34. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 5
Saison 1994/1995

Aufgaben und Lösungen

34. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 340511:

In einer Schachtel liegen 20 Buntstifte. Jeder Stift hat eine der Farben blau, gelb, rot, violett. Jede Farbe kommt mindestens einmal vor. Es gibt mehr blaue Stifte als gelbe, es gibt ebenso viele gelbe Stifte wie rote, es gibt weniger violette Stifte als rote.

Gib *alle* hiernach möglichen Verteilungen an! (Eine *Verteilung* wird angegeben, indem man angibt, wie viele Stifte von jeder Farbe in der Schachtel liegen.)

Aufgabe 340512:

Xaver und Yvette berichten: Jeder von uns hat sich eine natürliche Zahl gedacht. Wir haben diese Zahlen uns gegenseitig mitgeteilt.

Xaver sagt: Der Nachfolger meiner Zahl ist durch den Nachfolger von Yvettes Zahl teilbar.

Yvette sagt: Die Summe aus dem Nachfolger meiner Zahl und dem Nachfolger von Xavers Zahl ist eine ungerade Zahl.

Anette läßt sich das Produkt von Xavers Zahl und Yvettes Zahl sagen: Es beträgt 36.

Nenne zwei Zahlen, für die diese Aussagen zutreffen! Zeige, daß es keine weiteren derartigen Zahlen gibt!

Hinweis: Der Nachfolger einer natürlichen Zahl ist die um 1 größere Zahl. Beispielsweise hat 115 den Nachfolger 116.

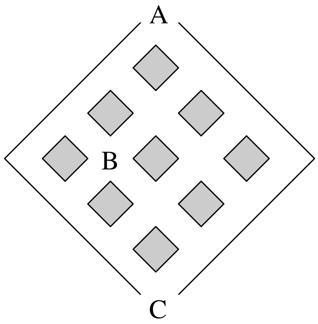
Aufgabe 340513:

$$\begin{array}{cccccccc}
\square & \square & 8 & \cdot & 4 & \square & \square \\
\hline
 & 1 & 4 & 3 & \square & & \\
 & & 2 & 1 & \square & \square & \\
 & & & \square & \square & \square & 6 \\
\hline
 & \square & \square & \square & \square & \square & \square
\end{array}$$

In die leeren Felder der Abbildung sind derart Ziffern einzutragen, daß eine richtig gerechnete Multiplikationsaufgabe entsteht. Dabei soll die Regel beachtet werden, daß in jeder Zeile am Anfang eine von 0 verschiedene Ziffer steht.

Zeige, daß es genau eine Eintragung der gesuchten Art gibt!

Aufgabe 340514:



In das Gefäß aus der Abbildung können Kugeln durch die Öffnung A hineinfallen. Auf ihrem Weg nach unten werden sie jedesmal, wenn sie an die obere Ecke eines Hindernisses kommen, entweder nach links oder nach rechts abgelenkt.

a) Wieviele derartige Wege von A nach B gibt es insgesamt?

b) Wieviele derartige Wege von B nach C gibt es insgesamt?

c) Wieviele derartige Wege von A über B nach C gibt es insgesamt?

d) Wieviele derartige Wege von A nach C gibt es insgesamt?

Erläutere für wenigstens eine der Teilaufgaben a), b), c), d), wie du die gesuchte Anzahl möglicher Wege gefunden hast!

34. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 340511:
Die folgende Tabelle zeigt alle Möglichkeiten.

violett	rot	gelb	blau
1	2	2	15
1	3	3	13
1	4	4	11
1	5	5	9
1	6	6	7
2	3	3	12
2	4	4	10
2	5	5	8
3	4	4	9
3	5	5	7
4	5	5	6

Bemerkung: Man kann diese Möglichkeiten für die Anzahlen b, g, r, v der blauen, gelben, roten bzw. violetten Stifte durch folgendes Probierverfahren finden: Man beginnt mit den kleinsten Möglichkeiten $v = 1$, $r = 2$, womit auch $g = 2$ und $b = 15$ festgelegt sind. Dann vergrößert man r so lange um 1, wie sich für den (jedesmal um 2 verkleinerten) Wert b noch $b > g$ ergibt.

Ebenso erhält man weitere Möglichkeiten, wenn man mit $v = 2$, $r = 3$, mit $v = 3$, $r = 4$ und mit $v = 4$, $r = 5$ beginnt.

Noch weitere Möglichkeiten kann es nicht geben, da $v \geq 5$, $r \geq 6$ auf $g \geq 6$, $b \leq 3$ führen würde, also die Bedingung $b > g$ nicht mehr erfüllt wäre.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340512:
Alle Möglichkeiten, 36 als Produkt zweier natürlicher Zahlen zu schreiben, sind

$$36 = 1 \cdot 36,\ 36 = 2 \cdot 18,\ 36 = 3 \cdot 12,\ 36 = 4 \cdot 9,\ 36 = 6 \cdot 6.$$

Die Summe aus den Nachfolgern zweier Zahlen ist genau dann ungerade, wenn eine dieser Zahlen gerade, die andere ungerade ist. Hiernach verbleiben genau die Möglichkeiten

$$36 = 1 \cdot 36,\ 36 = 3 \cdot 12,\ 36 = 4 \cdot 9.$$

Die hier genannten Zahlen haben die Nachfolger 2, 37 bzw. 4, 13 bzw. 5, 10. Genau im letzten Fall ist einer dieser beiden Nachfolger durch den anderen teilbar.

Also treffen die Aussagen genau dann zu, wenn Xavers Zahl 4 und Yvettes Zahl 9 lautet.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340513:

$$
\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{\boxed{A}\,\boxed{B}\;8\;\cdot\;4\,\boxed{C}\,\boxed{D}} \\
\hline
1 & 4 & 3 & \boxed{E} & & \\
 & 2 & 1 & \boxed{F} & \boxed{G} & \\
 & & \boxed{H} & \boxed{J} & \boxed{K} & 6 \\
\hline
\boxed{L} & \boxed{M} & \boxed{N} & \boxed{P} & \boxed{Q} & \boxed{R}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccc}
\multicolumn{6}{c}{\boxed{3}\,\boxed{5}\;8\;\cdot\;4\,\boxed{6}\,\boxed{7}} \\
\hline
1 & 4 & 3 & \boxed{2} & & \\
 & 2 & 1 & \boxed{4} & \boxed{8} & \\
 & & \boxed{2} & \boxed{5} & \boxed{0} & 6 \\
\hline
\boxed{1} & \boxed{6} & \boxed{7} & \boxed{1} & \boxed{8} & \boxed{6}
\end{array}
$$

Bezeichnet man die fehlenden Ziffern wie in der linken Abbildung, so folgt:

Wegen $8 \cdot 4 = 32$ muß $E = 2$ sein.

Daher muß das Vierfache des ersten Faktors 1432 betragen, also ist der erste Faktor $1432 : 4 = 358$.

Weiter muß die Zahl $358 \cdot C$ mit den Ziffern 21.. beginnen. Probiert man die Werte ≤ 5, $C = 6$, $C \geq 7$, so findet man wegen

$$358 \cdot 5 = 1790, \qquad 358 \cdot 6 = 2148, \qquad 358 \cdot 7 = 2506,$$

daß nur $C = 6$ in Frage kommt. Die Zahl $358 \cdot D$ muß auf die Ziffer 6 enden; das ist nur mit $D = 2$ oder $D = 7$ möglich. Da aber $358 \cdot 2 = 716$ nicht vier Ziffern H, J, K, 6 mit von 0 verschiedener Anfangsziffer H ergibt, verbleibt nur $D = 7$ und damit insgesamt nur die Multiplikation $358 \cdot 467$.

Wie die rechte Abbildung zeigt, führt diese Multiplikation auf eine Eintragung der gesuchten Art.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 340514:

Zur Beschreibung des Weges einer Kugel werde die Ablenkung nach links bzw. rechts durch l bzw. r angegeben.

a) Auf jedem Weg von A nach B kommt man dreimal an eine Weggabelung. Um B zu erreichen, muß man an genau zwei Gabelungen nach links, an genau einer Gabelung nach rechts gehen. Daher gibt es genau die 3 Wege

$$llr, \qquad lrl, \qquad rll.$$

b) Um von B nach C zu gelangen, muß man genau einmal nach links und genau zweimal nach rechts gehen. (Dabei handelt es sich in jedem dieser drei Fälle entweder um die Entscheidung an einer Weggabelung oder um die Fortsetzung, die durch den Rand des Gefäßes eindeutig erzwungen ist.) Hiernach gibt es genau die 3 Wege

$$lrr, \qquad rlr, \qquad rrl.$$

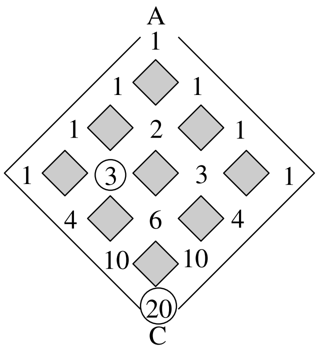
c) Um von A über B nach C zu gelangen, hat man nach jedem der drei Wege aus a) die Möglichkeit, jeden der drei Wege aus b) anzuschließen. Also gibt es insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ derartige Wege.

d) Um von A nach C zu gelangen, muß man genau dreimal nach links und genau dreimal nach rechts gehen (jeweils entweder bei einer Weggabelung oder durch den Rand des Gefäßes erzwungen). Damit gibt es genau die Wege

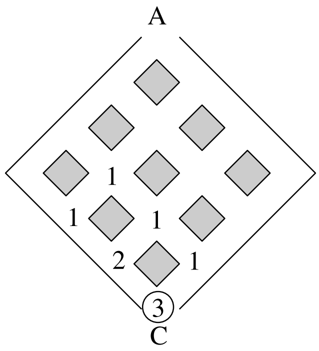
beginnend mit *lll*: *lllrrr*,
beginnend mit *llr*: *llrlrr*, *llrrlr*, *llrrrl*,
beginnend mit *lrr*: *lrllrr*, *lrlrlr*, *lrlrrl*,
beginnend mit *lrr*: *lrrllr*, *lrrlrl*, *lrrrll*,
beginnend mit *rll*: *rlllrr*, *rllrlr*, *rllrrl*,
beginnend mit *rlr*: *rlrllr*, *rlrlrl*, *rlrrll*,
beginnend mit *rrl*: *rrlllr*, *rrllrl*, *rrlrll*,
beginnend mit *rrr*: *rrrlll*,

das sind insgesamt 20 Wege.

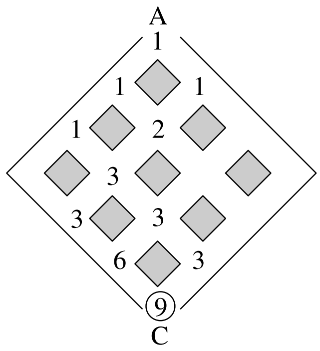
Eine *2. Lösungsmöglichkeit* wird in den folgenden Skizzen angedeutet. Die Zahlen geben an, auf wieviel Wegen man bis zu dem betreffenden Punkt kommen kann. Die Anfangszahl ist 1, jede weitere Zahl ist die Summe der links oben und rechts oben benachbarten Zahlen (soweit vorhanden).



Lösung zu a), d)



Lösung zu b)



Lösung zu c)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission