33. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Saison 1993/1994

Aufgaben und Lösungen

33. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330711:

In einer Hühnerfarm wurden 2 500 Hühner gehalten. Am ersten Tag eines Monats war Futter vorhanden, das für genau 30 Tage ausreichend war. Nach genau 14 Tagen wurden 500 Hühner geschlachtet.

Um wieviele Tage länger wurde dadurch die Zeit, für die das Futter ausreichend war?

Aufgabe 330712:

Eine sechsstellige natürliche Zahl soll, in der Reihenfolge von links nach rechts gelesen, Ziffern 3, a, 3, b, 2, c haben.

Ermittle alle Möglichkeiten, die Ziffern a, b, c so zu wählen, daß die genannte Zahl durch 90 teilbar ist!

Aufgabe 330713:

Anke berichtet, daß sie ein gleichschenkliges Dreieck mit dem Umfang 14 cm gezeichnet hat, in dem eine der drei Seiten genau dreimal so lang ist wie eine zweite der drei Seiten.

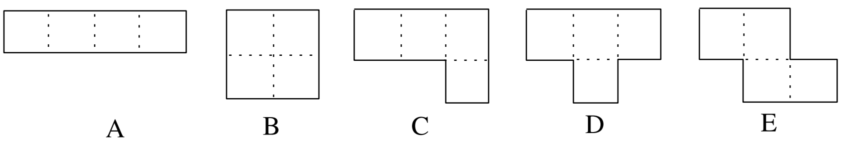
Beate meint, durch diese Angaben seien die Längen aller drei Seiten eindeutig bestimmt.

Christin meint dagegen, die Angaben könnten bei mehr als einer Möglichkeit für die drei Seitenlängen zutreffen.

Untersuche, ob Beate oder Christin recht hat! Ermittle alle vorhandenen Möglichkeiten für die drei Längen!

Aufgabe 330714:

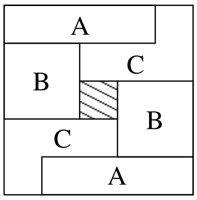
Ein Legespiel besteht aus je vier Legesteinen der in der ersten Abbildung gezeigten Formen A, B, C, D und E. Jeder dieser 20 Legesteine ist aus vier Quadraten der Seitenlänge 1 cm zusammengesetzt.



a) Die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 4 cm soll durch Legesteine einer einheitlichen Form vollständig bedeckt werden, ohne daß Legesteine sich dabei ganz oder teilweise überlappen oder über das Quadrat hinausragen.

   Untersuche, mit welchen der Formen A, B, C, D, E dies möglich ist, und mit welchen dieser Formen es sogar verschiedene Möglichkeiten gibt!

b) In der Abbildung ist gezeigt, wie die Fläche eines Quadrates der Seitenlänge 5 cm mit herausgenommenem schraffiertem Mittelquadrat durch sechs Legesteine bedeckt werden kann. Dabei ist die zusätzliche Forderung erfüllt, daß drei verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.



Gib mindestens vier weitere Möglichkeiten an, diese Forderung zu erfüllen!

c) Die Fläche einen Rechtecks mit den Seitenlängen 8 cm und 4 cm soll durch acht Legesteine bedeckt werden. Dabei sollen vier verschiedene Sorten von Steinen verwendet werden, und zwar von jeder dieser Sorten genau zwei Steine.

Gib zwei Möglichkeiten an, die sich in den verwendeten Sorten unterscheiden!

Anregung: Formuliere selbst derartige Aufgaben und suche Lösungen! Nenne auch unlösbare derartige Aufgaben!

Hinweis: Zwei Bedeckungen gelten genau dann als verschieden, wenn es keine Spiegelung oder Drehung gibt, die sie ineinander überführt. Bei den Legesteinen wird nicht zwischen ”Oberseite” und ”Unterseite” unterschieden; jeder Stein darf also auch ”gewendet” werden.

33. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 330711:

Das nach 14 Tagen vorhandene Futter hätte für 2 500 Hühner noch 16 Tage gereicht. Für 500 Hühner würde es 5 mal so lange reichen, d.h. $5 \cdot 16$ Tage. Für 2 000 Hühner reicht es $\frac{1}{4}$ dieser $5 \cdot 16$ Tage, d.s. $5 \cdot 4 = 20$ Tage. Verglichen mit 16 Tagen reicht es also um 4 Tage länger.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330712:

Da 9 und 10 zueinander teilerfremd sind, ist die genannte Zahl genau dann durch 90 teilbar, wenn sie durch 9 und durch 10 teilbar ist. Sie ist genau dann durch 10 teilbar, wenn

$$c = 0 \tag{1}$$

ist. Sie ist, wenn (1) gilt, außerdem genau dann durch 9 teilbar, wenn die Quersumme $3+a+3+b+2+c = 8+a+b$ durch 9 teilbar ist, d.h. genau dann, wenn $a+b$ bei Division durch 9 den Rest 1 läßt. Wegen $0 \le a \le 9$ und $0 \le b \le 9$ ist das genau für $a+b=1$ und $a+b=10$ der Fall. Hierfür gibt es genau die folgenden Möglichkeiten:

a	0	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b	1	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

(2)

In (1) und (2) sind somit alle Möglichkeiten für die genannte Wahl von a, b, c angegeben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330713:

Ist c die Länge der Basis und $a=b$ die Länge der Schenkel des genannten Dreiecks, so gilt nach Anjas Angaben entweder $a = 3 \cdot c$ oder $c = 3 \cdot a$. Da nach der Dreiecksungleichung $a+a>c$ gilt, scheidet jedoch der Fall $c = 3 \cdot a$ aus; also verbleibt nur die Möglichkeit

$$a = 3 \cdot c. \tag{1}$$

Nach den Angaben gilt ferner

$$2 \cdot a + c = 14\,\text{cm}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt $6 \cdot c + c = 14\,\text{cm}$, also

$$c = 2\,\text{cm} \text{ und damit} \tag{3}$$
$$a = b = 6\,\text{cm}. \tag{4}$$

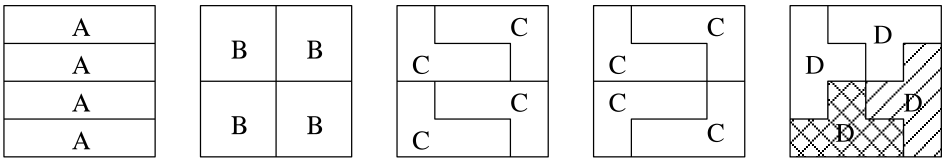
Diese Längen erfüllen nicht nur die Forderung $a + a > c$, sondern auch die Forderung $a + c > a$ der Dreiecksungleichung*). Also hat Beate recht; für die Längen gibt es genau die in (3),(4) genannte Möglichkeit.

*) *Bemerkung:* Daß ein Dreieck der genannten Art existieren muß (und daher die Längen (3), (4) als Seitenlängen eines Dreiecks möglich sind), kann auch der Angabe des Aufgabentextes entnommen werden, wonach ein solches Dreieck gezeichnet wurde.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330714:

a) Für die Formen A, B, C, D gibt es z.B. die in der Abbildung gezeigten Möglichkeiten:

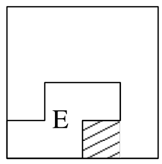


Für A gibt es (im Sinne des "Hinweises") keine weitere Möglichkeit, da jeder Stein A bereits eine Länge von 4 cm einnimmt.

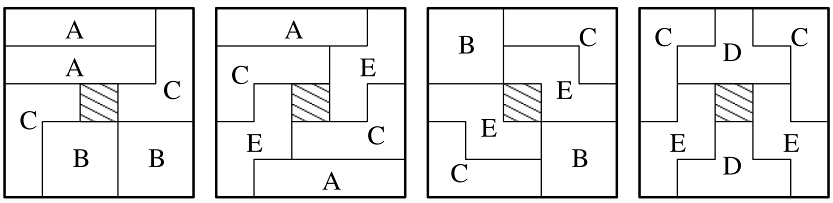
Für B gibt es ebenfalls keine weitere Möglichkeit, da jeder Stein B Länge und Breite von 2 cm hat, also die Steine nur zu zweien neben- und untereinander gelegt werden können.

Auch für D gibt es keine weitere Möglichkeit; denn an eine Ecke (z.B. links unten) des zu bedeckenden Quadrats kann ein Stein D (bis auf Drehung und Spiegelung) nur so gelegt werden, wie die doppelt schraffierte Fläche angibt; das fehlende Teilfeld rechts unten erfordert die Lage der einfach schraffierten Fläche, worauf für die beiden letzten Steine D ebenso ihre Lage folgt.

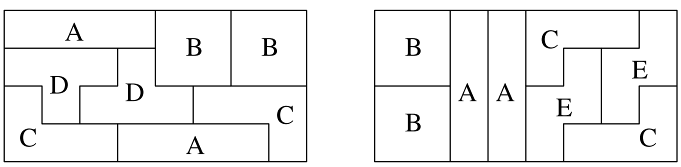
Für die Form E gibt es keine Möglichkeit; denn an eine Ecke könnte ein Stein E nur so gelegt werden, wie die Abbildung rechts zeigt, und bei jeder Möglichkeit, das schraffierte Feld mit einem weiteren Stein E zu bedecken (ohne den vorigen zu überlappen), würde dieser über das Quadrat hinausragen.



b) Die Abbildung zeigt vier Beispiele der geforderten Art.



c) Die Abbildung zeigt (mit A, B, C, D bzw. A, B, C, E als verwendeten Sorten) zwei Beispiele der geforderten Art. (Auch andere Anordnungen der Legesteine sind möglich.)



Zu weiteren Anregungen: Eine notwendige Bedingung dafür, daß eine derartige Aufgabe mindestens eine Lösung besitzt, besteht darin, daß der (in cm gemessene) Inhalt der zu bedeckenden Fläche durch 4 teilbar ist. (So ist es beispielsweise nicht möglich, eine Rechteckfläche mit den Seitenlängen 5 cm und 7 cm durch Steine der Formen A, B, C, D, E in der geforderten Weise zu bedecken.) Daß diese Bedingung nicht hinreichend ist, zeigt bereits die in a) erhaltene Aussage, wonach ein Quadrat der Seitenlänge 4 cm nicht durch vier Steine E bedeckt werden kann.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission