31. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Saison 1991/1992

Aufgaben und Lösungen

31. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 310711:

Ein Warenhaus erhielt eine Lieferung von roten, blauen und grünen Bällen, zusammen 675 Stück. Während einer gewissen Zeit wurden davon verkauft:

die Hälfte der roten Bälle,

zwei Drittel der blauen Bälle und

ein Viertel der grünen Bälle.

Es stellte sich heraus, daß danach von jeder der drei Farben noch gleich viele Bälle übriggeblieben waren.

Ermittle aus diesen Angaben,

a) wieviele Bälle von jeder der drei Farben in der genannten Zeit verkauft worden waren.

b) wieviele Bälle danach insgesamt noch vorhanden waren!

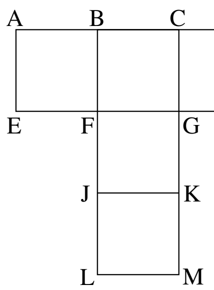
Aufgabe 310712:

Ermittle alle diejenigen vierstelligen natürlichen Zahlen, die folgende Bedingungen (1) und (2) erfüllen!

(1) Die Zahl enthält keine anderen Ziffern als 0, 1 und 4, aber jede dieser drei Ziffern mindestens einmal.

(2) Die Zahl ist durch 18 teilbar.

Aufgabe 310713:



Aus fünf einander kongruenten Quadraten werde eine T-förmige Figur zusammengesetzt. Die Eckpunkte der Quadrate seien wie in der Abbildung bezeichnet.

a) Zeichne eine solche Figur mit $\overline{AB} = 2\,\text{cm}$ und darin die Strecken BM und DE; ihren Schnittpunkt bezeichne mit S und stelle eine Vermutung über die Größe des Winkels $\sphericalangle BSD$ auf!

b) Beweise diese Vermutung!

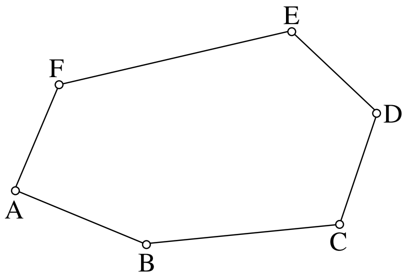
Aufgabe 310714:

a) Konstruiere ein beliebiges Dreieck ABC und einen beliebigen von A ausgehenden Strahl s, der die Gerade durch A, B nach derjenigen Seite hin verläßt, auf der auch C liegt!

Konstruiere nun denjenigen auf dem Strahl s liegenden Punkt C', für den das Dreieck ABC' denselben Flächeninhalt wie das Dreieck ABC hat!

b) Konstruiere zu einem beliebigen Sechseck $ABCDEF$, wie die Abbildung zeigt, einen Punkt E', für den $ABCDE'$ ein Fünfeck ist, das denselben Flächeninhalt wie das Sechseck $ABCDEF$ hat!

Beschreibe Deine Konstruktion und weise nach, daß ein nach Deiner Beschreibung konstruierter Punkt E' diese Bedingungen erfüllt!



31. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 310711:

Die Anzahl der Bälle, die von jeder Farbe am Ende noch vorhanden waren, sei x. Nach den Angaben im Aufgabentext kam dies so zustande, daß

x rote Bälle verkauft wurden, also $2x$ geliefert worden waren,
2x blaue Bälle verkauft wurden, also $3x$ geliefert worden waren, und
3x grüne Bälle verkauft wurden, also $4x$ geliefert worden waren.

Mithin hatte die gesamte Lieferung aus $2x + 3x + 4x = 9x$ Bällen bestanden; daher gilt $9x = 675$, $x = 75$.

Es wurden somit genau 75 rote, $2 \cdot 75 = 150$ blaue und $3 \cdot 75 = 225$ grüne Bälle verkauft, und danach waren noch insgesamt $3 \cdot 75 = 225$ Bälle vorhanden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310712:

Wenn eine vierstellige natürliche Zahl die Bedingungen (1) und (2) erfüllt, so folgt:

Nach (2) ist die Zahl durch 18, also auch durch 9 teilbar; daher ist ihre Quersumme durch 9 teilbar. Unter ihren Ziffern kommen nach (1) die Ziffern 0 und 1 mindestens je einmal vor, die Ziffer 4 also höchstens zweimal. Also ist die Quersumme größer als Null, aber nicht größer als $0 + 1 + 4 + 4 = 9$; somit muß sie gleich 9 sein. Damit kann die Bedingung (1) nur so erfüllt werden, daß unter den Ziffern genau einmal die 0, einmal die 1 und zweimal die 4 ist.

Ferner ist die Zahl, da sie durch 18 teilbar ist, eine gerade Zahl. Also muß ihre Einerziffer gerade sein, d.h. eine 0 oder 4.

Weiterhin muß (wie für jede vierstellige Zahl) die Tausenderziffer von 0 verschieden sein.

Nach den nun noch vorhandenen Möglichkeiten für die Reihenfolge der Ziffern muß die Zahl somit eine der Zahlen

$$1044, \quad 4014, \quad 1404, \quad 4104, \quad 1440, \quad 4140, \quad 4410 \qquad (3)$$

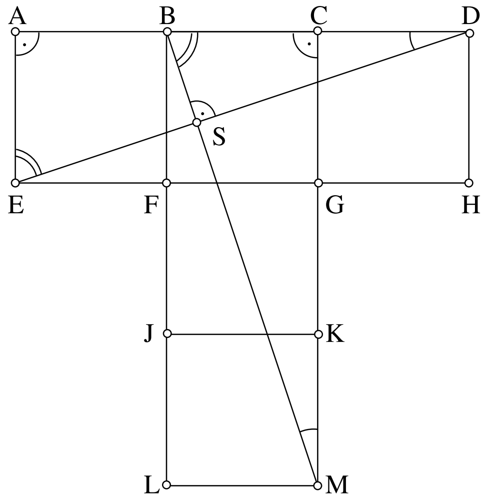
sein.

In der Tat erfüllen die Zahlen (3) die Bedingung (1), und sie erfüllen auch (2), da sie die Quersumme 9 und eine gerade Einerziffer haben, also durch 9 und durch 2 teilbar sind.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 310713:

a)



Zeichnung: siehe Abbildung

Vermutung: $\overline{\sphericalangle BSD} = 90°$.

b) *Beweis:*

Es gilt:

$\overline{EA} = \overline{BC}$	Seitenlänge kongruenter Quadrate,
$\overline{AD} = \overline{CM}$	Dreifaches dieser Seitenlänge,
$\overline{\sphericalangle EAD} = \overline{\sphericalangle BCM} = 90°$	

Nach dem Kongruenzsatz (sws) gilt also $\Delta EAD \cong \Delta BCM$ und daher

$$\overline{\sphericalangle AED} = \overline{\sphericalangle CBM}. \qquad (1)$$

Wegen $\overline{\sphericalangle EAD} = 90°$ gilt ferner

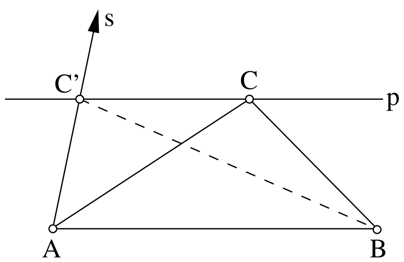
$$\overline{\sphericalangle EAD} + \overline{\sphericalangle EDA} = 90° \quad \text{(Winkelsumme im Dreieck AED).} \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) folgt wegen $\sphericalangle CBM = \sphericalangle DBS$ und $\sphericalangle EDA = \sphericalangle SDB$ auch $\overline{\sphericalangle DBS} + \overline{\sphericalangle SDB} = 90°$. Wegen der Winkelsumme im Dreieck BSD folgt hieraus $\overline{\sphericalangle BSD} = 90°$. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

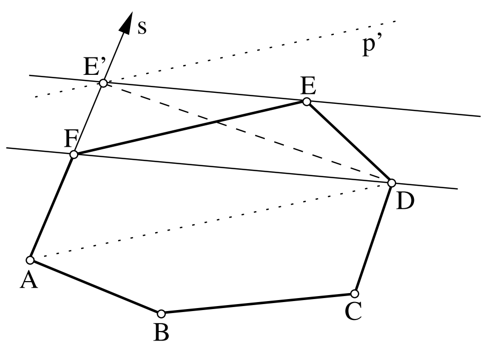
Lösung 310714:

a)



Die Abbildung zeigt eine geforderte Konstruktion.

b) *Konstruktion:*



Beschreibung:

Man konstruiert die Parallele p durch E zu FD und ihren Schnittpunkt E' mit der Verlängerung s von AF über F hinaus.

Beweis:

Es wird bewiesen, daß $ABCDE'$ ein zu $ABCDEF$ flächengleiches Fünfeck ist.

Da E' auf der Verlängerung von AF liegt, ist $ABCDE'$ ein Fünfeck.

Da nach Konstruktion ferner $E'E \parallel FD$ gilt, haben in den Dreiecken FDE' und FDE die zu FD senkrechten Höhen einander gleiche Länge. Also haben die Dreiecke FDE' und FDE einander gleichen Flächeninhalt.

Addiert man hierzu den Flächeninhalt des Fünfecks $ABCDF$, so folgt die behauptete Flächengleichheit von $ABCDE'$ mit $ABCDEF$. $\square$

Bemerkung: Die Bedingung, daß $ABCDE'$ ein zu $ABCDEF$ flächengleiches Fünfeck ist, wird außer von dem hier konstruierten Punkt E' auch von allen Punkten erfüllt, die auf der Parallelen p' durch E' zu AD liegen (ausgenommen die Schnittpunkte von p' mit den Verlängerungen von BA und von CD.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission