34. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 5
Saison 1994/1995

Aufgaben und Lösungen

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340531:

Fritz hat geträumt, er bekäme ein Paket voller Gummibärchen, wenn er drei Aufgaben (a), (b), (c) löst. Obwohl es nur ein Traum war und er nicht weiß, ob die Zahlen des Traumes genau stimmen, möchte er die Aufgaben doch lösen.

In seinem Traum hieß es:

> Ein Paket enthält 1 000 Gummibärchen. Sie sind in 50 Tüten verteilt. Der Inhalt einer Tüte kostet 1, 60 DM. Ein Kilogramm Gummibärchen kostet 20 DM. In jeder Tüte ist dieselbe Anzahl Gummibärchen wie in jeder anderen Tüte. Jedes Gummibärchen wiegt ebenso viel und kostet ebenso viel wie jedes andere Gummibärchen.

Die Aufgaben lauten:

(a) Wieviel kosten zusammengenommen die Gummibärchen in einem Paket?

(b) Wieviel wiegt der Inhalt einer Tüte?

(c) Wieviel wiegt ein Gummibärchen?

Gib die Lösungen zu (a), (b), (c) an und begründe, wie du sie erhalten hast!

Aufgabe 340532:

Aus genau 4 Stäbchen, von denen jedes etwas weniger als 1 cm Länge hat, läßt sich ein kleines Quadrat der Seitenlänge 1 cm legen:

```
 _
|_|
```

Für ein Quadrat, das aus vier der zuvor betrachteten kleinen Quadrate besteht, benötigt man genau 12 Stäbchen:

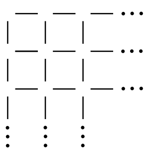
```
 _ _
|_|_|
|_|_|
```

(a) Wie viele Stäbchen genau benötigt man für ein Quadrat, das aus

(1) neun,

(2) sechzehn

dieser kleinen Quadrate besteht?

(b) 

Wie viele Stäbchen genau benötigt man, um mit diesen kleinen Quadraten ein Quadratgitter auszulegen, das 1 m lang und 1 m breit ist?

Eine Begründung wird nicht verlangt. (Allerdings ist zu empfehlen, zur Sicherheit Überlegungen anzugeben, wie sich die gesuchten Zahlen finden lassen, besonders die in (b) gesuchte Zahl.)

Aufgabe 340533:

Annette, Bernd, Christiane, Dieter und Ruth spielen folgendes Spiel: die vier Kinder außer Ruth verabreden, daß eines von ihnen einen Brief bei sich versteckt und daß dann jedes dieser Kinder drei Aussagen macht, von denen mindestens zwei wahr sind. Ruth, die nur diese Regeln und die Aussagen der vier erfährt, soll herausfinden, wer den Brief hat. Eines der vier Kinder Annette, Bernd, Christiane, Dieter hatte sich das Spiel ausgedacht, sie wissen auch, wer es war; nur Ruth weiß das nicht. Folgende Aussagen werden gemacht:

Annette:	Ich habe den Brief nicht. Entweder hat Bernd den Brief, oder Bernd hat den Brief nicht. Christiane hat sich das Spiel ausgedacht.
Bernd:	Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn Dieter. Ich habe den Brief nicht. Annette oder Christiane oder Dieter hat den Brief.
Christiane:	Entweder Bernd oder Dieter hat den Brief. Bernd hat drei wahre Aussagen gemacht. Annette hat den Brief nicht.
Dieter:	Wenn ich den Brief nicht habe, dann hat ihn Christiane. Ich habe den Brief nicht. Alle drei Aussagen von Christiane sind wahr.

Untersuche, ob durch die Regeln und die Aussagen eindeutig bestimmt ist, wer den Brief hat! Wenn das der Fall ist, gib diesen Spieler an! Stelle dann auch fest, ob alle Aussagen den Regeln entsprechen, wenn der Brief bei dem von dir angegebenen Spieler ist!

Aufgabe 340534:

In einem Schachverein wurde ein Turnier für Anfänger und für Fortgeschrittene durchgeführt. Jeder Anfänger spielte gegen jeden anderen Anfänger genau zwei Partien; jeder Fortgeschrittene spielte gegen jeden anderen Fortgeschrittenen genau zwei Partien. Diese Partien wurden so angesetzt, daß an jedem von genau 28 Spieltagen genau 3 Partien gespielt wurden. Es nahmen an dem Turnier mehr Anfänger als Fortgeschrittene teil.

Zeige, daß durch diese Angaben eindeutig bestimmt ist, wieviele Anfänger und wieviele Fortgeschrittene an dem Turnier teilnahmen! Nenne diese beiden Anzahlen!

34. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 340531:

(a) Da ein Paket 50 Tüten enthält und der Inhalt jeder Tüte 1,60 DM kostet, kosten die Gummibärchen in einem Paket zusammengenommen $50 \cdot 1,60\,\text{DM} = 80\,\text{DM}$.

(b) Da 1 000 Gramm Gummibärchen 2 000 Pfennig kosten, kostet 1 Gramm 2 Pfennig. Also kosten 80 Gramm 1,60 DM. Das ist der Preis für den Inhalt einer Tüte; dieser Inhalt wiegt also 80 Gramm.

(c) Da die 50 Tüten in einem Paket 1 000 Gummibärchen enthalten, enthält wegen $1\,000 : 50 = 20$ eine Tüte 20 Gummibärchen. Da diese, wie in (b) gefunden, 80 Gramm wiegen, wiegt ein Gummibärchen $80\,\text{g} : 20 = 4\,\text{g}$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340532:

(a) Man benötigt

(1) genau $(3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 =)$ 24 Stäbchen,

(2) genau $(4 \cdot 5 + 4 \cdot 5 =)$ 40 Stäbchen.

(b) Für dieses Quadratgitter aus $100 \cdot 100$ kleinen Quadraten benötigt man (in jeder waagerechten Reihe 101 senkrechte Stäbchen, in allen waagerechten Reihen zusammen also $100 \cdot 101$ senkrechte Stäbchen; ebenso viele waagerechte Stäbchen in allen senkrechten Reihen; insgesamt also)[1] genau $(100 \cdot 101 + 100 \cdot 101 =)$ 20 200 Stäbchen.

[1] Die Angaben in Klammem () deuten Überlegungen an, deren Wiedergabe laut Aufgabentext nicht vom Schüler verlangt war. Man kann durch solche Überlegungen auch zu der allgemeinen Aussage kommen, daß man für ein Quadrat aus $n \times n$ kleinen Quadraten genau $2 \cdot n \cdot (n + 1)$ Stäbchen benötigt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340533:

I. Da Bernds zweite und dritte Aussage einander gleichwertig sind, sind sie entweder beide wahr oder beide falsch. Nach den Regeln können sie nicht beide falsch sein, also sind sie beide wahr. Also hat Bernd den Brief nicht.

Wenn auch Bernds erste Aussage wahr ist, so folgt daher weiter: Dieter hat den Brief. Wenn aber Bernds erste Aussage falsch ist, so folgt: Christianes zweite Aussage ist falsch. Nach den Regeln müssen also Christianes erste und dritte Aussage wahr sein. Aus der ersten Aussage und daraus, daß Bernd den Brief nicht hat, folgt damit wieder: Dieter hat den Brief. (*Variante:* Man kann die Annahme, daß Bernds erste Aussage falsch wäre, wegen der eben erhaltenen Folgerung zu dem Widerspruch führen, daß Bernds erste Aussage sich dann doch als wahr erwiese. Diese Annahme scheidet damit aus.) Damit hat sich insgesamt ergeben: Wenn alle Aussagen den Regeln entsprechen, so kann eindeutig nur Dieter den Brief haben.

II. Wenn Dieter den Brief hat, so haben Bernd, Christiane und Dieter je drei wahre Aussagen gemacht, und mindestens die ersten beiden Aussagen von Annette sind wahr. Also entsprechen dann alle Aussagen den Regeln.

2.Lösungsweg, 1. Variante: Die folgende Tabelle zeigt für alle vier Versteckmöglichkeiten, welche Aussagen wahr und welche falsch sind:

Versteck	A1	A2	A3	B1	B2	B3	C1	C2	C3	D1	D2	D3
A	F	W	?	F	W	W	F	F	F	F	F	F
B	W	W	?	W	F	F	W	F	W	F	F	F
C	W	W	?	F	W	W	F	F	W	W	F	F
D	W	W	?	W	W	W	W	W	W	W	W	W

Daraus ist ersichtlich: Es gibt ein Versteck, so daß alle Aussagen den Regeln entsprechen, und dieses Versteck ist auch eindeutig bestimmt; denn in der Zeile D und nur in dieser enthält jede der vier Dreiergruppen mindestens zwei W.

Bemerkung: Die Tabelle enthält Feststellungen, die für die geforderten Untersuchungen nicht herangezogen werden müssen. So genügt z.B. die folgende (nur einige Feststellungen der Tabelle benutzende)

2. Variante:

I. Hätte Annette oder Bernd oder Christiane den Brief, so hätte Dieter (mindestens) zwei falsche Aussagen gemacht (siehe in den Zeilen A, B, C die Dreiergruppe D1, D2, D3). Also kann nur Dieter den Brief haben.

II. Wie im 1. Lösungsweg (siehe alle Dreiergruppen in der Zeile D).

Hinweis: Man beachte, daß jede "Wenn-dann"-Aussage mit falschem "Wenn"-Teil wahr ist (Aussage B1 in Zeile B und Aussage D1 in Zeile D).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340534:

Multipliziert man die Anzahl der Anfänger mit der um 1 kleineren Zahl, so erhält man die Anzahl aller von diesen Spielern gespielten Partien. Entsprechendes gilt für die von den Fortgeschrittenen gespielten Partien.

Zum Beweis[1)] kann man z.B. annehmen, daß für je zwei der betreffenden Spieler die beiden Partien so festgelegt werden, daß jeder der beiden einmal die weißen Steine bekommt. Dann kann man für jeden Spieler alle diejenigen Partien abzählen, die er insgesamt mit den weißen Steinen spielt. Einerseits hat man damit für jeden Spieler als Beitrag zu der so errechneten Zahl gerade die um 1 verringerte Anzahl der Spieler genommen; andererseits hat man insgesamt jede Partie genau einmal erfaßt.

Die folgende Tabelle zeigt, welche Anzahlen von Partien so zustandekommen können:

Anzahl der Spieler (Anfänger oder Fortgeschr.)	2	3	4	5	6	7	8	9	> 10
Anzahl der Partien	$2 \cdot 1 = 2$	$3 \cdot 2 = 6$	$4 \cdot 3 = 12$	$5 \cdot 4 = 20$	$6 \cdot 5 = 30$	$7 \cdot 6 = 42$	$8 \cdot 7 = 56$	$9 \cdot 8 = 72$	$> 10 \cdot 9 = 90$

Da genau $28 \cdot 3 = 84$ Partien gespielt wurden, muß 84 als Summe von zwei der hier aufgezählten Anzahlen darstellbar sein; dabei müssen diese beiden Summanden (wegen der unterschiedlichen Spielerzahlen) voneinander verschieden sein. Die einzige Möglichkeit hierfür ist, 84 als Summe von 12 und 72 darzustellen, das sind die Anzahlen der Partien für 4 bzw. 9 Spieler. Da mehr Anfänger als Fortgeschrittene teilnahmen, ist folglich eindeutig bestimmt: Es nahmen genau 9 Anfänger und genau 4 Fortgeschrittene teil.

[1)] Eine so ausgearbeitete Beweisführung soll nicht vom Schüler verlangt werden; vielmehr ist als ausreichend zu akzeptieren, wenn aus der Darstellung ersichtlich hervorgeht, wie die Partienzahlen gefunden werden können. Möglich ist es z.B. auch, die Partienzahlen mit der in der folgenden Tabelle gezeigten Vorgehensweise zu finden:

$0 + 2 \cdot 1$ $= 2$	$2 + 2 \cdot 2$ $= 6$	$6 + 2 \cdot 3$ $= 12$	$12 + 2 \cdot 4$ $= 20$	$20 + 2 \cdot 5$ $= 30$	$30 + 2 \cdot 6$ $= 42$	$42 + 2 \cdot 7$ $= 56$	$56 + 2 \cdot 8$ $= 72$	$72 + 2 \cdot 9$ $= 90$

Sie begründet sich in der Tatsache, daß jeweils ein neu hinzukommender Spieler die Partienzahl um das Doppelte der bisherigen Spielerzahl vergrößert.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission