4)$, $B'(7;1)$, $C'(11;3)$ gegeben. Sie sind so gelegen, daß es eine Drehung gibt, bei der A, B und C die Bildpunkte A', B' bzw. C' haben.

Konstruiere das Drehzentrum D dieser Drehung! Beschreibe deine Konstruktion!

Beweise folgende Aussage: Wenn D das gesuchte Drehzentrum ist, dann läßt sich D nach deiner Beschreibung konstruieren.

Aufgabe 270813:

Es sei ABC ein Dreieck, bei dem der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ die Größe 30° hat.

Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Länge der Seite BC gleich der Länge des Umkreisradius dieses Dreiecks ist!

Aufgabe 270814:

Es soll die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen gebildet werden. Dann ist eine "Division mit Rest" durchzuführen, und zwar soll die oben genannte Summe durch 4 dividiert werden. Man will nun untersuchen, welche Zahlen bei einer derartigen Division als Rest auftreten können und welche nicht.

a) Bilde zunächst einige Beispiele, indem du jedesmal selbst zwei natürliche Zahlen wählst, die Summe ihrer Quadrate durch 4 dividierst und den auftretenden Rast notierst! Setze das Bilden solcher Beispiele so oft fort, bis es nur noch eine natürliche Zahl kleiner als 4 gibt, die in deinen Beispielen nicht als Rest auftrat!

b) Nun kann man vermuten, daß diese Zahl niemals als Rest auftritt, wenn die Summe der Quadrate zweier beliebiger natürlicher Zahlen durch 4 dividiert wird.

   Beweise diese Vermutung!

27. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270821:

Ein AG-Leiter behauptet, er könne jede von seinen Zirkelteilnehmern gedachte Zahl erraten, wenn ihm nur das Ergebnis der folgenden Rechnung genannt wird:

> ”Denke dir eine Zahl. Addiere dazu die Zahl 5, multipliziere die Summe mit 16, subtrahiere davon das Sechsfache der gedachten Zahl und dividiere diese Differenz durch 10!”

Läßt sich tatsächlich aus dem nun zu nennenden Ergebnis dieser Rechnung die gedachte Zahl ermitteln? Wenn das der Fall ist, so beschreibe und begründe, auf welche Weise das geschehen kann!

Aufgabe 270822:

Gegeben sei ein Kreis k; sein Mittelpunkt sei M, sein Radius betrage r. Von drei Punkten A, B, C auf k werde vorausgesetzt, daß $\overline{AB} = \overline{BC}$ gilt und daß der Winkel $\sphericalangle ABC$ die Größe 120° hat.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets $\overline{AB} = r$ gilt!

Aufgabe 270823:

Über ein Turnier in einer AG ”Schach” wird berichtet: Das Turnier wurde in mehreren Runden ausgetragen. In jeder Runde spielte jedes AG-Mitglied gegen jedes andere genau eine Partie. Auf diese Weise wurden in dem Turnier insgesamt 112 Partien gespielt. Es nahmen mehr als zwei Mitglieder teil.

Untersuche, ob ein Turnier möglich ist, bei dem diese Angaben zutreffen, und ob die Anzahl der Runden sowie die Anzahl der Teilnehmer eindeutig aus den Angaben folgen! Wenn dies der Fall ist, so ermittle diese Anzahlen!

Aufgabe 270824:

Ein Würfel W werde in volumengleiche Teilwürfel zerlegt. Der Oberflächeninhalt des Würfels W sei A, die Summe der Oberflächeninhalte der voneinander getrennten Teilwürfel sei S. Ermittle das Verhältnis $A : S$

(a) wenn der Würfel W die Kantenlänge 14 cm hat und die Anzahl der Teilwürfel 8 beträgt,

(b) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl 8 der Teilwürfel,

(c) bei beliebiger Kantenlänge a des Würfels W und bei der Anzahl n^3 der Teilwürfel, wobei n eine beliebige natürliche Zahl mit $n \geq 2$ ist!

27. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270831:

Während einer Kindergeburtstagsfeier spielt man "Geburtstagsdatum erraten". Katrin, das Geburtstagskind, erklärt ihrem jeweiligen Spielpartner:

> "Teile dein Geburtsdatum auf in eine Tageszahl und eine Monatszahl! (Mein heutiger Geburtstag, der 24. Mai, wäre z.B. aufzuteilen in die Tageszahl 24 und die Monatszahl 5.) Verdopple nun die Tageszahl deines Geburtsdatums, addiere zum Ergebnis 7, multipliziere die Summe mit 50 und vermehre das Produkt um die Monatszahl deines Geburtsdatums!"

Nachdem das Ergebnis genannt wurde, war Katrin in der Lage, das betreffende Geburtsdatum zu nennen. Erkläre, durch welche überlegung man das Geburtsdatum in jedem Fall aus dem Ergebnis der von Katrin geforderten Rechnung finden kann!

Aufgabe 270832:

Bei einem Schachturnier spielte jeder der acht Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie; die von den einzelnen Spielern errreichten Punktzahlen waren sämtlich voneinander verschieden. Bernd, der den zweiten Platz belegte, gewann so viele Punkte, wie die vier Letztplatzierten zusammen. Gerd wurde Dritter und Uwe belegte den siebenten Platz.

Untersuche, ob aus diesen Voraussetzungen eindeutig folgt, mit welchem Ergebnis die Partie zwischen Gerd und Uwe endete! Ist dies der Fall, dann gib das Ergebnis an!

Hinweis: Im Schachsport erhält der Spieler für einen Sieg 1 Punkt, spielt er unentschieden, bekommt er $\frac{1}{2}$ Punkt. Für eine Niederlage gibt es 0 Punkte.

Aufgabe 270833:

Es sei k ein Kreis, sein Mittelpunkt sei M. Diesem Kreis sei ein spitzwinkliges Dreieck ABC einbeschrieben, bei dem für die Größen α, β der Winkel $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle ABC$ vorausgesetzt werde, daß $\alpha > \beta$ gilt. Im Dreieck ABC sei D der Fußpunkt der auf AB senkrechten Höhe. Der von C ausgehende Strahl durch M schneide k in E.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen der Winkel $\sphericalangle DCE$ stets die Größe $\alpha - \beta$ hat!

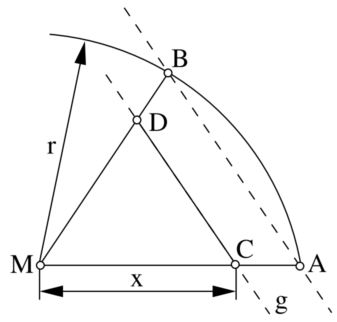
Aufgabe 270834:

Es sei $\overset{\frown}{AB}M$ ein Kreissektor, für den die Länge $r = \overline{MA} = \overline{MB}$ gegeben ist und der Zentriwinkel $\sphericalangle AMB$ die Größe $60°$ hat. Von einer Geraden g, die zu AB parallel ist und die Strecken MA bzw. MB in C bzw. D schneidet, sei bekannt, daß der Umfang u_1 des Dreiecks MCD gleich dem Umfang u_2 der Figur $\overset{\frown}{AB}DC$ ist (siehe Abbildung).

a) Ermittle unter dieser Voraussetzung die Länge $x = \overline{MC}$ in Abhängigkeit von r!

b) Die Länge r sei mit einer Genauigkeit gemessen, bei der sich auf eine Dezimale nach dem Komma genau $r = 6,7$ cm ergibt. Ferner sei zur Berechnung verwendet, daß auf zwei Dezimalen nach dem Komma genau $\pi = 3,14$ gilt.

Beweise, daß man daraus die Länge x (in Zentimetern) auf eine Dezimale nach dem Komma genau durch Berechnung von Schranken ermitteln kann! Wie lautet diese Längenangabe x?



Aufgabe 270835:

Eine quadratförmige schachbrettartige Tabelle bestehe aus 15 mal 15 Feldern. Eine der beiden Diagonalen des Quadrates sei d genannt. In jedes der 225 Felder der Tabelle kann eine der Zahlen 1 bis 15 so eingetragen werden, daß die folgenden Forderungen (1) und (2) erfüllt sind:

(1) Jede (waagerechte) Zeile enthält jede der 15 Zahlen genau einmal.

(2) Für je zwei Felder, die symmetrisch zu d liegen, gilt: Die Zahlen in diesen Feldern sind einander gleich.

Für jede Eintragung kann man die Summe aus denjenigen Zahlen bilden, die in den 15 von der Diagonale d durchquerten Feldern stehen.

Beweise, daß diese Summe durch die Voraussetzungen (1) und (2) eindeutig bestimmt ist, und ermittle diese Summe!

Aufgabe 270836:

Es sei $ABCDS$ eine gerade Pyramide mit einem Quadrat $ABCD$ als Grundfläche und S als Spitze. Der Fußpunkt der Höhe dieser Pyramide sei E, ferner sei $a = \overline{AB}$ und $h = \overline{ES}$.

I. Zeichne ein Bild dieser Pyramide mit den Maßen $a = 6$ cm, $h = 8$ cm in schräger Parallelprojektion ($\alpha = 45°$, $q = \frac{1}{2}$), wobei die Strecke ES in wahrer Länge erscheinen soll!

II. Auf der Strecke ES gibt es genau einen Punkt P, für den die (im Raum verlaufenden) Strecken AP und SP einander gleichlang sind.

Leite eine Möglichkeit her, in dem nach I. hergestellten Bild der Pyramide $ABCDS$ den Bildpunkt dieses Punktes P zu konstruieren; beschreibe diese Konstruktion und führe sie durch!

III. Die Länge a sei beliebig gegeben. Ermittle diejenigen Werte h, für die sich (in der Pyramide mit diesen Maßen a, h) ein Punkt P auf ES finden läßt, der die in II. genannte Bedingung $\overline{AP} = \overline{SP}$ erfüllt!

28. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280811:

In einem Kasten befinden sich 500 Kugellagerkugeln, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden; 499 Kugeln haben untereinander die gleiche Größe und das gleiche Gewicht, eine einzige Kugel hat zwar die gleiche Größe wie jede der anderen Kugeln, ist aber leichter als sie.

Es soll nun - mit Hilfe einer Balkenwaage, nur durch wiederholte Feststellung, ob Gleichgewicht zwischen zwei gleich großen Anzahlen dieser Kugeln besteht oder nicht - die leichtere Kugel ermittelt werden.

Zeige, daß sechs Wägungen hierfür in jedem Fall ausreichen, d.h.: Wie auch die Ergebnisse einer 1., 2., ..., 5. Wägung ausfallen mögen, stets soll man die nächste Wägung so durchführen können, daß nach der 6. Wägung die leichtere Kugel eindeutig ermittelt ist.

Aufgabe 280812:

Es sei M der Unkreismittelpunkt eines spitzwinkligen Dreiecks ABC. Die Größe des Winkels $\sphericalangle BAM$ betrage 40° und die des Winkels $\sphericalangle BCM$ sei 30°.

Ermittle aus diesen Angaben die Größen α, β, γ der drei Innenwinkel des Dreiecks ABC!

Aufgabe 280813:

Beweise die folgende Aussage!

> Für je fünf unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt: Unter diesen fünf Zahlen gibt es stets genau eine, die durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 280814:

Es sei ABC ein gleichseitiges Dreieck. Ferner sei P ein beliebiger im Innern dieses Dreiecks gelegener Punkt.

a) Konstruiere ein derartiges Dreieck!

b) Miß die Länge der von P auf die Seiten gefällten Lote und vergleiche die Summe dieser Längen mit der Länge einer Höhe dieses Dreiecks! Was vermutest du?

c) Beweise deine Vermutung!

Hinweis: Es ist zweckmäßig, den Flächeninhalt geeigneter Teildreiecke zu betrachten.

28. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280821:

Ein Frachtschiff benötigt für eine Schiffsroute vom Hafen A zum Hafen B genau 12 Tage. Ein Tanker fährt diese Route in entgegengesetzter Richtung und braucht dafür 15 Tage.

Der Frachter fährt 6 Tage später vom Hafen A ab als der Tanker vom Hafen B.

a) Wieviel Tage nach Abfahrt des Frachters treffen sich die beiden Schiffe, wenn sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit fahren?

b) Welchen Teil der Route hat dann jedes Schiff zurückgelegt?

Aufgabe 280822:

Beweise die folgende Aussage! Unter je fünf unmittelbar aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es mindestens eine, höchstens aber zwei, die durch 3 teilbar sind.

Aufgabe 280823:

In einer Arbeitsgemeinschaft wird über folgende Figur diskutiert: Es sei $ABCD$ ein Quadrat; die Mittelpunkte der Seiten AD bzw. CD seien M bzw. N, der Schnittpunkt der Strecken CM und BN sei P.

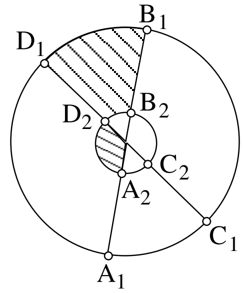
a) Simone mißt den Winkel $\sphericalangle BPM$ und stellt fest, daß die Strecken CM und BN aufeinander senkrecht stehen!

b) Frank mißt von den Dreiecken ABM und BPM Seiten- und Höhenlängen und stellt fest, daß diese beiden Dreiecke nicht einander flächeninhaltsgleich sind.

Untersuche, ohne an einer Figur Messungen durchzuführen, für jede der beiden Feststellungen, ob sie für jedes Quadrat wahr ist!

Aufgabe 280824:

Es seien k_1 und k_2 zwei konzentrische Kreise mit dem Mittelpunkt M, deren Radien sich wie 3 : 1 verhalten. Zwei Durchmesser A_1B_1 und C_1D_1 von k_1 schneiden k_2 in Punkten A_2, B_2 bzw. C_2, D_2, die so angeordnet sind, wie die Abbildung zeigt.



a) Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Kreisausschnittes A_2MD_2 und des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$, wenn vorausgesetzt wird, daß $\sphericalangle A_1MD_1$ ein rechter Winkel ist!

b) Wie hat man die Größe des Winkels $\sphericalangle A_1MD_1$ zu wählen, damit der Flächeninhalt des Kreisausschnittes A_2MD_2 gleich dem Flächeninhalt des Kreisringausschnittes $D_2B_2B_1D_1$ ist?

28. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280831:

Zwei wanderlustige Freunde A und B beschließen, auf einer Wanderstrecke von 30 km einander entgegenzugehen. Zu Beginn befindet sich A an einem Endpunkt, B an dem anderen Endpunkt dieser Strecke. Sie verständigen sich telefonisch über ihr Vorhaben und nehmen dabei an, daß jeder von ihnen seine persönliche Marschgeschwindigkeit während des ganzen Weges gleichbleibend beibehält. Damit erhalten sie die folgenden Aussagen:

(1) Wenn A 2 Stunden eher startet als B, so treffen sie sich $2\frac{1}{2}$ Stunden nach dem Start von B.

(2) Wenn aber B 2 Stunden eher startet als A, so treffen sie sich 3 Stunden nach dem Start von A.

Zeige, daß unter diesen Voraussetzungen, wenn die Aussagen (1) und (2) zutreffen, die Marschgeschwindigkeiten von A und B eindeutig bestimmt sind; ermittle diese Geschwindigkeiten!

Überprüfe, daß auch umgekehrt gilt: Wenn A und B die ermittelten Geschwindigkeiten haben, dann treffen die Aussagen (1) und (2) zu.

Aufgabe 280832:

Beweise den folgenden Satz!

> Wenn $ABCD$ ein Quadrat ist, M der Mittelpunkt von AB, N der Mittelpunkt von BC und P der Schnittpunkt der Strecken CM und DN ist, dann gilt $\overline{AD} = \overline{AP}$.

Aufgabe 280833:

Beweise die folgende Aussage!

> Stets, wenn irgendwelche sechs unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen vorliegen, ist es unmöglich, diese sechs Zahlen so in zwei Gruppen einzuteilen, daß das Produkt der Zahlen einer Gruppe gleich dem Produkt der Zahlen der anderen Gruppe ist.

Hinweis: Enthält bei einer Einteilung eine der zwei Gruppen nur eine Zahl, so gilt diese Zahl als das "Produkt" der Zahlen dieser Gruppe.

Aufgabe 280834:

Für ein Schulsportfest möchte die Klasse 8c aus den sieben im 100-m-Lauf besten Schülern eine aus vier Schülern bestehende Mannschaft zum 4×100-m-Staffellauf auswählen.

a) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den sieben Schülern ausgewählt werden?

b) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall zwei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?

c) Wieviel verschiedene Mannschaften könnten aus den Schülern ausgewählt werden, wenn auf jeden Fall drei bestimmte der sieben Schüler dabei sein sollen?

d) In wie viel verschiedenen Reihenfolgen ihrer Starts lassen sich stets die vier Schüler einer Mannschaft zum Staffellauf aufstellen?

Aufgabe 280835:

Es sei ABC ein Dreieck, α sei die Größe des Winkels $\sphericalangle BAC$ und β die Größe des Winkels $\sphericalangle ABC$. Der Inkreis des Dreiecks berühre die Seite AB in D, die Seite BC in E und die Seite AC in F.

Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle FDE$ in Abhängigkeit von α und β!

Hinweis: Der Inkreis eines Dreiecks ist derjenige Kreis, der alle drei Seiten des Dreiecks von innen berührt.

Aufgabe 280836:

Gegeben seien zwei Strecken; für ihre Längen p und q gelte $p < q$. Gesucht ist ein Viereck $ABCD$, das die folgenden Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt.

(1) Das Viereck $ABCD$ ist ein Trapez mit $AB \parallel CD$.

(2) Es gilt $\overline{AB} = p$ und $\overline{CD} = q$.

(3) Es gibt einen Kreis, auf dem die Punkte A, B, C und D liegen und dessen Radius p beträgt.

I. Zeige, daß ein Viereck, wenn es die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, aus p und q konstruiert werden kann!

II. Beschreibe eine solche Konstruktion!

III. Zeige, daß ein Viereck, wenn es nach dieser Beschreibung konstruiert wird, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt!

IV. Untersuche, unter welchen Bedingungen für die gegebenen Lösungen p und q ein solches Viereck

   a) existiert,

   b) bis auf Kongruenz eindeutig durch p und q bestimmt ist!

29. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290811:

Auf einer Flasche mit handelsüblicher 40 prozentiger Essigessenz stehe die folgende Gebrauchsanweisung: "Der Inhalt dieser Flasche (200 ml), mit 800 ml Wasser vermischt, ergibt einen zehnprozentigen Speiseessig."

Stimmt das?

Aufgabe 290812:

Die Grundfläche eines geraden Prismas ist ein gleichseitiges Dreieck mit gegebener Seitenlänge a. Die Summe aller Kantenlängen dieses Prismas beträgt $15a$.

Berechne den Flächeninhalt der Mantelfläche dieses Prismas!

Aufgabe 290813:

Zwei Kreise k_1 und k_2 seien so gelegen, daß sie zwei verschiedene Schnittpunkte A und D haben und daß ihre Mittelpunkte M_1, M_2 auf verschiedenen Seiten der Geraden durch A und D liegen. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_1 mit der Geraden durch A und M_1 hat, sei B. Der von A verschiedene Schnittpunkt, den k_2 mit der Geraden durch A und M_2 hat, sei C.

a) Weise nach, daß unter diesen Voraussetzungen stets der Punkt D auf der Geraden g durch B und C liegen muß!

b) Stelle eine Vermutung über die gegenseitige Lage der Geraden g und der Geraden h durch M_1, M_2 auf! Beweise deine Vermutung!

Aufgabe 290814:

Zu jeder sechsstelligen natürlichen Zahl n, deren Einer-Ziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl n' bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt. Anschließend kann man die Zahl $n + n'$ berechen.

a) Bilde einige Beispiele! Stelle fest, ob es eine Primzahl gibt, durch die in deinen Beispielen die Zahl $n + n'$ teilbar ist! Äußere eine Vermutung!

b) Versuche, deine Vermutung zu beweisen!

c) Jetzt sei k eine beliebige gerade natürliche Zahl größer als Null. Auch zu jeder k-stelligen natürlichen Zahl n, deren Einerziffer von Null verschieden ist, kann man diejenige Zahl bilden, die man erhält, indem man die Ziffern von n in umgekehrter Reihenfolge schreibt.

Gilt für $n + n'$ dann auch eine entsprechende Aussage wie in a), b)?

29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290821:

Über die Anzahl x der Schüler einer 8. Klasse ist folgendes bekannt:

(1) Die Zahl x ist eine Primzahl.

(2) Genau 9 Schüler dieser Klasse können schlittschuhlaufen.

(3) Genau 12 Schüler dieser Klasse können skilaufen.

(4) Genau 4 Schüler dieser Klasse können weder schlittschuhlaufen noch skilaufen.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben die Schülerzahl x eindeutig ermitteln läßt!

Aufgabe 290822:

a) Untersuche, ob die Gleichung

$$\left(\frac{x}{2}+2\right)(4x-7)=2x^2+\frac{x}{3}+1$$

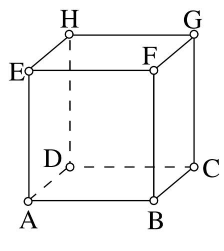
eine natürliche Zahl x als eine Lösung besitzt!

b) In der genannten Gleichung soll die Zahl 7 so durch eine rationale Zahl r ersetzt werden, daß die entstehende Gleichung die Zahl $x=1$ als eine Lösung besitzt.

Ermittle alle diejenigen rationalen Zahlen r, die diese Forderung erfüllen!

Aufgabe 290823:

Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit beliebiger Kantenlänge (siehe Abbildung).



a) Ermittle die Größe des Winkels $\sphericalangle DEB$!

b) Beweise, daß die Winkel $\sphericalangle AHB$ und $\sphericalangle BEC$ zueinander gleiche Größen haben!

Aufgabe 290824:

Das 4×4-Felder-Quadrat im Bild soll so in vier Teile zerlegt werden, daß folgende Forderungen erfüllt sind:

(1) Jedes Teil besteht aus genau vier Feldern.

(2) Jedes Teil ist derart zusammenhängend, daß sich je zwei Mittelpunkte seiner Felder durch einen Weg miteinander verbinden lassen, der ganz in dem Teil verläuft und nur aus Strecken besteht, von denen jede zu einer Seitenkante des Quadrates parallel ist.

(3) Jedes Teil enthält alle vier Zahlen 1, 2, 3, 4.

Gib alle Zerlegungen an, die diese Forderungen erfüllen! Weise nach, daß es keine weiteren derartigen Zerlegungen gibt!

29. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290831:

Eine Aufgabe des bedeutenden englischen Naturwissenschaftlers Isaak Newton (1643 bis 1727) lautet:

> Ein Kaufmann besaß eine gewisse Geldsumme.
>
> Im ersten Jahr verbrauchte er davon 100 Pfund; zum Rest gewann er durch seine Arbeit ein Drittel desselben dazu.
>
> Im zweiten Jahr verbrauchte er wiederum 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
>
> Im dritten Jahr verbrauchte er erneut 100 Pfund und gewann zum Rest ein Drittel dazu.
>
> Dabei stellte er fest, daß sich sein Geld gegenüber dem Anfang des ersten Jahres verdoppelt hatte.

Ermittle aus diesen Angaben, welche Geldsumme anfangs des ersten Jahres vorhanden gewesen sein muß! Weise nach, daß bei dieser Anfangssumme die Angaben des Aufgabentextes zutreffen!

Aufgabe 290832:

Einem Kreisausschnitt soll ein Quadrat so einbeschrieben werden, daß die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

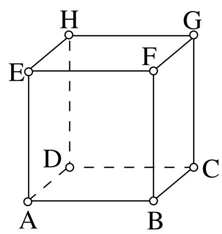
(1) Die - aus zwei Strecken (Radien) und einem Kreisbogen bestehende - Randlinie des Kreisausschnittes enthält die vier Eckpunkte des Quadrates.

(2) Der Kreisbogen wird durch zwei dieser Eckpunkte in drei gleichlange Teilbögen zerlegt.

Untersuche, ob durch diese Bedingungen die Größe α des Zentriwinkels des Kreisausschnittes eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, so gib diese Größe an!

Aufgabe 290833:

In einem Würfel $ABCDEFGH$ (siehe Abbildung) seien V, W, X, Y in dieser Reihenfolge die Mittelpunkte der Seitenflächen $ABCD$, $BCGF$, $EFGH$ bzw. $ABFE$.



Beweise, daß unter dieser Voraussetzung die Strecken VW, WX, XY und YV sämtlich einander gleichlang sind!

Aufgabe 290834:

Ermittle alle diejenigen Tripel $(a,\ b,\ c)$ natürlicher Zahlen a, b und c, die die folgenden Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllen!

(1) Es gilt $a + b = c^3$.

(2) Es gilt $a + b + c = 130$.

(3) Die Zahl $a - b$ ist ein ganzzahliges Vielfaches von 19.

Aufgabe 290835:

Aus einer sechsstelligen natürlichen Zahl n soll eine weitere Zahl errechnet werden, indem eine Addition, Subtraktion, Multiplikation oder Division mit einer höchstens dreistelligen natürlichen Zahl durchgeführt wird, wobei nur die Multiplikation mit 0 und die Division durch 0 nicht zugelassen sind. Auf das Ergebnis soll wieder eine der genannten Rechenoperationen angewandt werden, auf das neue Ergebnis ebenfalls usw. Erst wenn ein Ergebnis den Wert 0 hat, soll das Bilden weiterer Zahlen nicht mehr fortgesetzt werden.

a) Gibt es sechsstellige Zahlen n, von denen ausgehend das Ergebnis 0 bereits mit zweimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist?

b) Beweise, daß von jeder sechsstelligen Zahl n aus, die nicht größer als 999 000 ist, das Ergebnis 0 mit höchstens dreimaligem Ausführen derartiger Rechenoperationen erreichbar ist!

Aufgabe 290836:

Von einem Viereck $ABCD$ wird gefordert, daß es ein Trapez mit $AB \parallel DC$, $e = 7\,\text{cm}$, $f = 6\,\text{cm}$, $a = 48°$, $e = 114°$ ist, wobei e die Länge der Diagonale AC, f die Länge der Diagonale BD, α die Größe des Winkels $\sphericalangle DAB$ und, wenn S der Schnittpunkt von AC mit BD bezeichnet, ϵ die Größe des Winkels $\sphericalangle ASB$ ist.

a) Beweise: Wenn ein Viereck diese Forderungen erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Längen und Winkelgrößen konstruiert werden!

b) Beschreibe eine solche Konstruktion und fertige eine Konstruktionszeichnung an!

c) Beweise: Wenn ein Viereck nach der Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die gestellten Forderungen!

d) Beweise, daß durch die Forderungen ein Viereck $ABCD$ auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

30. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300811:

Axel läßt Jörg mit einem roten, einem blauen und einem gelben Würfel würfeln. Ohne daß er die geworfenen Augenzahlen sieht, sagt er dann:

> ”Verdopple die Augenzahl des roten Würfels, addiere dazu die Zahl 8 und multipliziere die Summe mit 50! Merke dir das Resultat! Addiere nun zur Augenzahl des blauen Würfels die Zahl 10 und multipliziere die Summe mit 10! Bilde dann zum Schluß die Summe aus dem gerade erhaltenen Produkt, dem vorher gemerkten Resultat und der Augenzahl des gelben Würfels. Wenn Du mir diese Summe nennst, kann ich Dir von jedem der drei Würfel die geworfene Augenzahl nennen.”

a) Wähle drei mögliche Augenzahlen und führe die angegebenen Berechnungen aus!

b) Beschreibe, wie man von der am Ende der Berechnungen genannten Summe zu den Augenzahlen kommen kann! Erkläre, warum man nach deiner Beschreibung stets die richtigen Augenzahlen findet!

Aufgabe 300812:

Im Mathematikunterricht wird zur Berechnung des Flächeninhalts eines Drachenvierecks folgende Formel benutzt: $A = \frac{e \cdot f}{2}$. Dabei bedeuten e bzw. f die Längen der beiden Diagonalen des Drachenvierecks.

Rolf behauptet, daß diese Formel für jedes Viereck gilt, dessen Diagonalen senkrecht aufeinander stehen. Hat er recht?

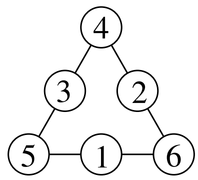
Aufgabe 300813:

In einer Ebene seien sieben Punkte so gegeben, daß keine drei von ihnen auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen Dreiecke, deren Ecken drei der gegebenen Punkte sind!

Aufgabe 300814:

a) In das Schema des Bildes a) sind die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 so einzutragen, daß jede der drei ”Seitensummen” $5+1+6$, $6+2+4$, $4+3+5$ den Wert $S = 12$ hat.

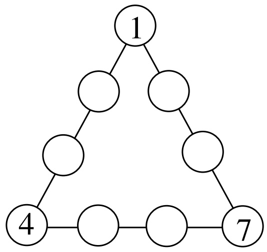


Untersuche, ob eine solche Eintragung der Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 auch mit $S = 9$ möglich ist, ebenso auch mit $S = 10$ und $S = 11$!

Gib jedesmal, wenn das der Fall ist, je eine derartige Eintragung an!

b) In das Schema des Bildes b) sollen außer den bereits eingetragenen "Eckenzahlen" 1, 4, 7 die Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 so eingetragen werden, daß jede der drei "Seitensummen" den Wert $S = 19$ hat.

Ermittle alle verschiedenen Eintragungen dieser Art! Dabei sollen zwei Eintragungen genau dann als verschieden gelten, wenn in einer dieser beiden Eintragungen mindestens eine der Zahlen 2, 3, 5, 6, 8, 9 einer anderen Dreiecksseite angehört als in der anderen Eintragung.



c) Im Bild b) beträgt die "Eckensumme" $E = 1 + 4 + 7 = 12$. Ermittle alle diejenigen Werte E, die als "Eckensumme" auftreten können, wenn man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 so in das Schema einträgt, daß die drei Seitensummen den Wert S haben! Begründe, daß es für andere Werte E keine solche Eintragung geben kann!

30. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300821:

In einem Garten stehen zwei Fässer mit Wasser. Jörg gießt aus dem ersten Faß so viele Liter Wasser in das zweite Faß, wie dort bereits enthalten sind. Anschließend gießt er aus dem zweiten Faß so viele Liter Wasser in das erste, wie sich dort nach dem vorigen Umgießen befinden. Nach diesen beiden Umfüllvorgängen befinden sich in jedem der beiden Fässer genau je 24 Liter Wasser.

Untersuche, ob aus diesen Angaben eindeutig folgt, wie viele Liter Wasser sich anfangs in jedem der beiden Fässer befanden! Ist dies der Fall, so gib diese beiden Literzahlen an!

Aufgabe 300822:

Ein Rechteck, dessen Seitenlängen sich wie 1 : 2 zueinander verhalten, soll in acht einander kongruente gleichschenklig-rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden.

a) Zeichne und beschreibe eine solche Zerlegung! Begründe, warum die nach deiner Beschreibung entstehenden acht Dreiecke gleichschenklig-rechtwinklig und einander kongruent sind!

b) Ermittle die Länge eines Schenkels dieser Dreiecke in Abhängigkeit von der kleineren der beiden Seitenlängen des Rechtecks!

Aufgabe 300823:

Jemand möchte in einer Ebene eine Anzahl n von Punkten zeichnen. Sie sollen so gewählt werden, daß keine drei dieser Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Anschließend will er Dreiecke suchen, deren sämtliche drei Ecken zu den gezeichneten n Punkten gehören.

Ermittle die kleinste Anzahl n solcher Punkte, für die es möglich ist, 120 verschiedene derartige Dreiecke zu finden!

Aufgabe 300824:

Man denke sich die Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., 99 999 derart hintereinander aufgeschrieben, daß die Zifferndarstellung einer Zahl z entsteht.

Der Beginn dieser Darstellung lautet $z = 123456789101112131415...$; beispielsweise an der elften Stelle steht die Ziffer 0, die Ziffer 2 tritt z.B. an der zweiten Stelle, an der 15ten Stelle und noch an weiteren Stellen von z auf.

Welche Ziffer steht an der 206788sten Stelle von z?

30. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300831:

Ermittle die Anzahl derjenigen natürlichen Zahlen, die jede der Ziffern 1, 2, 3, ... , 9 genau einmal enthalten und durch 45 teilbar sind!

Aufgabe 300832:

Gegeben seien drei verschiedene Sorten von Kugeln; von jeder Sorte seien 100 Stück vorhanden:

Sorte A: Kugeln mit einer Masse von $0,3$ g je Stück,

Sorte B: Kugeln mit einer Masse von $1,5$ g je Stück,

Sorte C: Kugeln mit einer Masse von $7,0$ g je Stück.

Untersuche, ob es möglich ist, aus diesen Kugeln genau 100 so auszuwählen, daß ihre Gesamtmasse genau 100 g beträgt! Wenn das der Fall ist, so ermittle alle derartigen Möglichkeiten für die drei Anzahlen, die man jeweils aus Kugeln der Sorten A, B und C auszuwählen hat!

Aufgabe 300833:

Aus drei gegebenen Längen $c = 8$ cm, $s_a = 6$ cm, $s_b = 7$ cm soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Dabei wird gefordert:

(1) Die Seite AB hat die Länge $\overline{AB} = c$.

(2) Die Seitenhalbierende AD der Seite BC hat die Länge $\overline{AD} = s_a$.

(3) Die Seitenhalbierende BE der Seite AC hat die Länge $\overline{BE} = s_b$.

a) Konstruiere ein Dreieck und beschreibe deine Konstruktion!

b) Beweise: Wenn ein Dreieck nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2), (3).

Aufgabe 300834:

Man beweise: Für jede natürliche Zahl $n > 0$ befindet sich stets unter den natürlichen Zahlen $n-1$, n, $n+1$ und n^2+1 eine Zahl, die durch 5 teilbar ist.

Aufgabe 300835:

a) Beweise den folgenden Satz:

   In jedem Dreieck liegt der größeren von zwei Seiten stets auch der größere Winkel gegenüber.

b) Gib an, ob die Umkehrung dieses Satzes gilt, und beweise die Richtigkeit deiner Angabe!

Aufgabe 300836:
Im Raum seien zwölf Punkte derart gelegen, daß keine vier dieser Punkte in einer gemeinsamen Ebene liegen.

Ermittle die Anzahl aller derjenigen verschiedenen Tetraeder, deren vier Eckpunkte zu den zwölf gegebenen Punkten gehören!

Hinweis: Jedes Tetraeder ist durch die Menge seiner vier Eckpunkte (die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen) eindeutig bestimmt; irgendwelche Anforderungen an die Reihenfolge oder die gegenseitigen Abstände der Eckpunkte gibt es nicht.

31. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310811:

Auf einem Tisch liegen drei Schachteln. In einer liegen zwei schwarze Kugeln, in der anderen eine schwarze und eine weiße Kugel, in der dritten zwei weiße Kugeln. Die Schachteln tragen die Aufschriften "Zwei schwarze", "Schwarz und weiß", "Zwei weiße"; jedoch trifft keine dieser drei Aufschriften zu.

Untersuche, ob sich bei diesen Voraussetzungen durch Herausnehmen einer einzigen Kugel, ohne daß die anderen Kugeln gesehen werden, eindeutig die Verteilung der Kugeln ermitteln läßt! Ist das der Fall, dann gib an, wie dies geschehen kann!

Aufgabe 310812:

Rudolf macht folgende Aussage:

> "Für je drei unmittelbar aufeinanderfolgende natürliche Zahlen gilt stets: Multipliziert man die kleinste dieser drei Zahlen mit der mittleren und addiert zum Ergebnis das Produkt aus der mittleren und der größten der drei Zahlen, so ist die entstandene Summe gleich dem doppelten Quadrat der mittleren Zahl."

a) Überprüfe, ob diese Gleichheit in einigen selbstgewählten Beispielen zutrifft!

b) Beweise oder widerlege Rudolfs Aussage!

Aufgabe 310813:

Dirk zeichnet an einen Kreis k zwei Tangenten, die sich in einem Punkt P außerhalb von k schneiden. Den Mittelpunkt des Kreises nennt er M, die Berührungspunkte der Tangenten A bzw. B. Nun stellt er fest, daß der Winkel $\sphericalangle AMB$ die gleiche Größe hat wie einer der Schnittwinkel der beiden Tangenten.

a) Konstruiere einen Kreis, dazu zwei Tangenten und die von Dirk betrachteten Winkel!

b) Beweise, daß Dirks Feststellung stets für beliebige (sich schneidende) Tangenten eines Kreises zutrifft!

Aufgabe 310814:

Gegeben seien ein Kreis k und ein Punkt P, der innerhalb von k liegt, aber verschieden ist vom Mittelpunkt M des Kreises k.

Zu konstruieren sind zwei Sehnen s_1 und s_2 des Kreises k, die folgende Bedingungen erfüllen:

(1) s_1 und s_2 schneiden einander in P.

(2) s_1 und s_2 stehen aufeinander senkrecht.

(3) s_1 und s_2 haben einander gleiche Länge.

a) Beschreibe eine Konstruktion, durch die zu gegebenem Kreis k und gegebenem Punkt P zwei Sehnen s_1 und s_2 erhalten werden! Führe die beschriebene Konstruktion durch!

b) Beweise, daß zwei Sehnen, die nach Deiner Beschreibung konstruiert werden, stets die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

31. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310821:

In einer Schulklasse ist jeder Schüler 13 oder 14 Jahre alt; beide Altersangaben kommen in dieser Klasse auch wirklich vor. Addiert man alle diese (ganzzahlig gerechneten) Altersangaben, so ergibt sich die Summe 325.

Untersuche, ob durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist, wieviele Schüler in dieser Klasse sind! Ist das der Fall, so gib die Schülerzahl an!

Aufgabe 310822:

a) Klaus wählt natürliche Zahlen m und n mit $0 < m < n$ und bildet die Zahlen $p = \frac{m}{n}$ und $q = \frac{n}{m}$ Dann ordnet er die drei Zahlen 1, p, q der Größe nach, beginnend mit der kleinsten.

   Beweise, daß sich bei jeder Wahl solcher m, n stets dieselbe Reihenfolge für 1, p, q ergeben muß! Wie lautet sie?

b) Nun zeichnet Klaus auf einer Zahlengeraden die drei Punkte E, P, Q, die den Zahlen 1, p, q zugeordnet sind. Er ordnet dann die beiden Längen $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ der Größe nach.

   Zeichne für das Beispiel $m = 2$, $n = 5$ die Strecken EP, EQ auf einer Zahlengeraden, deren Einheitsstrecke (vom Nullpunkt O bis E) die Länge $\overline{OE} = 4\,\text{cm}$ hat! Beweise, daß sich (bei jeder Wahl obengenannter m, n) auch für $\overline{EP}$ und $\overline{EQ}$ stets dieselbe Reihenfolge ergeben muß! Wie lautet sie?

Aufgabe 310823:

Es sei ABC ein rechtwinkliges Dreieck mit dem rechten Winkel bei C. Der Winkel $\sphericalangle BAC$ habe die Größe $\alpha = 30°$. Der Mittelpunkt der Seite AB sei D, der Schnittpunkt der drei Winkelhalbierenden des Dreiecks ABC sei S.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen $\overline{CS} = \overline{DS}$ folgt!

Aufgabe 310824:

a) Konstruiere einen Kreis mit dem Radius 3 cm, zwei zueinander parallele Tangenten t_1, t_2 sowie eine dritte Tangente t_3 an diesen Kreis! Für die Schnittpunkte A, B von t_3 mit t_1 bzw. mit t_2 und für den Mittelpunkt M des Kreises stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\sphericalangle AMB$ auf!

b) Beweise, daß diese Vermutung stets zutrifft, wenn t_1, t_2, t_3 drei Tangenten an einen Kreis sind und $t_1 \parallel t_2$ ist!

c) Beweise, daß dann auch stets für den Schnittpunkt Q, den AB mit der Parallelen p durch M zu t_1 und t_2 hat, $\overline{AQ} = \overline{MQ}$ gilt!

31. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310831:

Eine Schachtel B ist mit blauen Kugeln gefüllt, eine andere Schachtel R mit roten Kugeln. Die Anzahl der roten Kugeln beträgt $\frac{15}{17}$ der Anzahl der blauen Kugeln.

Aus der Schachtel B kann man $\frac{2}{5}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie immer noch mehr als 1 000 Kugeln. Aus der Schachtel R kann man $\frac{3}{7}$ ihres Inhalts herausnehmen; danach enthält sie weniger als 1 000 Kugeln.

Untersuche, ob durch diese Angaben die Anzahlen der Kugeln eindeutig bestimmt sind, die ursprünglich in den Schachteln waren! Wenn das der Fall ist, nenne diese beiden Anzahlen!

Aufgabe 310832:

Sechs Spieler trugen ein Schachturnier aus, in dem jeder Spieler gegen jeden anderen genau eine Partie spielte. Wie üblich gab es bei einem unentschiedenen Spiel für jeden der beiden Spieler einen halben Punkt und sonst für den Gewinner 1 Punkt, für den Verlierer 0 Punkte. Nach dem Abschluß des Turniers machte ein Beobachter die Feststellung, daß keine zwei der sechs Spieler die gleiche Punktzahl erreicht hatten.

Gesucht ist die größtmögliche Punktzahl, die in einem solchen Turnier für den Letztplatzierten (d.h. für den Spieler mit der niedrigsten Punktzahl) erreichbar ist.

a) Nenne diese Zahl und beweise, daß für den Letztplatzierten keine größere Punktzahl möglich ist, wenn nur vorausgesetzt wird, daß die Feststellung des Beobachters zutrifft!

b) Zeige ferner - z. B. mit einer möglichen Ergebnistabelle der einzelnen Spiele -, daß es Ergebnisse geben kann, bei denen (die Feststellung des Beobachters zutrifft und) der Letztplatzierte die von dir genannte Punktzahl wirklich erreicht!

Aufgabe 310833:

Gegeben sei ein Dreieck ABC. Auf der Seite BC dieses Dreiecks seien ferner ein Punkt D zwischen B und C sowie ein Punkt E zwischen D und C gegeben. Gesucht sind zwei Punkte F, G, mit denen die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

(1) F liegt auf AC.

(2) G liegt auf AB.

(3) $DEFG$ ist ein Parallelogramm.

a) Beweise, daß für jedes Dreieck ABC mit den Punkten D, E in beschriebener Lage gilt: Wenn zwei Punkte F, G die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen, dann können sie (aus den gegebenen A, B, C, E) konstruiert werden;

b) Beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise, daß auch umgekehrt F und G, wenn sie nach deiner Beschreibung konstruiert werden, die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

d) Wähle A, B, C, D, E wie genannt und führe die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Aufgabe 310834:

Untersuche für alle rationalen Zahlen a, b mit $a \geq 2$, $b \geq 2$, ob bzw. unter welchen Bedingungen das Produkt der Zahlen a, b kleiner als die Summe, gleich der Summe oder größer als die Summe von a und b ist!

Aufgabe 310835:

Es sei $ABCDEF$ ein gerades dreiseitiges Prisma mit $AD \parallel BE \parallel CF$. Die Deckfläche DEF sei ein rechtwinkliges Dreieck mit E als Scheitel des rechten Winkels. Weiterhin sei S der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden des Dreiecks DEF.

Beweise, daß aus diesen Voraussetzungen stets $\overline{SB} < \overline{SA}$ folgt!

Aufgabe 310836:

Von einem Dreieck ABC sind gegeben:

Die Seitenlänge $a = \overline{BC} = 845\,\text{cm}$ die Länge $h_a = \overline{AE} = 840\,\text{cm}$ der auf BC senkrechten Höhe und die Länge $h_c = \overline{CD} = 780\,\text{cm}$ der auf AB senkrechten Höhe.

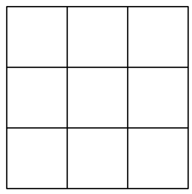
Berechne für jedes Dreieck ABC, bei dem diese Längen auftreten, die Seitenlängen $c = \overline{AB}$ und $b = \overline{AC}$!

32. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320811:

In die Felder eines 3×3-Quadrates (siehe Abbildung) sollen die Zahlen



-0,5;   1;   -2;   2,5;   -3,5;
4;   -5;   5,5;   -6,5

so eingetragen werden, daß in jedes Feld genau eine dieser Zahlen kommt und dabei in allen drei Zeilen, in allen drei Spalten und in allen beiden Diagonalen die gleiche Summe entsteht.

a) Gib eine Eintragung an, die alle diese Forderungen erfüllt!

b) Untersuche, ob es noch andere solche Eintragungen gibt, die sich nicht nur durch Drehung oder Spiegelung von einer gefundenen unterscheiden!

Aufgabe 320812:

Ein Holzwürfel wurde mit den drei Farben Rot, Gelb und Blau angestrichen, jedes der sechs Quadrate seiner Oberfläche mit einer dieser Farben. Dabei wurde jede der drei Farben mindestens einmal verwendet. Anschließend wurde der Würfel in 27 kleine Würfel zersägt. Auf keinem dieser 27 Würfel waren nun die beiden Farben Blau und Gelb vorhanden.

Ist durch diese Angaben die Verteilung der Farben auf die Oberfläche des ursprünglichen Würfels eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, beschreibe diese Verteilung!

Aufgabe 320813:

Es sei $ABCD$ ein Viereck, dessen Innenwinkel sämtlich kleiner als 180° sind.

Beweise, daß in jedem solchen Viereck die Summe der Längen der Diagonalen AC und BD stets

a) kleiner als der Umfang des Vierecks $ABCD$, aber

b) größer als der halbe Umfang des Vierecks $ABCD$ ist!

Aufgabe 320814:

Alexander beobachtete zwei Kerzen, eine weiße und eine halb so lange rote. Beide wurden gleichzeitig angezündet; nach 2 Stunden war die weiße Kerze heruntergebrannt, die rote (da sie breiter war) erst nach 5 Stunden.

Wie lange nach dem Anzünden hatte es bis zu dem Zeitpunkt gedauert, an dem beide Kerzen einander genau gleichlang gewesen waren?

32. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320821:

Herr Schulz, der In diesem Jahrhundert geboren wurde, stellt fest, daß er an seinem Geburtstag im Jahr 1992 ein Lebensalter erreicht, das (in Jahren gerechnet) gleich dem Vierfachen der Quersumme der Jahreszahl seines Geburtsjahres ist.

Untersuche, ob es genau ein Jahr gibt, mit dem als Geburtsjahr die Feststellung von Herrn Schulz zutrifft! Ist das der Fall, so nenne diese Jahreszahl!

Aufgabe 320822:

Auf einer Kreislinie k um einen Punkt M seien drei Punkte A, B, C so gelegen, daß $MA \perp MB$ sowie $\overline{BC} = \overline{MB}$ gilt und daß sich die Strecken AC und MB in einem Punkt S schneiden.

Untersuche, ob durch diese Voraussetzungen die Größe den Winkels $\sphericalangle BSC$ eindeutig bestimmt ist! Wenn das der Fall ist, dann gib diese Größe an!

Aufgabe 320823:

Es sei $ABCD$ ein Tangentenviereck, sein Umfang sei u, der Radius seines Inkreises sei r.

Zeige, daß bereits durch die alleinige Vorgabe von u und r der Flächeninhalt von $ABCD$ eindeutig bestimmt ist; ermittle diesen Flächeninhalt in Abhängigkeit von u und r!

Hinweis: Ein Viereck ABCD ist genau dann ein Tangentenviereck, wenn es einen Kreis enthält, der jede Seite von ABCD In einem Punkt zwischen den Endpunkten dieser Seite berührt. Dieser Kreis heißt dann der Inkreis von ABCD.

Aufgabe 320824:

In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage stehen drei Kerzen, in der rechten steht eine Kerze. Die vier Kerzen sind so beschaffen, daß jede von ihnen während je einer Stunde Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von Ihnen. Jede der drei linken Kerzen würde zum vollständigen Herunterbrennen 9 Stunden brauchen, die rechte Kerze 12 Stunden.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals Im Gleichgewicht?

32. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320831:

Sind a, b, c die Hunderter-, Zehner- bzw. Einerziffern einer dreistelligen natürlichen Zahl, so sei diese Zahl kurz durch $\overline{abc}$ bezeichnet. Ebenso sei jeweils eine zweistellige Zahl mit Zehner- bzw. Einerziffer b und c durch $\overline{bc}$ bezeichnet.

Ermittle alle diejenigen a, b, c, für die $\overline{abc}$ eine dreistellige und $\overline{bc}$ eine zweistellige Zahl ist, so daß die Gleichung $\overline{abc} = \left(\overline{bc}\right)^b$ gilt!

Aufgabe 320832:

Um einen Behälter mit Wasser füllen zu können, soll eine Anzahl Röhren angelegt werden. Durch jede Röhre soll das Wasser gleichmäßig strömen (d.h. in gleichen Zeiten gleichviel Wasser). In einer Stunde soll durch jede Röhre die gleiche Wassermenge zuströmen wie durch jede andere Röhre.

Für die Anzahl der Röhren gibt es drei Vorschläge. Nach dem zweiten Vorschlag, zwei Röhren weniger als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden länger dauern als beim ersten. Nach dem dritten Vorschlag, vier Röhren mehr als beim ersten Vorschlag zu nehmen, würde das Füllen des Behälters zwei Stunden kürzer dauern als beim ersten.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl der Röhren und die Zeit zum Füllen des Behälters beim ersten Vorschlag!

Aufgabe 320833:

Beweise die beiden folgenden Aussagen (a) und (b) für jedes spitzwinkliges Dreieck ABC mit einem im Innern des Dreiecks gelegenen Punkt P! Dabei seien folgende Bezeichnungen verwendet:

Winkel	Größe
$\sphericalangle PBA$	δ
$\sphericalangle PCA$	δ'

Winkel	Größe
$\sphericalangle PCB$	ϵ
$\sphericalangle PAB$	ϵ'

Winkel	Größe
$\sphericalangle PAC$	φ
$\sphericalangle PBC$	φ'

a) Wenn $\delta = \delta$ und $\epsilon = \epsilon'$ und $\varphi = \varphi'$ gelten, dann ist P der Höhenschnittpunkt des Dreieck ABC.

b) Wenn P der Höhenschnittpunkt des Dreiecks ABC ist dann gelten die Gleichungen $\delta = \delta'$ und $\epsilon = \epsilon'$ und $\varphi = \varphi'$.

Aufgabe 320834:

Ein Radfahrer fuhr mit konstanter Geschwindigkeit über eine 100 m lange Brücke. Als er auf dieser Brücke 40 m zurückgelegt hatte, traf er einen zweiten Radfahrer, der ihm mit gleicher Geschwindigkeit entgegenkam. Ein Auto, das auf derselben Strecke mit der Geschwindigkeit 70 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ fuhr, begegnete dem zweiten Radfahrer in dem Augenblick, als dieser die Brücke verließ, und es überholte den ersten Radfahrer genau am Ende der Brücke.

Ermittle aus diesen Angaben die Geschwindigkeit der Radfahrer!

Aufgabe 320835:

Beweise, daß für jedes Dreieck ABC die folgende Aussage gilt!

> Das Verhältnis des Flächeninhalts des Dreiecks ABC zum Flächeninhalt seines Inkreises ist gleich dem Verhältnis des Umfangs des Dreiecks ABC zum Umfang seines Inkreises.

Hinweis: Als *Inkreis* eines Dreiecks bezeichnet man denjenigen Kreis, der alle drei Seiten dieses Dreiecks von Innen berührt.

Aufgabe 320836:

In der linken Waagschale einer gleicharmigen Waage steht eine Kerze, in der rechten stehen drei Kerzen. Die vier Kerzen sind so beschaffen, daß jede von ihnen während je einer Minute Brenndauer die gleiche Masse verliert wie jede andere von ihnen.

> Die linke Kerze würde zum vollständigen Herunterbrennen 84 Minuten brauchen,
>
> von den drei rechten Kerzen die erste 70 Minuten,
>
> die zweite 63 Minuten,
>
> die dritte 35 Minuten.

Die vier Kerzen werden gleichzeitig angezündet. Wie lange danach ist die Waage erstmals im Gleichgewicht?

33. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330811:

Nach dem Kauf eines neuen Autos muß man bekanntlich im Lauf der Zeit mit einem Wertverlust rechnen. Für diesen Wertverlust seien im Lauf des ersten Jahres 20%, im zweiten Jahr weitere 15% und im dritten Jahr nochmals weitere 15% gerechnet, wobei alle diese Prozentangaben vom ursprünglichen Kaufpreis verstanden werden. Der jeweils entstehende verminderte Wert wird als Zeitwert bezeichnet.

a) Frau Grübler bezahlte für ihren Neuwagen 23 800 DM. Berechne den Zeitwert nach zwei Jahren!

b) Herr Bauer will sein Auto nach drei Jahren verkaufen. Zu diesem Zeitpunkt würde der Zeitwert des Wagens 16 200 DM betragen. Um 10% dieses Wertes verringert sich jedoch aufgrund eines Unfalls der Zeitwert nochmals.

   Wieviel Prozent des ursprünglichen Kaufpreises beträgt nun der so entstandene verringerte Zeitwert?

c) Herr Neumann kauft ein neues Auto für 43 000 DM. Er möchte den Wagen nach vier Jahren zum Zeitwert verkaufen, den er als 18 275 DM annimmt.

   Welchen Prozentsatz (vom ursprünglichen Kaufpreis) hat er dabei für den Wertverlust im vierten Jahr zugrundegelegt?

Aufgabe 330812:

Ermittle alle Möglichkeiten, die leeren Felder im folgenden Rechenschema so durch Ziffern zu ersetzen, daß eine richtig gerechnete Multiplikationsaufgabe entsteht!

```
  □8□  4□2
----------
       7□□
      3□□
     □□□□
----------
     □□□□□0
```

Aufgabe 330813:

Sebastian betrachtet eine dreistellige natürliche Zahl und stellt fest:

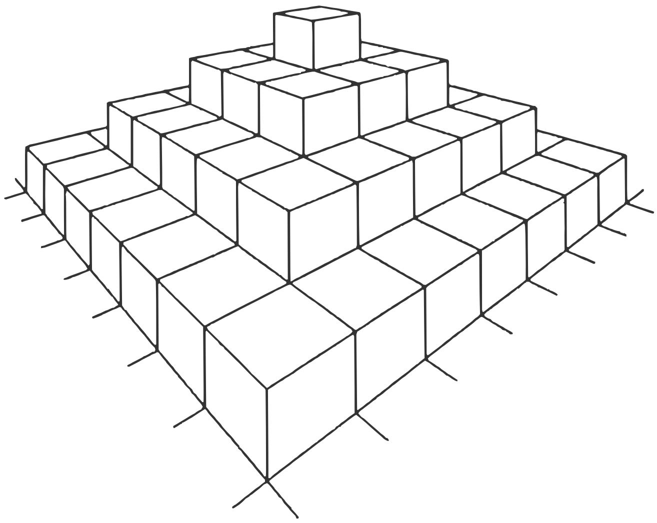
(1) Setzt man vor diese dreistellige Zahl eine Ziffer 5, so ist die entstandene vierstellige Zahl eine Quadratzahl.

(2) Hängt man aber an die (ursprüngliche dreistellige) Zahl eine Ziffer 1 an, so ist die entstandene vierstellige Zahl ebenfalls eine Quadratzahl.

Weise nach, daß es genau eine dreistellige Zahl gibt, mit der die Bedingungen (1) und (2) erfüllt werden; ermittle diese Zahl!

Aufgabe 330814:

Ria baut aus Würfeln der Kantenlänge 2 cm einen pyramiden-artigen Körper. Er besteht aus Schichten, die jeweils eine Quadratfläche vollständig bedecken. Die Abbildung zeigt das Prinzip seines Aufbaues. Die Gesamthöhe dieses Körpers beträgt 10 cm.



Als "Sichtfläche" eines aus Würfeln zusammengesetzten Körpers sei die Gesamtheit aller von oben oder von den Seiten sichtbaren Teilflächen des Körpers verstanden. Zu dieser "Sichtfläche" gehören also keine Flächen, die - wie die Grundfläche des von Ria gebauten Körpern - nur von unten zugänglich sind.

a) Aus wieviel Würfeln besteht dieser Körper?

b) Ria streicht die "Sichtfläche" dieses Körpers farbig an.

In wievielen der Würfel sind dann sechs, fünf, vier, drei bzw. zwei Flächen, eine bzw. keine Fläche farbig angestrichen?

c) Beate entfernt eine Anzahl derjenigen Teilwürfel, die mindestens eine farbig angestrichene Fläche haben. Sie wählt diese Teilwürfel so, daß der übrigbleibende Körper eine ebenso große "Sichtfläche" hat wie der ursprüngliche Körper. Unter Einhaltung dieser Bedingung wählt Beate die Anzahl der zu entfernenden Teilwürfel aber möglichst groß. Wie groß ist diese Anzahl?

d) An dem von Beate übriggelassenen Körper streicht Ria von neuem dessen "Sichtfläche" farbig an. Danach entfernt wiederum Beate nach denselben Bedingungen wie in c) eine möglichst große Anzahl von Teilwürfeln mit je mindestens einer farbigen Fläche. Wie groß ist diese Anzahl?

Hinweis: Zu b),c),d) werden nur Beschreibungen (gegebenenfalls auch Skizzen), aber keine Begründungen verlangt.

Anregung: Läßt sich die in c), d) begonnene Abfolge von Teilaufgaben noch sinngemäß fortsetzen?

33. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330821:

Zu Beginn einer Feier waren insgesamt anwesend: Genau viermal so viele Frauen wie Männer. Nachdem vier Ehepaare die Feier verlassen hatten, waren genau fünfmal so viele Frauen wie Männer auf der Feier.

Wieviele Personen waren insgesamt zu Beginn auf der Feier gewesen?

Aufgabe 330822:

Susann läßt sich je eine natürliche Zahl von Xaver, Yvonne und Zacharias sagen. Sie teilt ihnen dann die Summe dieser drei Zahlen mit. Jeder multipliziert die mitgeteilte Summe mit der ursprünglich von ihm genannten Zahl. So erhält Xaver das Ergebnis 240, Yvonne 270 und Zacharias 390.

Untersuche, ob hierdurch die drei ursprünglich genannten Zahlen eindeutig bestimmt sind! Ist dies der Fall, so gib diese Zahlen an!

Aufgabe 330823:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat, seine Seitenlänge sei a. Die Seite AB werde über B hinaus um die Länge a bis E verlängert, die Seite BC über C hinaus um die Länge a bis F, die Seite CD über D hinaus um a bis G, die Seite DA über A hinaus um a bis H.

a) Beweise aus diesen Voraussetzungen, daß $EFGH$ ein Quadrat ist!

b) Wie oft ist der Flächeninhalt des Quadrates $ABCD$ in dem Flächeninhalt von $EFGH$ enthalten?

Aufgabe 330824:

Für jedes Dreieck ABC bezeichne H den Fußpunkt der auf BC senkrechten Höhe und W den Schnittpunkt von BC mit der Winkelhalbierenden durch A.

a) Welche Größe muß der Winkel $\sphericalangle WAH$ in einem gleichschenkligen Dreieck ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$ haben, in dem der Innenwinkel $\sphericalangle ACB$ die Größe 48° hat?

b),c) Gibt es gleichschenklige Dreiecke ABC mit $\overline{AC} = \overline{BC}$, bei denen der Winkel $\sphericalangle WAH$

b) die Größe 12°,

c) die Größe 60°

hat? Ermittle jeweils alle diejenigen Werte, die als Größe des Basiswinkels $\sphericalangle BAC$ in einem derartigen Dreieck möglich sind!

33. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330831:

In der Sprachfix-Schule zu Lernhausen sind 120 Schüler. Jeder von ihnen lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein, Französisch. Der Reporter Schreibklug erfährt folgende Tatsachen:

(1) Für genau 102 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 102 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Englisch, Latein.

(2) Für genau 75 der 120 Schüler gilt: Jeder von diesen 75 Schülern lernt mindestens eine der Sprachen Latein, Französisch.

(3) Genau 18 der 120 Schüler lernen nur Latein.

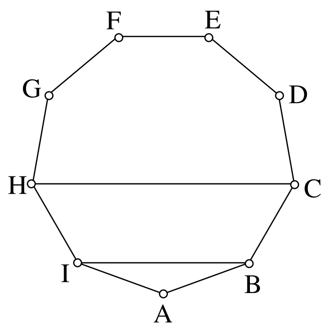
(4) Die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Englisch und Latein lernen, ist um 9 größer als die Zahl der Schüler, die genau die beiden Sprachen Französisch und Latein lernen.

(5) Keiner der 120 Schüler lernt sowohl Englisch als auch Französisch.

Schreibklug möchte berichten, wieviele der Schüler je genau eine der drei Sprachen und wieviele der Schüler je genau zwei der drei Sprachen lernen. Sind diese beiden Zahlenangaben durch die Auskünfte (1) bis (5) eindeutig bestimmt? Wenn das der Fall ist, so ermittle diese beiden Zahlenangaben!

Aufgabe 330832:

Die Abbildung zeigt ein regelmäßiges Neuneck $ABCDEFGHI$, d.h. ein Neuneck, bei dem alle Seiten dieselbe Länge und alle Innenwinkel dieselbe Größe haben.



a) Beweise, daß die Diagonalen BI und CH zueinander parallel sind!

b) Beweise, daß $CH - BI = BC$ gilt!

Aufgabe 330833:

Zu jedem Dreieck ABC seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

Die Gerade durch A und B sei u,
die Gerade durch B und C sei v,
die Gerade durch C und A sei w,
bei der Spiegelung an v gehe u in die Gerade p über, bei der Spiegelung an w gehe u in die Gerade q über.

Wie üblich seien die Größen der Innenwinkel $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle ABC$ mit α bzw. β bezeichnet. Für die folgenden Aufgaben werde stets $\alpha = 55°$ vorausgesetzt.

a) Unter welchem Winkel schneiden die Geraden p und q einander, wenn $\beta = 75°$ ist?

b) Wie groß muß β sein, damit p und q aufeinander senkrecht stehen?

c) Gib einen Wert β so an, daß sich p und q als zueinander parallel nachweisen lassen!

d),e) Stelle eine Zeichnung her, in der p und q einander in einem Punkt schneiden, der auf der selben Seite der Geraden u liegt wie C; wähle dabei das Dreieck ABC

d) mit spitzen Innenwinkel bei B.

e) mit stumpfen Innenwinkel bei B.

(Zu d) und e) wird keine Begründung verlangt.)

Aufgabe 330834:

Auf einer Strecke AB fährt ein Radfahrer X von A nach B, ein zweiter Radfahrer Y von B nach A. Beide sind zur gleichen Zeit gestartet. In B bzw. A angekommen, kehren sie sofort um, fahren dieselbe Strecke bis A bzw. B zurück und beenden dann ihre Fahrt. Es werde angenommen, daß jeder der beiden Fahrer seine Geschwindigkeit konstant beibehält und daß die zum Wenden gebrauchte Zeit vernachlässigt werden kann.

Auf der Hinfahrt begegneten sie sich 30 Minuten nach dem Start an einer Stelle, die $7,5$ km von A entfernt ist. Nochmals 30 Minuten später waren die Radfahrer wieder beide zusammen an einer Stelle zwischen A und B.

Ermittle alle Möglichkeiten dafür, wie groß nach dieser Beschreibung

a) die Länge der Strecke AB,

b) die Geschwindigkeiten der Radfahrer X und Y sein können!

Aufgabe 330835:

Eine sechsstellige natürliche Zahl heiße genau dann eine "Spiegelzahl", wenn ihre erste Ziffer gleich ihrer sechsten Ziffer, ihre zweite Ziffer gleich ihrer fünften Ziffer und ihre dritte Ziffer gleich ihrer vierten Ziffer ist.

a) Ermittle alle diejenigen "Spiegelzahlen", die zwei Ziffern 2, zwei Ziffern 5 und zwei Ziffern 7 enthalten! Ermittle die Summe s aller dieser "Spiegelzahlen"! Welches ist der größte echte Teiler von s?

b) Beweise, daß für je drei Ziffern a, b, c von denen keine zwei einander gleich sind, folgende Aussage gilt!

Die Summe aller derjenigen "Spiegelzahlen", die zwei Ziffern a, zwei Ziffern b und zwei Ziffern c enthalten, ist durch 111 111 teilbar.

Hinweis: Als echter Teiler von s bezeichnet man alle diejenigen Teiler von s, die (positiv und) kleiner als s sind.

Aufgabe 330836:

a) Berechne die Seitenlänge $b = \overline{AC}$ eines Dreiecks ABC, von dem die Seitenlänge $c = \overline{AB} = 6$ cm, die Länge $h_c = \overline{CH_c} = 5$ cm der auf AB senkrechten Höhe und die Länge $h_b = \overline{BH_b} = 2$ cm der auf AC senkrechten Höhe gegeben sind!

b) Beweise, daß es kein Dreieck ABC gibt, in dem die drei Höhenlängen $h_a = 4$ cm (Länge der auf BC senkrechten Höhe), $h_b = 2$ cm und $h_c = 5$ cm vorkommen!

33. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330841:

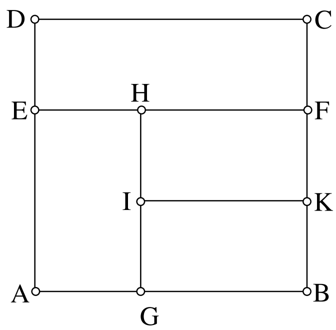
Max arbeitet zur Vorbereitung auf die Mathematik-Olympiade eine Anzahl von Aufgaben durch. Sein Freund Moritz, der ihn fragt, wie viele von diesen Aufgaben er schon gelöst habe und wie viele noch nicht, antwortet er:

> ”Die Anzahl der gelösten Aufgaben ist um 22 größer als die Anzahl der nicht gelösten Aufgaben. Addiert man zur Anzahl der gelösten Aufgaben die dreifache Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so erhält man eine Zahl, die kleiner als 60 ist. Addiert man aber zur Anzahl der gelösten Aufgaben ein Drittel der Anzahl der nicht gelösten Aufgaben, so ergibt sich eine ganze Zahl, die größer als 30 ist.”

Untersuche, ob durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie viele Aufgaben Max bearbeitet und wie viele er davon gelöst hat! Ist das der Fall, so gib diese Anzahlen an!

Aufgabe 330842:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit gegebener Seitenlänge a. Eine Parallele zu AB schneide die Seiten AD und BC in E bzw. F, eine Parallele zu AD schneide die Strecke AB und EF in G bzw. H, eine Parallele zu AB schneide die Strecken GH und BC in I bzw. K (siehe Abbildung).



a) Außer diesen Voraussetzungen soll die Bedingung erfüllt werden, daß die vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$ und $IKFH$ untereinander flächengleich sind.

   Ermittle unter dieser Bedingung den Umfang des Rechtecks $IKFH$ in Abhängigkeit von a!

b) Anstelle der in a) genannten Bedingung soll nun die Bedingung erfüllt werden, daß die vier Rechtecke $EFCD$, $AGHE$, $GBKI$, $IKFH$ untereinander umfangsgleich sind.

   Ermittle unter dieser Bedingung den Flächeninhalt des Rechtecks $IKFH$ in Abhängigkeit von a!

Aufgabe 330843:

Auf einer Ecke eines Würfels der Kantenlänge 1 cm sitzt eine Ameise. Längs jeder Kante des Würfels ist 1 g Honig verteilt. Die Ameise soll zum Endpunkt derjenigen Körperdiagonale gelangen, an deren Anfangspunkt sie sich befindet. Sie soll hierzu einen Weg von genau 7 cm Länge zurücklegen und dabei genau 7 Gramm Honig naschen.

Ermittle die Anzahl aller Wege, die unter diesen Bedingungen möglich sind!

Aufgabe 330844:

Für ein Dreieck seien folgende Bedingungen gefordert:

(1) Alle drei Seitenlängen des Dreiecks haben, in Zentimetern gemessen, ganzzahlige Maßzahlen.

(2) Der Umfang des Dreiecks beträgt 50 cm.

Ermittle die größtmögliche Anzahl von Dreiecken, die diese Forderungen erfüllen und unter denen sich keine zwei zueinander kongruenten Dreiecke befinden!

Aufgabe 330845:

Für jedes rechtwinklige Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C bezeichne D den Schnittpunkt von AB mit der Winkelhalbierenden durch C. Der Abstand, den der Punkt D von einer der beiden Katheten hat, werde mit t bezeichnet. Die Längen der Katheten seien a und b.

Beweise, daß für jedes rechtwinklige Dreieck mit diesen Bezeichnungen die Gleichung $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{t}$ gilt!

Aufgabe 330846:

Untersuche, ob es ein Paar natürlicher Zahlen größer als Null gibt, deren Produkt genau zehnmal so groß wie ihre Summe ist! Wenn dies der Fall ist, ermittle alle derartigen Zahlenpaare!

34. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340811:

Anja, Bernd und Christina haben am gleichen Tag Geburtstag.

> An diesem Tag sagt Anja zu Christina: "$\frac{3}{4}$ deines Alters sind ebenso viele Jahre wie $\frac{2}{3}$ meines Alters."
>
> Bernd sagt zu Christina: "$\frac{3}{4}$ deines Alters sind ebenso viele Jahre wie die Hälfte meines Alters."
>
> Christina sagt: "Die Summe unserer drei Altersangaben in Jahren ausgedrückt, beträgt 58."

Zeige, daß durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wie alt Anja, Bernd und Christina sind! Nenne diese drei Altersangaben!

Aufgabe 340812:

Eine dreistellige natürliche Zahl werde genau dann *"symmetrisch"* genannt, wenn ihre Hunderterziffer gleich ihrer Einerziffer ist.

a) Bilde alle diejenigen dreistelligen symmetrischen Zahlen, in denen nur Ziffern 0, 1, 2 vorkommen (jede eventuell auch mehrfach oder gar nicht)! Eine Begründung wird nicht verlangt.

b) Bilde alle diejenigen dreistelligen symmetrischen Zahlen, die durch 6 teilbar sind und in denen nur die Ziffern 2, 5, 8 vorkommen! Beweise, daß genau die von Dir angegebenen Zahlen die geforderten sind!

c) Ermittle *die Anzahl aller* dreistelligen symmetrischen Zahlen!

d) Ermittle *die Summe aller* dreistelligen symmetrischen Zahlen!

Aufgabe 340813:

Zeichne zwei Kreise k_1 und k_2 mit gemeinsamem Mittelpunkt M! Zeichne dann zwei Geraden g und h, die durch M gehen! Einen der Schnittpunkte von k_1 mit g bezeichne mit A, einen der Schnittpunkte von k_2 mit h bezeichne mit B! Weiterhin bezeichne mit C denjenigen Schnittpunkt von k_2 mit g, für den M *zwischen* A *und* C liegt; und bezeichne mit D denjenigen Schnittpunkt von k_1 mit h, für den M *zwischen* B *und* D liegt!

Untersuche, ob für so konstruierte Punkte A, B, C, D stets eine der Aussagen $\overline{AB} < \overline{CD}$, $\overline{AB} = \overline{CD}$, $\overline{AB} > \overline{CD}$ gilt! Wenn das für eine dieser Aussagen der Fall ist, beweise dies!

Aufgabe 340814:

An einer Analog-Uhr (einer Uhr mit Minutenzeiger und Stundenzeiger) kann man den Winkel zwischen den Zeigern so messen, daß man die Gradzahl angibt, um die man den Minutenzeiger im Uhrzeigersinn drehen müßte, bis er den (hierbei unbeweglich gedachten) Stundenzeiger erreicht.

Neben einer solchen Uhr, von der wir voraussetzen, daß sie stets genau geht, denken wir eine Digitaluhr betrachtet, die ebenfalls genau geht, d.h.: Wir setzen voraus, daß sich ihre Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige stets zu Beginn jeder Sekunde auf die richtige Zahlenangabe einstellt.

a) Welche Zahlen zeigt die Digitaluhr zu allen denjenigen Zeitpunkten zwischen 9.30 Uhr und 12.30 Uhr, in denen die beiden Zeiger der Analog- Uhr genau aufeinander zu liegen kommen?

b) Wie viele Minuten nach 9.30 Uhr bilden die beiden Zeiger der Analog-Uhr erstmals einen ebenso großen Winkel miteinander wie 9.30 Uhr?

   Hinweis: Fällt ein Zusammenhang mit den Ergebnissen der Aufgabe a) auf?

c) Welche Zahlen zeigt die Digitaluhr zu allen denjenigen Zeitpunkten zwischen 3 Uhr und 6 Uhr, in denen die beiden Zeiger der Analog-Uhr einen Winkel von 30° miteinander bilden?

34. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340821:

Eine vierstellige natürliche Zahl heiße genau dann "symmetrisch", wenn ihre Tausenderziffer gleich ihrer Einerziffer und ihre Hunderterziffer gleich ihrer Zehnerziffer ist. Tanja behauptet, daß jede vierstellige symmetrische Zahl durch 11 teilbar ist.

a) Überprüfe diese Teilbarkeit an drei selbstgewählten Beispielen!

b) Beweise allgemein Tanjas Behauptung!

c) Wie viele vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

d) Wie viele geradzahlige vierstellige symmetrische Zahlen gibt es insgesamt?

Aufgabe 340822:

Aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sollen zwei Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ so gebildet werden, daß jede Ziffer in den Zifferndarstellungen der vier natürlichen Zahlen a, b, c, d insgesamt genau einmal verwendet wird. Für die so gebildeten Brüche soll $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$ gelten. In dem ersten der beiden Brüche soll $a = 13$ und $b = 26$ gewählt werden.

Beweise, daß es genau eine Möglichkeit gibt, den Zähler c und den Nenner d des zweiten Bruches so zu wählen, daß alle genannten Bedingungen erfüllt sind! Gib diesen zweiten Bruch an!

Aufgabe 340823:

a) Wie oft insgesamt stehen im Verlaufe von 24 Stunden (von 0.00 Uhr bis 24.00 Uhr) der Stunden- und Minutenzeiger einer Uhr senkrecht aufeinander?

b) Berechne insbesondere alle derartigen Zeitpunkte zwischen 4.00 Uhr und 5.00 Uhr! Gib diese Zeitpunkte so an, wie sie eine Digitaluhr anzeigen würde, von der wir voraussetzen, daß sie korrekt geht, d.h. zu Beginn jeder Sekunde die richtige Stunden-, Minuten- und Sekundenanzeige bringt!

Aufgabe 340824:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge $\overline{AB} = 6\,\text{cm}$. Auf der Seite AD sei Q derjenige Punkt, für den $\overline{AQ} = 4\,\text{cm}$ gilt. Für jeden Punkt P, der auf der Strecke QC liegt, bezeichne L den Fußpunkt des von P auf BC gefällten Lotes; ferner bezeichnen F_1, F_2 bzw. F_3 in dieser Reihenfolge den Flächeninhalt des Dreiecks APQ, des Dreiecks ABP bzw. des Dreiecks BCP.

a) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_1, wenn vorausgesetzt wird, daß P so auf QC gewählt wurde, daß $F_3 = 7,5\,\text{cm}^2$ gilt!

b) Ermittle die Länge der Strecke PL und den Flächeninhalt F_2, wenn vorausgesetzt wird, daß P so auf QC gewählt wurde, daß $F_1 = F_3$ gilt!

c) Beschreibe und begründe, wie man P so auf QC konstruieren kann, daß $F_2 = F_3$ gilt!

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340831:

Auf 10 Kärtchen sind die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 geschrieben, jede Ziffer auf genau einem Kärtchen. Anna wählt drei dieser Kärtchen und legt sie zweimal hintereinander auf den Tisch, das erste Mal als Zifferndarstellung der größten, das zweite Mal als Zifferndarstellung der zweitgrößten mit diesen drei Kärtchen erreichbaren Zahl.

Anna berichtet: Die Summe der beiden Zahlen, deren Zifferndarstellungen sie gelegt hat, beträgt 1 233. Ermittle alle Möglichkeiten dafür, welche zwei Zahlen Anna hiernach gelegt haben kann!

Aufgabe 340832:

Lehrer Lehmann befragt die 26 Schüler seiner Klasse, in welchen der drei Arbeitsgemeinschaften, die in dieser Klasse besucht werden, sie sind. Wahrheitsgemäß ergibt sich:

- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Fotografie sei, melden sich genau 10 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Technik sei, melden sich genau 8 Schüler.
- Auf die Frage, wer in der Arbeitsgemeinschaft Informatik sei, melden sich genau 7 Schüler.
- Genau 6 Schüler melden sich bei keiner dieser drei Fragen.

Auf dem Heimweg meint Uwe: "Genau 3 Schüler sind in allen drei Arbeitsgemeinschaften."

Michael meint: "Genau 2 Schüler sind in genau je zwei der Arbeitsgemeinschaften."

Jörg meint: "Genau 14 Schüler sind in genau je einer Arbeitsgemeinschaft."

Zeige, daß alle drei Meinungen falsch sind!

Aufgabe 340833:

Für vier Punkte A, B, C, D in einer Ebene werde vorausgesetzt:

$$\overline{AB} = 6\text{ cm}, \qquad \overline{AD} = 1\text{ cm und} \qquad \overline{AB} + \overline{BD} = 11\text{ cm}. \qquad (*)$$

Gesucht werden zwei Längenangaben x und y so, daß folgende Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für je vier Punkte, die die Voraussetzung (*) erfüllen, gilt stets $x \leq \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} \leq y$.

(2) Wenn außer (*) auch $x = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

(3) Wenn außer (*) auch $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = y$ gilt, liegen A, B, C, D auf einer gemeinsamen Geraden.

Nenne zwei Längen x, y und beweise, daß sie diese Bedingungen (1), (2), (3) erfüllen!

Aufgabe 340834:

Ein Schachturnier wurde in "Runden" ausgetragen. Diese Runden - anders als weithin üblich - so eingerichtet, daß in jeder Runde jeder Teilnehmer des Turniers genau eine Partie zu spielen hatte (es nahm also eine gerade Zahl von Spielern teil) und daß im gesamten Turnier für jeden Teilnehmer gegen jeden anderen genau eine Partie angesetzt wurde.

Michael und Robert nahmen 5 Runden lang an diesem Turnier teil, danach mußten sie leider ausscheiden. Um den übrigen Turnierablauf nicht weiter zu ändern, ließ man die Partien, die sie nach dem Turnierplan dann eigentlich noch zu spielen gehabt hätten, einfach ausfallen.

Michael erzählte seinen Freunden Herbert und Gerd, daß daher in dem gesamten Turnier (in dem sonst keine weiteren Ausfälle gab) insgesamt 38 Partien gespielt worden seien. Herbert meinte: "Diese Anzahl ist nicht möglich." Gerd entgegnet: "Doch, und wenn sie die richtige ist, so ist durch Michaels Angaben sogar eindeutig bestimmt, ob Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt haben."

Untersuche, ob Herberts oder Gerds Meinung zutrifft! Wenn Gerds Meinung zutrifft, haben dann Michael und Robert in dem Turnier gegeneinander gespielt?

Aufgabe 340835:

Auf dem Rand eines Quadrates $ABCD$ mit gegebener Seitenlänge a seien P_1, P_2, P_3 die folgenden Punkte: Es liege P_1 so auf BC, daß $\overline{BP_1} = \overline{P_1C}$ gilt, P_2 so auf CD, daß $\overline{P_2D} = 3 \cdot \overline{CP_2}$ gilt, P_3 so auf DA, daß $\overline{P_3A} = 3 \cdot \overline{DP_3}$.

Ein Punkt X bewegt sich auf den Strecken P_1B, BA, AP_3 von P_1 nach P_3. Gesucht sind auf diesem Weg (einschließlich seines Anfangs- und Endpunktes) alle diejenigen Punkte X, für die der Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$

a) möglichst klein,

b) möglichst groß ist.

Finde alle diese Punkte und berechne für jeden von ihnen auch jeweils den Flächeninhalt des Vierecks $XP_1P_2P_3$!

Hinweis: Für ein Viereck wird in dieser Aufgabe auch zugelassen, daß es "zum Dreieck entartet", wenn nämlich zwei seiner Eckpunkte miteinander zusammenfallen.

Aufgabe 340836:

a) Beweise, daß für jedes Dreieck die folgende Aussage gilt!

   Sind a und b zwei seiner Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als $\frac{a \cdot b}{2}$.

b) Beweise, daß für jedes Viereck $ABCD$ die folgende Aussage gilt!

   Sind $a = \overline{AB}$, $b = \overline{BC}$, $c = \overline{CD}$ und $d = \overline{DA}$ seine Seitenlängen, so ist sein Flächeninhalt nicht größer als

$$\frac{(a + c) \cdot (b + d)}{4}.$$

   Hinweis: Beachte, daß die zu beweisenden Aussagen sich auch auf stumpfwinklige Dreiecke und auch auf Vierecke mit einer einspringenden Ecke beziehen! (Sogenannte "überschlagene" Vierecke, bei denen zwei Gegenseiten einander schneiden, sollen allerdings nicht zugelassen werden.)

34. Mathematik-Olympiade
4. Stufe (Bundesrunde)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340841:

Die Bewohner des Planeten Quadron unterscheiden sich nach ihrem Geschlecht, und zwar gibt es, anders als auf der Erde, genau vier verschiedene Geschlechter. Politisch ist die Bevölkerung eingeteilt in genau vier Völkerstämme. Wenn der planetare Rat zusammentritt, entsendet jeder Völkerstamm genau vier Abgeordnete, von jedem Geschlecht einen.

Es ist dann eine Sitzordnung vorgeschrieben, bei der 16 Sitze in quadratförmiger Formierung zu vier Zeilen und vier Spalten angeordnet sind. In jeder Zeile und in jeder Spalte müssen alle vier Völkerstämme und alle vier Geschlechter vertreten sein.

Gib eine mögliche Sitzordnung an und bestätige, daß bei dieser Sitzordnung alle genannten Bedingungen erfüllt sind!

Aufgabe 340842:

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die den folgenden Bedingungen (1) und (2) genügen!

(1) Die Zahl n ist das Produkt von genau drei Primzahlen; je zwei dieser Primzahlen sind voneinander verschieden; jede dieser Primzahlen ist größer als 10.

(2) Die Zahl n kann als Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 600 beträgt. Die Zahl n kann aber auch als das Produkt von zwei natürlichen Zahlen dargestellt werden, deren Summe 240 beträgt.

Aufgabe 340843:

Auf einem Zeichenblatt seien drei Punkte A, B, C mit $A \neq B$, $A \neq C$ und $B \neq C$ gegeben. Gesucht sind zwei einander gleichgroße, voneinander verschiedene Kreise, von denen einer durch A, der andere durch C geht und die sich im Punkt B berühren.

Beschreibe Lagemöglichkeiten der gegebenen Punkte A, B, C, bei denen es

a) keine solchen Kreise,

b) mehr als ein Paar solcher Kreise,

c) genau ein Paar solcher Kreise gibt!

Zu (a) zeige, warum es keine solchen Kreise gibt; zu (b) bzw. (c) beschreibe und begründe je eine Konstruktion, mit der man aus den gegebenen Punkten mehrere derartige Kreispaare bzw. das eine derartige Kreispaar erhalten kann! Führe die von dir beschriebene Konstruktion durch! Wähle hierzu A, B, C jeweils in passender Lage für (b) bzw. (c) und konstruiere aus diesen A, B, C bei (b) zwei Kreispaare, bei (c) das eine Kreispaar!

Aufgabe 340844 = 340944:

Axel führt einen Kartentrick vor. Er benutzt dazu ein Skatspiel, bestehend aus jeweils 4 Karten der folgenden Arten, denen er folgende Augenwerte zuteilt:

Art der Karte	7	8	9	10	Bube	Dame	König	As
Augenwert	7	8	9	10	2	3	4	11

Seine Freunde sollen, während er nicht im Zimmer ist, nach folgender Vorschrift Kartenstapel bilden:

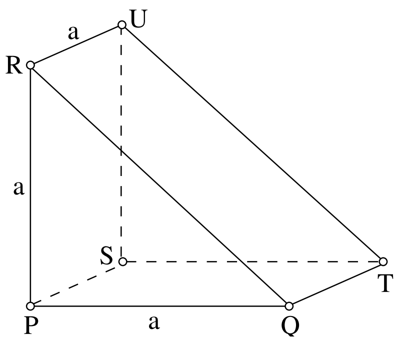
Für jeden Stapel wird zunächst eine Karte offen hingelegt, und der damit beginnende Stapel erhält so viele Punkte, wie der Augenwert dieser Karte angibt. Dann werden weitere Karten verdeckt auf den Stapel gelegt; für jede dieser Karten wird die Punktzahl des Stapels um 1 erhöht. Dies wird aber nur so lange durchgeführt, bis die Punktzahl 11 erreicht ist; der Stapel ist damit abgeschlossen. Er wird dann umgedreht, so daß die bisher unterste Karte nun verdeckt oben liegt.

1. Beispiel: 7 offen hinlegen vier Karten verdeckt darauf legen, Stapel umdrehen.
2. Beispiel: As offen hinlegen, umdrehen.

Solche Stapel werden einige Male gebildet und nebeneinander auf den Tisch gelegt. Falls am Ende Karten übrig bleiben, werden diese "Restkarten" einzeln abzählbar und verdeckt neben den Stapel gelegt.

Dann wird Axel herein gerufen. Er behauptet, er könne aus der Anzahl der fertigen Stapel und der Anzahl der Restkarten die Summe der Augenwerte der nunmehr obersten Karten der Stapel finden. Wie ist das möglich?

Aufgabe 340845:



Es sei $PQRSTU$ ein gerades dreiseitiges Prisma, dessen Grundfläche ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck PQR ist (siehe Abbildung). Die Höhenlänge des Prismas sei gleich der Kathetenlänge a des Dreiecks PQR.

Gesucht ist eine Ebene E, die parallel zu einer der quadratförmigen Seitenflächen F des Prismas verläuft und das Prisma in zwei Teilkörper zerlegt, deren Volumina sich in irgend einer Reihenfolge wie 9 : 16 verhalten.

Ermittle zu gegebenen a alle diejenigen Werte, die der Abstand zwischen der Seitenfläche F und einer solchen Ebene E betragen kann!

Aufgabe 340846:

Wie viele Paare (x, y) ganzer Zahlen x, y, die die Ungleichung

$$|x - 30| + |y - 10| < 100$$

erfüllen, gibt es insgesamt?