33. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Saison 1993/1994

Aufgaben und Lösungen

33. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 330521:

In einer kleinen Stadt stehen auf einer Straße am linken und am rechten Straßenrand insgesamt 47 Laternen. Auf jeder Straßenseite beträgt der Abstand zwischen je zwei benachbarten Laternen 35 m. Am linken Straßenrand steht je eine Laterne genau am Anfang und am Ende der Straße.

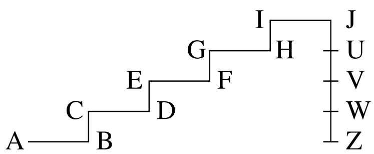
Wie lang ist diese Straße?

Aufgabe 330522:

Rolf sucht vierstellige Zahlen, in denen keine zwei gleichen Ziffern vorkommen. Der Unterschied zwischen der Zehner- und der Hunderterziffer soll 3 betragen, der Unterschied zwischen der Hunderter- und der Tausenderziffer soll 4 betragen. Beim Berechnen dieser Unterschiede soll es nicht auf die Reihenfolge der betreffenden beiden Ziffern ankommen.

Wieviele vierstellige Zahlen der gewünschten Art gibt es insgesamt? Begründe, warum es nicht mehr als von dir angegeben sein können!

Aufgabe 330523:



Die Abbildung zeigt eine treppenartig aufsteigende Linie $ABCDEFGHIJ$ und eine abwärtsgehende Strecke JZ. Alle Winkel bei B, C, D, E, F, G, H, I, J sind rechte Winkel. Die Strecken BC, DE, FG, HI haben einander gleiche Länge, doppelt so lang sind AB, CD, EF, GH, IJ, und viermal so lang ist JZ. Diese Strecke ist in vier gleichlange Strecken JU, UV, VW, WZ zerlegt.

a) Konstruiere eine derartige Figur $ABCDEFGHIJUVWZ$!

b) Finde dann durch Konstruktion die Anzahl der Schnittpunkte, die beim Schnitt der Treppenlinie $ABCDEFGHIJ$

   (1) mit der Strecke AJ zwischen A und J,

   (2) mit der Strecke AU zwischen A und U,

   (3) mit der Strecke AV zwischen A und V,

   (4) mit der Strecke AW zwischen A und W

   vorkommen!

Aufgabe 330524:

Rita berechnet die drei Zahlen

$$1 + 9 - 9 + 3 = a, \qquad 1 \cdot 9 + 9 - 3 = b, \qquad 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 3 = c.$$

Sie betrachtet weitere Möglichkeiten, in die Kästchen der Zeile

$$1 \square 9 \square 9 \square 3 =$$

Zeichen einzusetzen, die entweder $+$ oder $-$ oder $\cdot$ sind. Dabei sucht sie alle diejenigen Einsetzungen, bei denen die auszurechnende Zahl größer als 30, aber kleiner als 100 ist.

Finde alle diese Einsetzungen; weise nach, daß du alle gefunden hast! Addiere die dabei entstandenen auszurechnenden Zahlen! Zur so gefundenen Summe addiere weiterhin das Produkt der beiden kleinsten unter den zwischen 30 und 100 gefundenen Zahlen! Addiere schließlich die oben als a, b und c berechneten Zahlen!

33. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 5
Lösungen

<u>Hinweis:</u> *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

<u>Lösung 330521:</u>

Am linken Straßenrand muß genau eine Laterne mehr als am rechten Straßenrand stehen. Zählt man am linken Straßenrand die Laterne am Ende der Straße nicht mit, so stehen auf beiden Seiten der Straße gleich viele Laternen, also $46 : 2 = 23$ Stück.

Also ist die Straße $23 \cdot 35$ m $= 805$ m lang.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

<u>Lösung 330522:</u>

Die Tausenderziffer einer gesuchten Zahl kann nicht 0 sein, da die Zahl sonst nicht vierstellig wäre. Ist die Tausenderziffer 1, 2 oder 3, so kann die Hunderterziffer nicht um 4 kleiner sein, sie muß also um 4 größer sein, d.h. 5, 6 bzw. 7 lauten. Bei der Tausenderziffer 6, 7, 8 bzw. 9 kann die Hunderterziffer nicht um 4 größer sein. Nur wenn die Tausenderziffer 4 oder 5 lautet, ist jeweils sowohl die um 4 kleinere als auch die um 4 größere Hunderterziffer möglich.

Ähnlich gibt es zu den Hunderterziffern 0, 1, 2 nur die um 3 größere und zu 7, 8, 9 nur die um 3 kleinere Zehnerziffer, während für die Hunderterziffern 3, 4, 5, 6 beide Möglichkeiten bestehen.

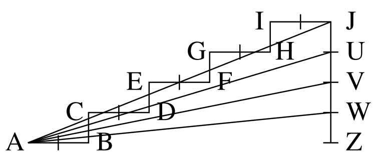
Daher gibt es genau die folgenden Möglichkeiten, die ersten drei Ziffern gesuchter Zahlen zusammenzustellen:

158, 152, 269, 263, 374, 403, 485, 514, 596, 625, 730, 736, 841, 847, 958, 952.

Da in jeder dieser 16 Zusammenstellungen genau drei verschiedene Ziffern auftreten, gibt es jedesmal für die noch fehlende Einerziffer genau 7 Möglichkeiten. Die Anzahl aller Zahlen der gesuchten Art beträgt daher $7 \cdot 16 = 112$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

<u>Lösung 330523:</u>



a) Die Abbildung zeigt die zu konstruierende Figur; zusätzlich wurden die Strecken AJ, AU, AV, AW konstruiert.

Als gesuchte Anzahlen von Schnittpunkten sind daran ersichtlich:

b) 7, c) 3, d) 1, e) 1.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 330524:

Die auszurechnende Zahl kann nur dann größer als 30 sein, wenn mindestens in einem der beiden Kästchen zwischen 9 und 9 bzw. zwischen 9 und 3 das Zeichen · steht.

Steht es zwischen 9 und 3, so kann davor nicht − stehen (es würde eine zu große Zahl subtrahiert), aber auch nicht · (denn 1 durch eine Rechenoperation +, − oder · mit $9 \cdot 9 \cdot 3 = 243$ verbunden, gibt kein Ergebnis zwischen 30 und 100). Also muß davor dann + stehen. Ferner kann dann zwischen 1 und 9 nicht − stehen (wieder würde eine zu große Zahl subtrahiert).

Steht das Zeichen zwischen 9 und 9, so kann danach nur + oder − stehen (weil · eben schon widerlegt wurde) und davor nicht − (es würde eine zu große Zahl subtrahiert).

Also entstehen genau bei den Ersetzungen

$$\begin{aligned}
1 + 9 + 9 \cdot 3 &= 37,\\
1 \cdot 9 + 9 \cdot 3 &= 36,\\
1 + 9 \cdot 9 + 3 &= 85,\\
1 \cdot 9 \cdot 9 + 3 &= 84,\\
1 + 9 \cdot 9 - 3 &= 79,\\
1 \cdot 9 \cdot 9 - 3 &= 78
\end{aligned}$$

auszurechnende Zahlen zwischen 30 und 100.

Mit der Summe s dieser Zahlen ergeben die weiteren geforderten Additionen

$$\begin{aligned}
s = 37 + 36 + 85 + 84 + 79 + 78 &= 399\\
36 - 37 &= 1332\\
a + b + c = 4 + 15 + 243 &= 262\\
&= \underline{1993}
\end{aligned}$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission