30. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Saison 1990/1991

Aufgaben und Lösungen

30. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300731:

In einem Lehrbuch aus dem Jahre 1525 wird sinngemäß folgende Aufgabe gestellt:

> Ein Hund jagt einen Fuchs. Jeweils in der Zeit, in der der Fuchs 9 Sprünge macht, macht der Hund 6 Sprünge, aber mit 3 Sprüngen legt der Hund einen ebenso langen Weg zurück, wie der Fuchs mit 7 Sprüngen.
>
> Mit wieviel seiner Sprünge holt der Hund den Fuchs ein, wenn der Fuchs zu Beginn 60 Fuchssprünge Vorsprung hat?

Bemerkung: Es wird vorausgesetzt, daß der Hund der Spur des Fuchses folgt und daß beide ihren ersten Sprung gleichzeitig beginnen.

Aufgabe 300732:

200 Schüler seien in Form eines Rechtecks, nämlich in Längsreihen zu je 20 und in Querreihen zu je 10 Schülern, aufgestellt.

Nun werde aus jeder Querreihe ein möglichst kleiner Schüler herausgerufen. Unter den so ermittelten 20 Schülern werde ein möglichst großer mit A bezeichnet. Die 20 Schüler stellen sich dann wieder auf ihre ursprünglichen Plätze.

Sodann werde aus jeder Längsreihe ein möglichst großer Schüler herausgerufen und unter den so ermittelten 10 Schülern ein möglichst kleiner mit B bezeichnet. Dabei stelle sich heraus, daß B eine andere Größe als A hat.

Untersuche, welcher von den beiden Schülern A und B unter diesen Voraussetzungen der größere sein muß!

Aufgabe 300733:

Aus zwei gegebenen Längen $h_b = 4,0\,\text{cm}$ und $p_b = 4,0\,\text{cm}$ sowie einer gegebenen Winkelgröße $\beta = 20°$ soll ein Dreieck ABC konstruiert werden. Wenn dabei D den Fußpunkt der auf AC senkrechten Höhe D bezeichnet, so wird gefordert:

(1) Es gilt $\overline{BD} = h_b$.

(2) Es gilt $\overline{AD} = p_b$.

(3) Der Winkel $\sphericalangle ABC$ hat die Größe β.

a) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC die Bedingungen (1), (2) und (3) erfüllt, dann kann es aus den gegebenen Stücken h_b, p_b, β konstruiert werden;

b) beschreibe eine solche Konstruktion!

c) Beweise: Wenn ein Dreieck ABC nach deiner Beschreibung konstruiert wird, dann erfüllt es die Bedingungen (1), (2) und (3).

d) Stelle fest, ob ein Dreieck durch die Bedingungen (1), (2) und (3) bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt ist!

Aufgabe 300734:

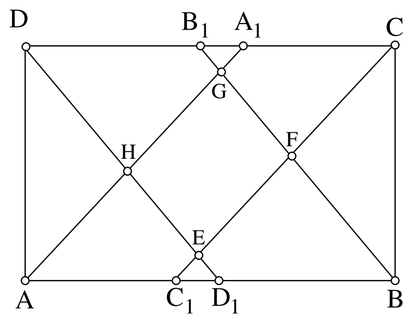
Jemand möchte nach folgenden Regeln möglichst viele verschiedene der natürlichen Zahlen von 1 bis 1 000 auswählen:

> Als erste Zahl ist eine zufällig gewählte der Zahlen 1 bis 6 zu nehmen, indem gewürfelt und die von dem Würfel gezeigte Zahl gewählt wird.
>
> Die weiteren Zahlen sollen so gewählt werden, daß folgendes gilt: Wenn die Auswahl von Zahlen beendet ist, so haben je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen stets eine durch 3 teilbare Summe.

Ermittle (in Abhängigkeit von allen Möglichkeiten der ersten Zahl) die größtmögliche Anzahl von Zahlen, die man nach diesen Regeln auswählen kann!

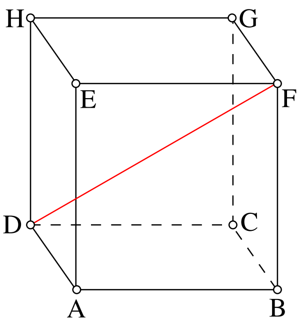
Aufgabe 300735:

Es sei $ABCD$ ein Rechteck mit den Seitenlinien $\overline{AB} = a$ und $\overline{BC} = b$, und es sei $a > b$. Auf AB seien Punkte C_1 und D_1 sowie auf CD die Punkte A_1 und B_1 derart eingezeichnet, daß die Strecken AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 jeweils Winkelhalbierende eines Innenwinkels von $ABCD$ sind. Die Schnittpunkte E, F, G, H dieser Winkelhalbierenden miteinander seien wie in der Abbildung bezeichnet.



Ermittle den Flächeninhalt I des Vierecks $EFGH$, wenn außerdem vorausgesetzt wird, daß $a = 8$ cm und $b = 5$ cm gilt!

Aufgabe 300736:



Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel.

Beweise, daß die Abstände der Punkte A, B, C, E, G und H von der Raumdiagonalen DF sämtlich einander gleich sind!

30. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Landesrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 300731:

Damit der Fuchs jeweils in der Zeit, in der der Hund $6 = 2 \cdot 3$ Sprünge macht, einen ebenso langen Weg wie der Hund zurücklegen könnte, müßte er $2 \cdot 7 = 14$ Sprünge machen. Da er aber in dieser Zeit nur 9 sei Sprünge macht, verringert sich dabei sein Vorsprung jedesmal um 5 Fuchssprünge.

Wegen $60 : 5 = 12$ ist folglich genau dann, wenn das 12mal geschehen ist, der Vorsprung aufgebraucht, also nach $12 \cdot 6 = 72$ Sprüngen des Hundes.

2. Lösungsweg:

Der Hund hole den Fuchs mit x Sprüngen ein, die dabei benötigte Zeit sei t. Ferner bezeichne

s_1, s_2 den Weg des Fuchses bzw. des Hundes,

v_1, v_2 die Geschwindigkeit des Fuchses bzw. des Hundes,

t_f, t_h die Zeit für einen Fuchs- bzw. einen Hundesprung,

s_f, s_h die Länge eines Fuchs- bzw. eines Hundesprunges.

Dann folgt aus den Angaben der Aufgabenstellung

$$9t_f = 6t_h, \qquad 7s_f = 3s_h, \qquad s_2 - s_1 = 60s_f, \qquad s_2 = x \cdot s_h.$$

Ferner folgt nach Definition der Geschwindigkeit

$$v_1 = \frac{s_1}{t} = \frac{s_f}{t_f}, \qquad v_2 = \frac{s_2}{t} = \frac{s_h}{t_h}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{s_f}{t_f} \cdot t = \frac{\frac{3}{7}s_h}{\frac{2}{3}t_h} \cdot t = \frac{9}{14}s_2, \\ 60s_f &= s_2 - \frac{9}{14}s_2 = \frac{5}{14}s_2 = \frac{5}{14}x \cdot s_h, \\ x \cdot s_h &= \frac{60}{5} \cdot 14s_f = 12 \cdot 6s_h, \\ x &= 72. \end{aligned}$$

Bemerkung:

Als Probe können folgende Angaben dienen:

Wenn der Hund 72 Sprünge macht, macht wegen $6 : 9 = 72 : 108$ der Fuchs 108 Sprünge. Wegen $3 : 7 = 72 : 168$ legt der Hund mit diesen 72 Sprüngen einen Weg zurück, dessen Länge gleich 168 Fuchssprüngen ist, also gleich der Summe aus den 108 Sprüngen des Fuchses und seinem zu Beginn vorhandenen Vorsprung von 60 Sprüngen.

Zu den obigen Lösungswegen ist eine solche Probe nicht erforderlich, da die Existenz einer Anzahl von Sprüngen bis zum Einholen dem Aufgabentext entnommen werden kann. Möglich ist jedoch andererseits ein Lösungsweg, in dem - mit oder ohne Angabe einer heuristischen Hinführung - die Anzahl von 72 Sprüngen des Hundes genannt und durch eine Probe der eben dargestellten Art bestätigt wird. Denn die (in einem solchen Lösungsweg nicht nachgewiesene) Einzigkeit der gesuchten Anzahl kann ebenfalls dem Aufgabentext entnommen werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300732:

Es gibt genau die folgenden drei Möglichkeiten:

(1) A und B stehen in derselben Längsreihe.

In diesem Fall ist B größer als A, da B in der genannten Längsreihe möglichst groß und von anderer Größe als A ist.

(2) A und B stehen in derselben Querreihe.

Auch in diesem Fall ist B größer als A, da A in der genannten Querreihe möglichst klein und von anderer Größe als B ist.

(3) A und B stehen weder in derselben Längsreihe noch in derselben Querreihe.

Es sei dann C derjenige Schüler, der in derselben Querreihe wie A und in derselben Längsreihe wie B steht. Für diesen Schüler gilt: B ist größer als C oder ebenso groß wie C, und C ist größer als A oder ebenso groß wie A. Da B nicht ebenso groß wie A ist, folgt wieder: B ist größer als A.

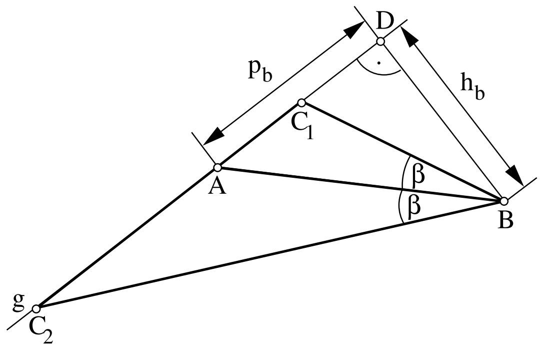
Somit ergibt sich in jedem Fall: Der größere von den beiden Schülern A und B muß B sein.

Bemerkung: Es ist somit im Fall $A \neq B$ stets "der kleinste der Großen" (B) größer als "der größte der Kleinen" (A). Es folgt hieraus sogar, daß alle "Großen" größer sind als alle Kleinen"; d.h.: Bei einem zweistufigen Wahlvorgang mit entgegengesetzten Auswahlrichtungen der hier beschriebenen Art dominiert die Auswahlrichtung der zuerst durchgeführten Wahlstufe. Eine Schülerlösung, die diese Einsicht nur "gefühlsmäßig" als Begründungsversuch bietet, wird (je nach Qualität der Formulierung) zur Bewertung mit höchstens 3 Punkten führen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300733:

a) Wenn ein Dreieck ABC mit der auf AC senkrechten Höhe BD die Bedingungen (1), (2), (3) erfüllt, dann ist ABD ein bei D rechtwinkliges Dreieck mit gegebenen Kathetenlängen $\overline{BD}$, $\overline{AD}$. Der Punkt C liegt so auf der Geraden durch A und D, daß BC mit BA einen Winkel der Größe β bildet. Also kann ABC nach folgender Beschreibung konstruiert werden (siehe Abbildung):



b) 1. Man konstruiert einen rechten Winkel und trägt von seinem Scheitel D aus auf seinen Schenkeln die Strecken DB bzw. DA der Längen $h_b = 4,0$ cm bzw. $p_b = 4,0$ cm ab.

2. Man trägt in B an BA einen Winkel der Größe $\beta = 20°$ an und bringt seinen zweiten Schenkel zum Schnitt C mit der Geraden g durch A und D.

c) Wenn ein Dreieck ABC nach dieser Beschreibung konstruiert wird, dann ist BD nach 1. (und 2.) die auf g (also auf AC) senkrechte Höhe, und es gilt (1) sowie (2). Nach 2. wird auch (3) erfüllt.

d) Der nach 2. zu konstruierende Winkel kann nach beiden Seiten von BA angetragen werden. Je nachdem, ob sein zweiter Schenkel auf derselben Seite von BA wie D liegt oder nicht, erhält man[1)] als C einen Punkt C_1 bzw. C_2. Wegen $\overline{\sphericalangle BAC_1} < 90°$ und $\overline{\sphericalangle BAC_2} > 90°$ sind die Dreiecke ABC_1, und ABC_2, nicht zueinander kongruent.[2)] Also ist ABC durch die Bedingungen (1), (2), (3) nicht bis auf Kongruenz eindeutig bestimmt.

[1)] Dies kann der durchgeführten Konstruktion entnommen oder daraus erhalten werden, daß ABD ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck ist und $\beta < 45°$ gilt.

[2)] Wegen $\overline{\sphericalangle ABC_1} < \overline{\sphericalangle BAC_2}$ und $\overline{\sphericalangle AC_1B} < \overline{\sphericalangle BAC_2}$ sind die Dreiecke auch nicht kongruent bei Zuordnung der Eckpunkte in einer anderen Reihenfolge als A, B, C_1, und A, B, C_2. Diese Aussage wird nicht vom Schüler verlangt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300734:

1. War die erste Zahl eine 3 oder eine 6, so gilt:

   Als weitere Zahlen kann man genau solche auswählen, die ebenfalls durch 3 teilbar sind; denn genau dann haben auch je zwei der insgesamt ausgewählten Zahlen eine durch 3 teilbare Summe.

   Da unter den Zahlen von 1 bis 1 000 genau die Zahlen

   $$1 \cdot 3 = 3, \qquad 2 \cdot 3 = 6, \qquad ..., \qquad 333 \cdot 3 = 999$$

   durch 3 teilbar sind, beträgt im Fall der Anfangszahlen 3, 6 die gesuchte größtmögliche Anzahl auszuwählender Zahlen 333.

2. War die erste Zahl eine der Zahlen 1, 4; 2, 5, so gilt:

   Diese Zahlen lassen bei Division durch 3 den Rest 1 oder 2; d.h., sie sind mit einer natürlichen Zahl n von der Form $3n + 1$ bzw. $3n + 2$. Für die zweite Zahl gibt es dann jeweils genau die Möglichkeit, eine Zahl der Form $3m + 2$ bzw. $3m + 1$ zu wählen, da genau hierbei die Summe $3(m + n) + 3$ durch 3 teilbar wird.

   Jede weitere Zahl würde diese Regel aber verletzen; sie wäre nämlich von einer der Formen $3k$, $3k+1$, $3k + 2$, und dann wäre mit $h = n$ oder mit $h = m$ die betreffende der Summen

   $$3h + 1 + 3k = 3(h + k) + 1,$$
   $$3h + 1 + 3k + 1 = 3(h + k) + 2,$$
   $$3h + 2 + 3k + 2 = 3(h + k + 1) + 1$$

   nicht durch 3 teilbar.

   Also beträgt im Fall der Anfangszahlen 1, 4; 2, 5 die gesuchte größtmögliche Anzahl auszuwählender Zahlen 2.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300735:

Da AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, die rechten Winkel bei A, B, C bzw. D halbieren, folgt: Die Dreiecke AA_1D, BB_1C, CC_1B, DD_1 haben jeweils zwei Innenwinkel der Größen 90°, 45°. Also hat auch jeweils der dritte

Innenwinkel die Größe 45°; die Dreiecke sind gleichschenklig-rechtwinklig mit der Kathetenlänge b.

Somit sind AD_1A_1D und C_1BCB_1 Quadrate der Seitenlänge b. Da ihre Diagonalen einander gleichlang sind und sich gegenseitig halbieren, folgt

$$\overline{AH} = \overline{A_1H} = \overline{BF} = \overline{B_1F} = \overline{CF} = \overline{C_1F} = \overline{DH} = \overline{D_1H}$$

Ferner sind ADH, BCF sowie C_1D_1E und A_1B_1G Dreiecke mit zwei Innenwinkeln von je 45°, also ebenfalls gleichschenklig-rechtwinklig.

Dabei ist

$$\overline{C_1D_1} = \overline{AB} - \overline{BD_1} = a - 2(a - b) = 2b - a,$$

und die gleiche Länge hat A_1B_1; folglich ist

$$\overline{C_1E} = \overline{D_1E} = \overline{A_1G} = \overline{B_1G}.$$

Also ist $EFGH$ ein Viereck mit vier Innenwinkeln von 90° und mit

$$\overline{HE} = \overline{HG} = \overline{FE} = \overline{FG}.$$

d.h. ein Quadrat. Seine Diagonalenlänge beträgt

$$d = \overline{HF} = \overline{AC_1} = a - b = 3\text{ cm},$$

da AH und C_1F einander gleichlang und parallel sind, also AC_1FH ein Parallelogramm ist.

Da im Quadrat $EFGH$ die Diagonalen gleichlang und senkrecht zueinander sind und einander halbieren, hat in jedem der beiden Dreiecke HFE, HFG die zu HF senkrechte Höhe die Länge $\frac{d}{2}$. Die Summe der Flächeninhalte dieser beiden Dreiecke, d.h. der gesuchte Flächeninhalt von $EFGH$, beträgt folglich

$$I = \frac{1}{2}d^2 = 4,5\text{ cm}.$$

Bemerkung: Da man auch für andere Teilflächen einfache Werte des Flächeninhaltes finden kann, ergeben sich zahlreiche andere Ansätze, I durch Addition oder Subtraktion derartiger Flächeninhalte zu ermitteln.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300736:

Die Dreiecke ADF, BFD, CDF, EFD, GFD und HDF werden jeweils durch die Raumdiagonale DF, je eine Körperkante (AD, BF, CD, EF, GF bzw. HD) und je eine Flächendiagonale (AF, BD, CF, ED, GD bzw. HF) des Würfels begrenzt. Sie stimmen also in ihren drei Seitenlängen überein und sind folglich nach (sss) sämtlich zueinander kongruent.

In jedem dieser Dreiecke ist der betreffende Abstand die Länge der Höhe auf der längsten Seite; demzufolge sind diese Abstände sämtlich einander gleich.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission