32. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Saison 1992/1993

Aufgaben und Lösungen

32. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 320711:

Karsten, Lutz, Mike und Norbert sammelten Pilze. Anschließend vergleichen sie ihre Sammelergebnisse und stellen fest:

(1) Norbert sammelte mehr als Mike.

(2) Karsten und Lutz sammelten zusammen ebenso viel wie Mike und Lutz zusammen.

(3) Karsten und Norbert sammelten zusammen weniger als Lutz und Mike zusammen.

Untersuche, ob aus diesen Angaben

a) genau einer der vier Jungen als Sammler der meisten Pilze,

b) genau einer der vier Jungen als Sammler der wenigsten Pilze

hervorgeht! Gib jeweils, wenn das der Fall ist, den Namen des betreffenden Jungen an!

Aufgabe 320712:

Kathrins Aquarium hat die Form eines oben offenen Quaders. Es ist 80 cm lang, 40 cm breit und 42 cm hoch. Der Wasserspiegel befindet sich 7 cm vom oberen Rand entfernt.

Untersuche, ob man zusätzlich noch 10 Liter Wasser in dieses Aquarium gießen kann, ohne daß es überläuft!

Aufgabe 320713:

Ein Wasserbehälter soll durch zwei Röhren gefüllt werden. Zum Füllen nur durch die erste Röhre wären 3 Stunden erforderlich, zum Füllen nur durch die zweite Röhre 2 Stunden.

In wieviel Minuten ist der Behälter voll, wenn durch beide Röhren gleichzeitig gefüllt wird?

Aufgabe 320714:

In einem Dreieck ABC sei D der Mittelpunkt der Seite AB. Die Strecken AD und CD seien einander gleichlang, die Größe des Innenwinkels $\sphericalangle BCD$ im Teildreieck BCD betrage 35°.

Ermittle aus diesen Angaben die Größen der Innenwinkel des Dreiecks ABC!

32. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 320711:

Für die Sammelergebnisse K, L, M, N von Karsten, Lutz, Mike bzw. Norbert folgt aus den Angaben: Nach (1) gilt

$$N > M. \tag{4}$$

Nach (2) gilt $K + L = M + L$, also

$$K = M. \tag{5}$$

Nach (3) gilt

$$K + N < L + M;$$

hieraus und aus (5) folgt

$$N < L. \tag{6}$$

Mit (6), (4), (5), also $L > N > M = K$, ist gezeigt:

a) Aus den Angaben geht genau Lutz als Sammler der meisten Pilze hervor.

b) Aus den Angaben geht nicht genau einer der vier Jungen als Sammler der wenigsten Pilze hervor (sondern jeder der beiden Jungen Mike und Karsten).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 320712:

In das Aquarium paßt oberhalb des Wasserspiegels noch ein Quader von 80 cm Länge, 40 cm Breite und 7 cm Höhe, also vom Volumen

$$80 \cdot 40 \cdot 7\,\text{cm}^3 = 22\,400\,\text{cm}^3 = 22,4\,\text{l}.$$

Da dies mehr als 10 Liter sind, kann man 10 Liter in das Aquarium gießen, ohne daß es überläuft.

Ein anderer Lösungsweg besteht darin, die Höhe $10\,000\,\text{cm}^3 : (80\,\text{cm} \cdot 40\,\text{cm})$ zu berechnen, die zum Einfüllen von 10 Litern ausreicht, und festzustellen, daß diese Höhe kleiner als 7 cm ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 320713:

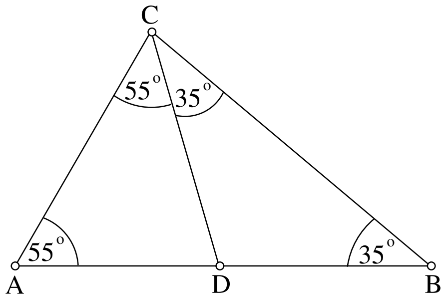
In einer Minute wird wegen $3\,\text{h} = 180\,\text{min}$ von der ersten Röhre $\frac{1}{180}$ des Behälters gefüllt, ebenso wegen $2\,\text{h} = 120\,\text{min}$ von der zweiten Röhre $\frac{1}{120}$ des Behälters. Also füllen beide Röhren zusammen in einer Minute

$$\frac{1}{180} + \frac{1}{120} = \frac{5}{360} = \frac{1}{72} \text{ des Behälters.}$$

Daher ist der Behälter durch beide Röhren in 72 Minuten gefüllt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 320714:



Nach Voraussetzung ist

$$\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{CD} \text{ und} \tag{1}$$

$$\overline{\sphericalangle BCD} = 35°. \tag{2}$$

Da das Dreieck BCD wegen (1) gleichschenklig ist, folgt nach dem Basiswinkelsatz und (2) auch

$$\overline{\sphericalangle DBC} = 35°, \text{ d.h.} \tag{3}$$

$$\overline{\sphericalangle ABC} = 35°. \tag{4}$$

Aus (2) und (3) folgt nach dem Außenwinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle ADC} = 70°. \tag{5}$$

Wegen (1) ist auch das Dreieck ACD gleichschenklig; nach dem Basiswinkelsatz gilt also $\overline{\sphericalangle CAD} = \overline{\sphericalangle ACD}$. Hiermit und mit (5) folgt aus dem Innenwinkelsatz

$$\overline{\sphericalangle CAD} = \overline{\sphericalangle ACD} = \frac{1}{2}(180° - 70°) = 55°; \tag{6}$$

d.h., es gilt einerseits

$$\overline{\sphericalangle CAB} = 55°, \tag{7}$$

andererseits folgt aus (6) und (2)

$$\overline{\sphericalangle ACB} = \overline{\sphericalangle ACD} + \overline{\sphericalangle BCD} = 55° + 35° = 90°. \tag{8}$$

Mit (4), (7), (8) sind die gesuchten Innenwinkelgrößen ermittelt.

Bemerkung: In anderer Lösungsvariante kann $\overline{\sphericalangle ACB}$ durch nochmalige Anwendung des Innenwinkelsatzes aus (4), (7) gefunden werden. Für Schüler, die den Thalessatz kennen, ist auch durch dessen Zitat $\overline{\sphericalangle ACB} = 90°$ aus (1) zu erhalten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission