30. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Saison 1990/1991

Aufgaben und Lösungen

30. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300711:

Während eines mathematischen Spielnachmittages wurden alle Mitspieler vom Spielleiter aufgefordert, in eine Hand eine gerade Anzahl und in die andere Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen zu nehmen. Anschließend erhielt jeder Mitspieler die Aufgabe, die Anzahl der Hölzchen in seiner rechten Hand mit 2 zu multiplizieren und das entstandene Produkt zur Anzahl der Hölzchen in seiner Hand zu addieren.

Jedesmal, wenn ein Spieler die so gebildete Summe dem Spielleiter mitteilte, war dieser in der Lage, zutreffend zu sagen, ob der Mitspieler eine gerade Anzahl von Hölzchen in seiner rechten oder in seiner linken Hand hatte.

Wie war das möglich?

Aufgabe 300712:

Fünf Schüler der Klasse 7*a* sammelten Altpapier. Von der Menge, die sie insgesamt zusammenbrachten, hatte Marco ein Viertel, Frank ein Sechstel, Matthias ein Fünftel und Steffen ein Zehntel beigetragen. Dirk hatte 2 kg mehr als Marco gesammelt.

a) Wieviel Kilogramm Altpapier hatte jeder dieser fünf Schüler beigetragen?

b) Welcher Betrag wurde für die von den fünf Schülern insgesamt abgelieferte Papiermenge bezahlt, wenn für jedes Kilogramm 30 Pfennig bezahlt wurden?

Aufgabe 300713:

Von drei Geraden wird vorausgesetzt, daß sie durch einen Punkt C gehen. Von einer vierten Geraden wird vorausgesetzt, daß sie nicht durch C geht und die drei anderen Geraden in Punkten A, B, D schneidet, wobei B zwischen A und D liegt. Auf der Geraden durch A und C liege ein Punkt E so, daß C zwischen A und E liegt. Weiter wird vorausgesetzt, daß die Winkel $\sphericalangle ECD$ und $\sphericalangle ABC$ einander gleich groß sind.

a) Zeichne vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E so, daß diese Voraussetzungen erfüllt sind!

b) Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets die Winkel $\sphericalangle BCD$ und $\sphericalangle BAC$ einander gleich groß sein müssen!

Aufgabe 300714:

In jedem Dreieck beträgt bekanntlich die Innenwinkelsumme 180° in jedem Viereck 360°.

a) Zeichne je ein Fünfeck, ein Sechseck und ein Siebeneck! Miß die Innenwinkel und berechne jeweils die Innenwinkelsumme! Was vermutest du?

b) Beweise deine Vermutung für jedes Fünfeck, Sechseck und Siebeneck!

c) Versuche eine Formel zu finden und zu beweisen, die für jede natürliche Zahl $n > 3$ die Innenwinkelsumme in jedem n-Eck angibt!

Hinweis: In dieser Aufgabe werden alle n-Ecke als konvex vorausgesetzt, d.h. als n-Ecke, in denen kein Innenwinkel größer als 180° ist. Außerdem wird in dieser Aufgabe vorausgesetzt, daß kein Innenwinkel gleich 180° ist.

30. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulrunde)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 300711:

Der Spielleiter kann folgendermaßen überlegen:

Angenommen, ein Mitspieler hat in seiner rechten Hand eine ungerade Anzahl von Hölzchen. Nach dem Verdoppeln erhält er eine gerade Zahl als Produkt, zu dem die gerade Anzahl der Hölzchen in seiner linken Hand addiert werden muß. Folglich ist die Summe eine gerade Zahl.

Befindet sich in der rechten Band des Mitspielers dagegen eine gerade Anzahl von Hölzchen, so ist das Doppelte davon ebenfalls eine gerade Zahl. Nach Addition mit der ungeraden Anzahl der Hölzchen der linken Hand ergibt sich eine ungerade Zahl als Summe.

Kennt der Mitspieler also eine gerade Zahl als Summe, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in seiner linken Hand. Nennt er eine ungerade Zahl als Summe, so hat er die gerade Anzahl von Hölzchen in seiner rechten Hand.

Anderer Lösungsweg Man kann die beiden Möglichkeiten folgendermaßen erfassen:

1. Linke Hand $2x$, rechte Hand $2y + 1$ Hölzchen. Gerechnet wird $2 \cdot (2y + 1) + 2x$; diese Zahl ist gerade.
2. Linke Hand $2x + 1$, rechte Hand $2y$ Hölzchen. Gerechnet wird $2 \cdot 2y + 2x + 1$; diese Zahl ist ungerade.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300712:

Wenn die fünf Schüler Insgesamt x Kilogramm Altpapier zusammenbrachten, so hatten jeweils Marco $\frac{x}{4}$, Falk $\frac{x}{6}$, Matthias $\frac{x}{5}$, Steffen $\frac{x}{10}$ und Dirk $\frac{x}{4} + 2$ Kilogramm beigetragen. Also gilt

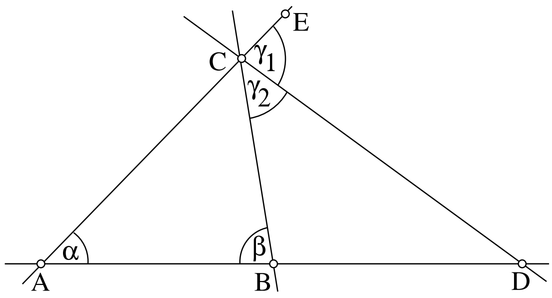
$$x = \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + \frac{x}{5} + \frac{x}{10} + \frac{x}{4} + 2 = \frac{58x}{60} + 2 \quad \Rightarrow \quad x - \frac{58x}{60} = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{60} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 60.$$

a) Daher hatten Marco 15 kg, Falk 10 kg, Matthias 12 kg, Steffen 6 kg und Dirk 17 kg beigetragen.

b) Wegen $60 \cdot 30 = 1\,800$ wurden für das gesammelte Altpapier 18 M bezahlt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300713:



a) Die Abbildung zeigt vier Geraden und dazu Punkte A, B, C, D, E der geforderten Art.

b) Mit den Bezeichnungen $\overline{\sphericalangle BAC} = \alpha$, $\overline{\sphericalangle ABC} = \beta$, $\overline{\sphericalangle ECD} = \gamma_1$, $\overline{\sphericalangle BCD} = \gamma_2$ gilt nach Voraussetzung

$$\gamma_1 = \beta \tag{1}$$

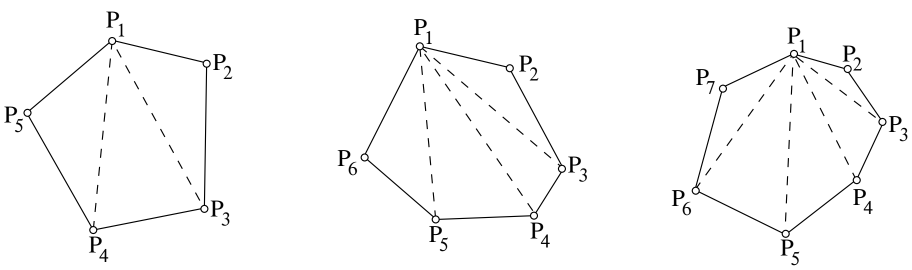
Nach dem Außenwinkelsatz für das Dreieck ABC gilt ferner $\overline{\sphericalangle BCE} = \alpha + \beta$, d.h.

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \alpha + \beta \tag{2}$$

Aus den Gleichungen (2) und (1) folgt durch Subtraktion $\gamma_2 = \alpha$. $\square$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300714:



a) Die erste Abbildung soll ein Fünfeck mit den Innenwinkelgrößen 120°, 130°, 80°, 120°, 90°, ein Sechseck mit den Innenwinkelgrößen 110°, 120°, 140°, 130°, 110°, 110° und ein Siebeneck mit den Innenwinkelgrößen 130°, 120°, 140°, 120°, 140°, 120°, 130° zeigen.

   Vermutung: In jedem Fünfeck, Sechseck bzw. Siebeneck beträgt die Innenwinkelsumme 540°, 720° bzw. 900°.

b) Jedes Fünfeck, Sechseck bzw. Siebeneck läßt sich wie in Abbildung in drei, vier bzw. fünf Teildreiecke zerlegen, wobei durch Addition der Innenwinkelsummen dieser Teildreiecke die Innenwinkelsumme des betreffenden Fünf-, Sechs- bzw. Siebenecks entsteht. Daher beträgt diese Innenwinkelsumme $3 \cdot 180° = 540°$ bzw. $4 \cdot 180° = 720°$ bzw. $5 \cdot 180° = 900°$.

c) Jedes n-Eck $P_1P_2P_3...P_{n-1}P_n$ wird durch die Diagonalen P_1P_3, ..., P_1P_{n-1} in die $n-2$ Teildreiecke $P_1P_2P_3$, $P_1P_3P_4$, ..., $P_1P_{n_1}P_n$ zerlegt. Durch Addition der Innenwinkelsumme dieser Teildreiecke entsteht die Innenwinkelsumme des n-Ecks. Diese beträgt daher $(n-2) \cdot 180°$.

Andere Lösungsmöglichkeiten:

Man kann auch zuerst (c) lösen und dann (b) als Spezialfälle für $n = 5, 6, 7$ erhalten. Für (c) (und (b)) kann man auch eine Zerlegung in n Dreiecke PP_1P_2, PP_2P_3, ..., $PP_{n-1}P_N$, PP_nP_1 wählen, wobei P ein Punkt im Innern des n-Ecks ist. Addiert man die Innenwinkelsummen dieser Dreiecke, so entsteht die Summe aus einer Vollwinkelgröße 360° und der Innenwinkelsumme des n-Ecks. Daher beträgt diese $n \cdot 180° - 360°$.

(Dieser Beweis benutzt die Konvexität; denn in nichtkonvexen n-Ecken muß es nicht stets einen Punkt P geben, so daß die Strecken PP_1, PP_2, ..., PP_n das n-Eck in n Dreiecke zerlegen. Ein Beweis durch geeignete Zerlegung in $n-2$ Dreiecke ist dagegen auch für nichtkonvexe n-Ecke möglich.)

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission