30. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Saison 1990/1991

Aufgaben und Lösungen

30. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 300621:

a) Zeichne in ein Koordinatensystem das Quadrat $ABCD$ mit den Eckpunkten

A(1;1), B(5;1), C(5;5), D(1;5)

und das Quadrat $PQRS$ mit den Eckpunkten

P(9;1), Q(13;1), R(13;5), S(9;5)

ein!

b) Gibt es eine Spiegelung und auch eine Drehung, bei der das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist? Wenn dies der Fall ist, gib die Koordinaten des Drehzentrums und die Größe des Drehwinkels an! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Hinweis: Wenn das Quadrat $PQRS$ das Bild des Quadrates $ABCD$ ist, so braucht die Reihenfolge P, Q, R, S nicht die Reihenfolge der Bildpunkte A, B, C, D zu sein.

Aufgabe 300622:

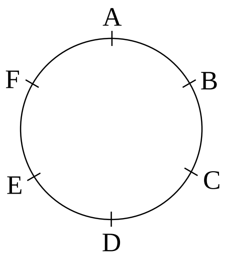


Abbildung a

Sechs Personen A, B, C, D, E, F wollen ihre Sitzordnung (Abbildung a) so ändern, daß in der neuen Sitzordnung jede Person feststellen kann: Unter meinen beiden Nachbarn befindet sich jetzt keiner der beiden, die ich vorher (in Abbildung a) als Nachbarn hatte.

a)

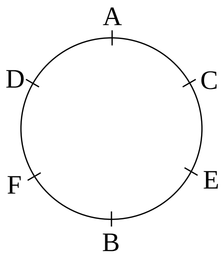


Abbildung b

Abbildung b zeigt eine solche neue Sitzordnung. Fülle zur Überprüfung, daß tatsächlich eine Sitzordnung der geforderten Art vorliegt, die folgende Tabelle aus!

Person	Nachbarn in Abb. a	Nachbarn in Abb. b
A		
B		
C		
D		
E		
F		

b) Gib alle weiteren Möglichkeiten in einer neuen Sitzordnung der geforderten Art an! Dabei sollen jeweils außer einer schon angegebenen Möglichkeit diejenigen nicht mehr angegeben werden, die aus ihr durch Drehung oder Spiegelung zu erhalten sind.

Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 300623:

Eine Buchdruckerei habe zum Druck der Ziffern 0, 1, ..., 9 Lettern in folgenden Stückzahlen zur Verfügung:

Ziffer	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Stückzahl	350	340	320	340	360	310	300	320	320	340

Unter Verwendung nur dieser Lettern sollen die Seitenzahlen von 1 bis 1 020 eines Buches gedruckt werden. Dabei soll keine Letter mehr als einmal benutzt werden. Reichen die Lettern hierfür aus? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 300624:

Ermittle alle diejenigen natürlichen Zahlen n, die sich in der Form $n = 5a + 7b$ darstellen lassen, wobei a und b natürliche Zahlen sind!

30. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Regionalrunde)
Klasse 6
Lösungen

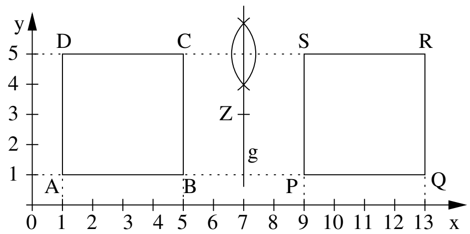
Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 300621:

a) Die Abbildung zeigt die in ein Koordinatensystem eingezeichneten Quadrate.

b) Die Abbildung zeigt auch die Spiegelgerade g und eine Konstruktion dieser Geraden.

c) Das Drehzentrum ist Z(7;3), der Drehwinkel beträgt 180°.



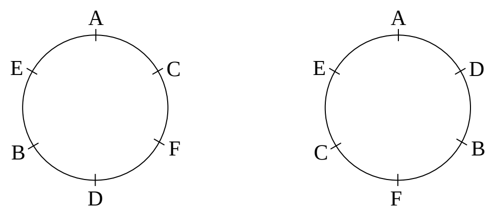
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300622:

a)

Person	Nachbarn in Abbildung a	Nachbarn in Abbildung b
A	F, B	D, C
B	A, C	E, F
C	B, C	A, E
D	C, E	F, A
E	C, F	C, B
F	E, A	B, D

b) Alle weiteren Möglichkeiten (bis auf Drehung und Spiegelung) zeigt Abbildung b.



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300623:
Die Lettern reichen nicht aus. Zu einer Begründung kommt man, wenn man für die Lettern mit der Ziffer 6 die benötigte Stückzahl ermittelt (dies ist zweckmäßig, da für die 6 die kleinste verfügbare Stückzahl vorliegt)!

An der Einerstelle wird die Ziffer 6 jeweils einmal für die Zahlen

1 bis 10, 11 bis 20, ..., 1011 bis 1020

gebraucht, d.h. 102mal.

An der Zehnerstelle wird die Ziffer 6 jeweils 10mal für die Zahlen

60 bis 69, 160 bis 169, ..., 960 bis 969

gebraucht, d.h. 100mal.

An der Hunderterstelle wird die Ziffer 6 für die Zahlen

600, ..., 699

gebraucht, d.h. 100mal.

Es werden also 302 Lettern mit der Ziffer 6 gebraucht, während nur 300 zur Verfügung stehen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 300624:
Die folgende Tabelle zeigt alle Werte $n = 5a + 7b$ mit $a = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ und $b = 0, 1, 2, 3, 4$

$b \backslash a$	0	1	2	3	4	5
0	0	5	10	15	20	25
1	7	12	17	22	27	32
2	14	19	24	29	34	39
3	21	26	31	36	41	46
4	28	33	38	43	48	53

Da bei weiterem Vergrößern von a oder b (oder beiden) stets jeweils auch n größer wird, ergibt sich:

(1) Unter allen natürlichen Zahlen $n \leq 24$ lassen sich genau die Zahlen

0, 5, 7, 10, 12, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 22, 24

in der genannten Form darstellen. Ferner ist aus der Tabelle ersichtlich:

(2) Die Zahlen

24, 25, 26, 27, 28

lassen sich in der genannten Form darstellen. Indem man nun zu den in (2) genannten Zahlen der Reihe nach $1 \cdot 5$, $2 \cdot 5$, $3 \cdot 5$, ... u.s.w. addiert, erhält man:

(3) Auch die Zahlen

29, 30, 31, 32, 33,
34, 35, 36, 37, 38,
39, 40, 41, 42, 43,

lassen sich in der genannten Form darstellen.

Mit (2) und (3) ist gezeigt, daß jede natürliche Zahl $n \geq 24$ sich in dieser Form darstellen läßt. Die insgesamt gesuchten Zahlen sind also genau die in (1) genannten Zahlen und alle natürlichen Zahlen $n > 24$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission