31. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Saison 1991/1992

Aufgaben und Lösungen

31. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310731:
Bei einer Geburtstagsfeier wurden an die Kinder Bonbons verteilt:

> Das erste Kind bekam 1 Bonbon und ein Zehntel vom verbleibenden Rest,
> Das zweite Kind bekam 2 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,
> Das dritte Kind bekam 3 Bonbons und ein Zehntel vom nun verbleibenden Rest,
> usw.

Schließlich waren, als dies konsequent fortgesetzt worden war, alle Bonbons verteilt, und es stellte sich heraus, daß jedes Kind dieselbe Anzahl Bonbons erhalten hatte wie jedes andere Kind.

Ermittle aus diesen Angaben die Anzahl a aller verteilten Bonbons, die Anzahl k aller beteiligten Kinder und die Anzahl b derjenigen Bonbons, die jedes dieser Kinder erhielt! Überprüfe, daß für die von dir ermittelten Anzahlen a, k, b alle obengenannten Angaben zutreffen!

Aufgabe 310732:
Ein Mensch antwortet auf die Frage nach seinem Geburtstag:

> ”Im Jahre 1989 wurde ich a Jahre alt. Geboren wurde ich am t-ten Tag des m-ten Monats des Jahres $(1900 + j)$. Die Zahlen a, j, m, t sind natürliche Zahlen; für sie gilt $a \cdot j \cdot m \cdot t = 105\,792$.”

Stelle fest, ob die Zahlen a, j, m, t durch diese Angaben eindeutig bestimmt sind! Ist das der Fall, so gib diese Zahlen an!

Aufgabe 310733:
Zu einem gegebenen konvexen Fünfeck $ABCDE$ soll ein Rechteck $FGHJ$ konstruiert werden, das denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$ hat.

a) Beschreibe eine Konstruktion, die mit jedem konvexen Fünfeck $ABCDE$ durchführbar ist und vier Punkte F, G, H, J ergibt!

b) Beweise, daß für jedes konvexe Fünfeck $ABCDE$ die nach deiner Beschreibung konstruierten Punkte die Ecken eines Rechtecks $FGHJ$ sind, das denselben Flächeninhalt wie $ABCDE$ hat!

c) Führe an einem von dir gewählten Fünfeck $ABCDE$ die von dir beschriebene Konstruktion durch!

Hinweis: Ein Fünfeck ist genau dann konvex, wenn es nicht überschlagen ist (d.h. außer den Ecken keine gemeinsamen Punkte zweier Seiten aufweist) und wenn kein Innenwinkel des Fünfecks größer als 180° ist.

Aufgabe 310734:
Wenn für ein Paar von Primzahlen gilt, daß eine Primzahl des Paares um zwei größer ist als die andere, so bezeichnet man dieses Paar als ein Paar von Primzahlzwillingen.

Beweise, daß für jedes Paar von Primzahlzwillingen, die größer als 3 sind, die Summe der beiden Primzahlen dieses Paares stets durch 12 teilbar ist!

Aufgabe 310735:

Ist ABC ein beliebiges Dreieck, so sei S der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden AD und BE, ferner bezeichne F_1 den Flächeninhalt des Dreiecks ABC und F_2 den Flächeninhalt des (nicht konvexen) Fünfecks $ABDSE$.

Ermittle für jedes Dreieck ABC das Verhältnis $F_1 : F_2$ dieser beiden Flächeninhalte!

Aufgabe 310736:

Von vier Kreisen k_1, k_2, k_3, k_4 und ihren Mittelpunkten M_1, M_2, M_3, M_4 seien folgende Voraussetzungen erfüllt:

(1) Es gibt eine Gerade, auf der die drei Punkte M_1, M_2 und M_3 liegen.

(2) Jeder der drei Kreise k_2, k_3 und k_4 berührt den Kreis k_1 von innen.

(3) Je zwei der Kreise k_2, k_3 und k_4 berühren sich gegenseitig von außen.

a) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck $M_1M_2M_4$ einen ebenso großen Umfang u wie das Dreieck $M_1M_3M_4$ hat!

b) Die Radien von k_1, k_2, k_3, k_4 seien r_1, r_2, r_3, r_4. Zeige, daß eine Vorgabe solcher Radien stets ausreicht, um daraus u zu ermitteln! Drücke u durch möglichst wenig vorzugebende Radien aus!

31. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 310731:

Aus den Angaben folgt:

Das 1. Kind bekam $1 + \frac{1}{10} \cdot (a-1) = \frac{a}{10} + \frac{9}{10}$ Bonbons, danach waren $a - \left(\frac{a}{10} + \frac{9}{10}\right) = \frac{9a}{10} - \frac{9}{10}$ Bonbons vorhanden.

Das 2. Kind bekam $2 + \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9a}{10} - \frac{9}{10} - 2\right) = \frac{9a}{100} + \frac{171}{100}$ Bonbons.

Da auch das 1. Kind diese Anzahl erhalten hatte, folgt

$$\begin{aligned} \frac{a}{10} + \frac{9}{10} &= \frac{9a}{100} + \frac{171}{100} \\ 10a + 90 &= 9a + 171 \\ a &= 81 \\ \text{und damit weiter} \quad b &= \frac{a}{10} + \frac{9}{10} = \frac{81}{10} + \frac{9}{10} = 9. \end{aligned}$$

Da jedes der k Kinder b Bonbons bekam, ist die Anzahl aller verteilten Bonbons $a = k \cdot b$; damit folgt $k = 81 : 9 = 9$.

Probe:

Nummer des Kindes	Anzahl der an dieses Kind ausgegebenen Bonbons	danach verbleibender Rest
1	$1 + 80 : 10 = 9$	$81 - 9 = 72$
2	$2 + 70 : 10 = 9$	$72 - 9 = 63$
...	...	...
8	$8 + 10 : 10 = 9$	$18 - 9 = 9$
9	$9 + 0 : 10 = 9$	$9 - 9 = 0$

2.Lösungsweg: Da am Ende alle Bonbons verteilt waren, gilt für den Rest r, der nach dem Ausgeben von k Bonbons an das k-te Kind verblieb: Dieses Kind erhielt anschließend alle r Bonbons.

Andererseits waren dies aufgrund der Verteilungsregel $\frac{r}{10}$ Bonbons. Also gilt $r = \frac{r}{10}$; daraus folgt $r = 0$, das k-te Kind erhielt k Bonbons; d.h., es gilt $b = k$.

Weiter folgt: Nachdem das $(k-1)$-te Kind zunächst $k-1$ Bonbons erhalten hatte, bekam es (um auf die Anzahl $b = k$ zu kommen) noch 1 Bonbon; dies war ein Zehntel des Restes, der nach dem Ausgeben der $k-1$ Bonbons verblieb, also bestand dieser Rest aus 10 Bonbons. Somit waren dann für das k-te Kind noch $10 - 1 = 9$ Bonbons übrig; es gilt $b = 9$. Damit folgt $a = k \cdot b = 81$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310732:
Aus der Bedeutung der Zahlen folgt

$$0 < m \leq 12, \qquad 0 < t \leq 31; \tag{1}$$

auch die Zahlen a und j, für die

$$a \cdot j \cdot m \cdot t = 105\,792 \tag{2}$$

gilt, sind folglich beide größer als Null; sie erfüllen ferner

$$a + j = 89 \tag{3}$$

und sind daher beide kleiner als 89. Wegen der Primfaktorzerlegung $105\,792 = 2^6 \cdot 3 \cdot 19 \cdot 29$ hat $105\,792$ unter den natürlichen Zahlen kleiner als 89 genau die folgenden Teiler:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 19, 24, 29, 32, 38, 48, 57, 58, 64, 76, 87.

Die einzigen Möglichkeiten, hieraus zwei Zahlen a, j mit (3) auszuwählen, sind

$$(a; j) = (2; 87), (87; 2), (32; 57), (57, 32). \tag{4}$$

Von ihnen scheiden (2;87) und (87,2) aus; denn wegen (1) wäre für sie $a \cdot j \cdot m \cdot t \leq 2 \cdot 87 \cdot 12 \cdot 31 < 105\,792$, was (2) widerspricht.

Daher folgt nun aus (2), daß m und t die Bedingung

$$m \cdot t = \frac{105\,792}{32 \cdot 57} = 2 \cdot 29$$

erfüllen. Da 2 und 29 Primzahlen sind, ist das wegen (1) nur mit

$$m = 2, \qquad t = 29 \tag{5}$$

möglich; d.h., der Geburtstag kann nur ein 29. Februar gewesen sein. Diese Datumsangabe ist mit $j = 57$, d.h. für das Jahr 1957, nicht möglich, da es kein Schaltjahr war. Also verbleibt von (4) nur die Möglichkeit

$$a = 57, \qquad j = 32. \tag{6}$$

Damit ist gezeigt: Die Zahlen a, j, m, t sind durch die Angaben eindeutig bestimmt; sie lauten wie in (5), (6) angegeben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310733:

a) Konstruktionsbeschreibung:

   (1) Man konstruiert die Parallele durch E zu AD, sie schneidet die Gerade durch A, B in einem Punkt F.

   (2) Man konstruiert die Parallele durch C zu BD, sie schneidet die Gerade durch A, B in einem Punkt G.

   (3) Man konstruiert den Mittelpunkt M von AD und die Parallele P durch M zu FG.

   (4) Man konstruiert die Senkrechten zu FG durch F und durch G, sie schneiden p in je einem Punkt J bzw. H.

b) Werden F, G, H, J nach dieser Beschreibung konstruiert, so folgt: Nach den Konstruktionsschritten (3), (4) ist $FGHJ$ ein Rechteck.

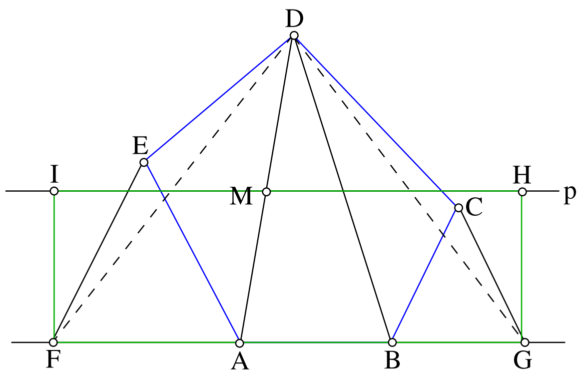
Ferner hat nach (1), (2) das Dreieck FGD denselben Flächeninhalt wie das Fünfeck $ABCDE$. Dies kann [als bekannter Sachverhalt aus 310724 zitiert oder] folgendermaßen bewiesen werden:

Nach (1) haben F und E gleichen Abstand von AD, also ist das Dreieck ADF flächeninhaltsgleich zum Dreieck ADE.

Nach (2) ist ebenso BDG flächeninhaltsgleich zu BDC. Addiert man noch den Flächeninhalt von ABD, so folgt die behauptete Flächeninhaltsgleichheit von FGD mit $ABCDE$.

Nach (3) und dem Strahlensatz hat M halb so großen Abstand von FG wie D; daher hat das Rechteck $FGHJ$ denselben Flächeninhalt wie das Dreieck FGD und folglich auch wie $ABCDE$.

c) Konstruktion:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310734:

Ist (p, q) ein Paar von Primzahlzwillingen mit $q > p > 3$, so folgt: Da 2 die einzige gerade Primzahl ist, ist p ungerade, also gilt $p = 2n + 1$ mit einer natürlichen Zahl n und daher $q = p + 2 = 2n + 3$. Also ist $p + q = (2n + 1) + (2n + 3) = 4(n + 1)$ durch 4 teilbar.

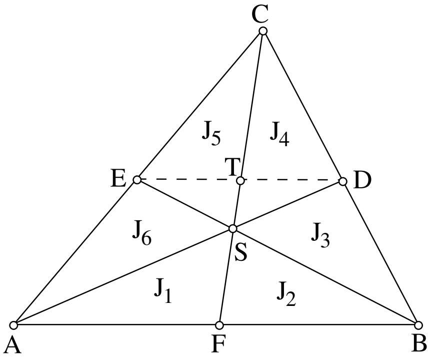
Da 3 die einzige durch 3 teilbare Primzahl ist, sind p und q nicht durch 3 teilbar. Wenn ferner p bei Division durch 3 den Rest 1 lassen würde, d.h., wenn $p = 3n+1$ mit einer natürlichen Zahl n wäre, so ergäbe sich der Widerspruch, daß $q = p + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$ durch 3 teilbar wäre. Also muß p bei Division durch 3 den Rest 2 lassen; d.h., es muß $p = 3n + 2$ mit einer natürlichen Zahl n gelten. Damit folgt $q = p + 2 = 3n + 4$; demnach ist $p + q = (3n + 2) + (3n + 4) = 3 \cdot (2n + 2)$ durch 3 teilbar.

Aus der Teilbarkeit von $p + q$ durch die zueinander teilerfremden Zahlen 4 und 3 folgt: $p + q$ ist durch $4 \cdot 3 = 12$ teilbar. $\square$

2. Lösungsweg: Jede Primzahl, die größer als 3 ist, ist mit einer natürlichen Zahl n von der Form $6n + 1$ oder $6n - 1$. (Dies kann als bekannter Sachverhalt zitiert oder durch Diskussion aller Möglichkeiten für den Rest bei Division durch 6 bewiesen werden.) Für zwei solche Zahlen $p < q$ ist die Differenz $q - p = 2$ nur möglich, wenn sie von der Form $p = 6n - 1$ und $q = 6n + 1$ mit demselben n sind. Daraus folgt: $p + q = 12n$ ist durch 12 teilbar. $\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310735:



In jedem Dreieck ABC haben die drei Seitenhalbierenden AD, BE und CF einen gemeinsamen Schnittpunkt S. Die Flächeninhalte der Dreiecke AFS, FBS, BDS, DCS, CES und EAS seien J_1, J_2, J_3, J_4, J_5 bzw. J_6.

Wegen $\overline{AF} = \overline{FB}$ und der gemeinsamen Ecke S von AFS, FBS gilt $J_1 = J_2$. Entsprechend folgt, daß $J_3 = J_4$ und $J_5 = J_6$ gelten.

Wegen $\overline{AF} = \overline{FB}$ und der gemeinsamen Ecke C von AFC, FBC gilt

$$J_1 + J_6 + J_5 = J_2 + J_3 + J_4.$$

Hieraus und aus den vorangehenden Gleichungen folgt

$$J_1 + 2 \cdot J_6 = J_1 + 2 \cdot J_3.$$

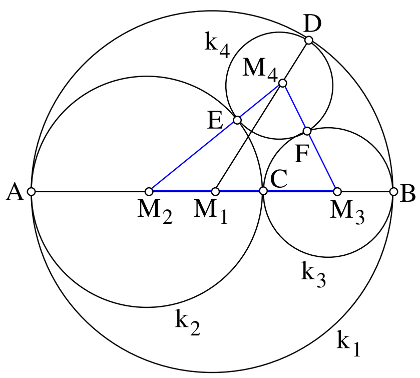
und daraus $J_6 = J_3$. Entsprechend folgt (z.B.) $J_2 = J_5$. Also gilt insgesamt

$$J_1 = J_2 = J_3 = J_4 = J_5 = J_6,$$
$$F_1 : F_2 = (6J_1) : (4J_1) = 3 : 2.$$

Es gibt mehrere andere Lösungswege. So kann man (nachdem $J_1 = J_2$, $J_3 = J_4$, $J_5 = J_6$ hergeleitet wurde) $ED \parallel AB$ und daraus $J_1 + J_2 + J_6 = J_1 + J_2 + J_3$, $J_6 = J_3$ erhalten. Oder man verwendet $\overline{FS} : \overline{SC} = 1 : 2$ und (für den Schnittpunkt T von ED mit FC) $\overline{AF} : \overline{ET} = 2 : 1$, um auf $J_1 = J_5$ zu schließen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310736:



Die in (1) genannte Gerade schneidet, da sie durch M_1 geht, den Kreis k_1 in einem Durchmesser.

Nach (2) liegen die Berührungspunkte A bzw. B, die k_1 mit k_2, bzw. mit k_3 hat, auf den Verlängerungen von M_1M_2, bzw. M_1M_3 über M_2 bzw. M_3 hinaus, sind also die Endpunkte dieses Durchmessers. Sie sind voneinander verschieden, da andernfalls einer der Kreise k_2, k_3 den anderen von innen berühren müßte. [Nach (3) liegt der Berührungspunkt C von k_2 und k_3 zwischen M_2 und M_3 und damit auch auf diesem Durchmesser.]

Nach (2) und (3) gilt: Der Berührungspunkt D von k_4 mit k_1 liegt auf der Verlängerung von M_1M_4 über M_4 hinaus, die Berührungspunkte E, F von k_2 bzw. k_3 liegen zwischen M_2 und M_4 bzw. zwischen M_3 und M_4.

a) Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
u &= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4M_2} + \overline{M_2M_1} && (4)\\
&= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4E} + \overline{M_2E} + \overline{M_2M_1} \\
&= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4E} + \overline{M_2A} + \overline{M_2M_1} \\
&= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4E} + \overline{M_1A} && (5)\\
&= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4F} + \overline{M_1B} && (6)\\
&= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4F} + \overline{M_3B} + \overline{M_3M_1} \\
&= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4F} + \overline{M_3F} + \overline{M_3M_1} \\
&= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4M_3} + \overline{M_3M_1}. \quad \square && (7)
\end{aligned}$$

b) Mit (5) gilt

$$\begin{aligned} u &= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4E} + \overline{M_1A} \\ &= \overline{M_1M_4} + \overline{M_4D} + \overline{M_1A} \\ &= \overline{M_1D} + \overline{M_1A} = 2 \cdot r_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Bemerkungen: Wie dieser Lösungsweg zeigt, werden dabei die oben in eckigen Klammern [] stehenden Aussagen über C nicht benötigt.

In anderer Lösungsdarstellung kann man mit Darstellungen der $\overline{M_iM_j}$ als Summen oder Differenzen von Radien arbeiten. Dabei kann auch C heranzuziehen sein, auch eine Fallunterscheidung $r_2 \gtreqless r_3$ kann erforderlich werden.

Ebenso wie oben von (4) über (5) auf (8) geschlossen wurde, kann man auch zeigen, daß der Wert (7) vermittels (6) gleich $\overline{M_1D} + \overline{M_1B}$ ist. Damit erhält man für beide Dreiecksumfänge den Wert $2 \cdot r_1$ und hat zugleich a) und b) gelöst.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission