29. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1989/1990

Aufgaben und Lösungen

29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 290721:

Susi geht einkaufen. Von dem Geld, das ihr die Mutter gegeben hat, gibt sie 30% im Fleischerladen aus; im Milchladen bezahlt sie mit einem Viertel desjenigen Betrages, den ihr die Mutter gegeben hatte. Im Gemüseladen braucht sie genau vier Fünftel desjenigen Betrages, den sie im Fleischerladen bezahlt hatte. Beim Bäcker schließlich gibt sie doppelt so viel Geld aus, wie sie danach als Restbetrag wieder mit nach Hause bringt. Von diesem Restbetrag gibt ihr die Mutter die Hälfte, nämlich genau $1,05$ M, damit sie sich ein Softeis kaufen kann.

Ermittle den Geldbetrag, den Susi zu Anfang von der Mutter bekommen hatte!

Aufgabe 290722:

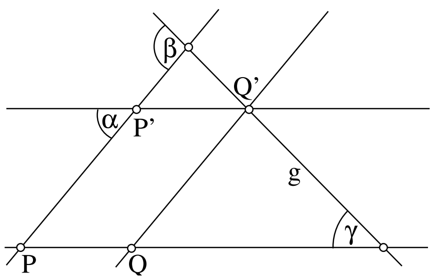
An einem Fußballturnier nehmen genau 14 Mannschaften teil. Jede Mannschaft trägt gegen jede andere genau ein Spiel aus. Gewinnt eine Mannschaft, so erhält sie 2 Gewinnpunkte und ihre Gegnermannschaft 2 Verlustpunkte. Geht ein Spiel unentschieden aus, so erhält jede der beiden Mannschaften je einen Gewinnpunkt und einen Verlustpunkt.

a) Nach Abschluß aller Spiele kann man für jede Mannschaft die Summe aller derjenigen Punkte bilden, die sie erhalten hat, gleichgültig, ob es Gewinn- oder Verlustpunkte waren. Weise nach, daß dabei jede der 14 Mannschaften dieselbe Summe erhält, und gib diese Summe an!

b) Nach Abschluß aller Spiele kann man auch die Summe aller Gewinnpunkte bilden, gleichgültig, welche Mannschaften sie erhalten haben. Weise nach, daß bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse der einzelnen Spiele des Turniers dieselbe Summe aller Gewinnpunkte entsteht, und gib diese Summe an!

c) An einem anderen Turnier mit denselben Regeln der Punktvergabe nahm eine andere Anzahl von Mannschaften teil. Wieder trug jede Mannschaft gegen jede andere genau ein Spiel aus. Kann als Summe aller Gewinnpunkte, wie in b) gebildet, dabei 432 entstehen? Begründe deine Antwort?

Aufgabe 290723:



Das Bild zeigt zwei Punkte P, Q und ihre Bildpunkte P', Q' bei einer Verschiebung. Durch Q' ist eine Gerade g gelegt. Ferner seien α und β die Größen der im Bild gekennzeichneten Winkel.

Ermittle eine Größenangabe für γ, ausgedrückt durch α und β!

Aufgabe 290724:

a) Ermittle alle Möglichkeiten, an die Zahl 331 eine vierte Ziffer so anzufügen, daß die entstehende vierstellige Zahl durch 3 teilbar ist!

b) Stelle fest, ob man an die Zahl 331 eine Ziffer 6 oder mehrere Ziffern 6 so anfügen kann, daß die entstehende Zahl durch 3 teilbar ist!

c) Untersuche, ob es mehr als 250 dreistellige Zahlen gibt, aus denen durch Anfügen von vier Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl entsteht!

d) Beweise, daß man aus jeder dreistelligen Zahl durch Anfügen von einer Ziffer 7 oder von mehreren Ziffern 7 jeweils eine durch 3 teilbare Zahl erhalten kann!

29. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 290721:

Da von dem Restbetrag, den Susi wieder mit nach Hause brachte, die Hälfte genau $1,05$ M war, ergibt sich, daß dieser Restbetrag selbst $2,10$ M betragen hat. Doppelt so viel, also $4,20$ M, gab Susi beim Bäcker aus. Nach dem Einkauf im Fleischer-, Milch- und Gemüseladen hatte sie also noch $4,20\text{ M} + 2,10\text{ M} = 6,30\text{ M}$.

Im Fleischerladen gab sie 30% des Betrages aus, den ihr die Mutter ursprünglich mitgegeben hatte; im Gemüseladen vier Fünftel von diesen 3O%, das sind also 24% des ursprünglichen Betrages. In Milchladen gab sie ein Viertel, d.h. 25% des ursprünglichen Betrages aus. Daher gab Susi in diesen drei Läden zusammen $30\% + 25\% + 24\% = 79\%$ des ursprünglichen Betrages aus; folglich waren die $6,30$ M, die ihr nach diesen drei Einkäufen verblieben waren, 21% des ursprünglichen Betrages.

War G dieser Betrag, so gilt also $G = \frac{6,30\cdot 100}{21}\text{ M} = 30\text{ M}$.

2. Lösungsweg: Hat Susi ursprünglich x Mark erhalten, so folgt (alle Angaben in Mark):

Ausgabe beim Fleischer	$\frac{3}{10}\,x$
Ausgabe im Milchladen	$\underline{1\{4}\,x$
Ausgabe im Gemüseladen	$\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{10}\,x$
Ausgabe für Softeis	1,05
Bei der Mutter verbleibender Betrag	1,05
Ausgabe beim Bäcker	$2\cdot(1,05+1,05)$

Da hiermit der gesamte Betrag x erfaßt ist, folgt

$$\frac{3}{10}\,x + \frac{1}{4}\,x + \frac{12}{50}\,x + 2,10 + 4,20 = x,$$

nach Multiplikation mit 100 also

$$\begin{aligned} 30x + 25x + 24x + 610 &= 100x,\\ 21x &= 630,\\ x &= 30. \end{aligned}$$

Also hatte Susi ursprünglich 30 M von der Mutter erhalten.

Probe: Von den 30 M gab Susi aus:

beim Fleischer	$9,00$ M,
im Milchladen	$7,50$ M,
im Gemüseladen	$7,20$ M,
beim Bäcker	$4,20$ M,
	$27,90$ M.

Also brachte sie $2,10$ M nach Hause; die Hälfte davon sind $1,05$ M.

Eine Probe ist nicht zu einer vollständigen Lösung der Aufgabe erforderlich, da dem Aufgabentext entnommen werden kann, daß sich die Teilbeträge so zum Gesamtbetrag zusammensetzen, wie im Text angegeben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290722:

a) Jede Mannschaft erhält in jedem Spiel 2 Punkte. Sie spielt im Turnier insgesamt 13 Spiele. Die Summe aller Punkte, die sie im Turnier erhält, beträgt daher $2 \cdot 13 = 26$.

b) Da nach a) jede der 14 Mannschaften 26 Punkte erhält, werden im Turnier insgesamt $14 \cdot 26$ Punkte vergeben. Von diesen sind genau die Hälfte Gewinnpunkte, da dies für jedes einzelne Spiel zutrifft, gleichgültig welches Ergebnis es hatte. Bei jeder Möglichkeit für die Ergebnisse beträgt die Summe aller Gewinnpunkte daher $\frac{14 \cdot 26}{2} = 14 \cdot 13 = 182$.

c) War x die Anzahl der Mannschaften, so erhält analog zu a) jede Mannschaft $2 \cdot (x-1)$ Punkte. Die Summe aller Gewinnpunkte beträgt analog zu b) daher $\frac{x \cdot 2 \cdot (x-1)}{2} = x \cdot (x-1)$. Sie kann also nur dann 432 betragen, wenn es eine natürliche Zahl x gibt, für die $x \cdot (x-1) = 432$ gilt.

1. Fortsetzungsmöglichkeit: Für alle natürlichen Zahlen $x \leq 21$ ist $x \cdot (x-1) \leq 21 \cdot 20 = 420 < 432$, für alle $x \geq 22$ ist $x \cdot (x-1) \geq 22 \cdot 21 = 462 > 432$.

2. Fortsetzungsmöglichkeit: Alle Zerlegungen von 432 in zwei Faktoren, die natürliche Zahlen sind, lauten

$$432 = 1 \cdot 432 = 2 \cdot 216 = 3 \cdot 144 = 4 \cdot 108 = 6 \cdot 72 = 8 \cdot 54 = 9 \cdot 48 = 12 \cdot 36 = 16 \cdot 27 = 18 \cdot 24.$$

In keiner dieser Zerlegungen haben die Faktoren die Differenz 1.

Nach *beiden Möglichkeiten* folgt: Als Summe aller Gewinnpunkte kann 432 nicht auftreten.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290723:

Ist S der Scheitel des gekennzeichneten Winkels der Größe β, so $\sphericalangle SP'Q'$ ist der Scheitelwinkel des gekennzeichneten Winkels der Größe α. Daher ist auch $\overline{\sphericalangle SP'Q'} = \alpha$.

Nach den Eigenschaften jeder Verschiebung ist die Gerade durch P', Q' parallel zur Geraden durch P, Q. Daher gilt nach dem Stufenwinkelsatz $\overline{\sphericalangle P'Q'S} = \gamma$. Aus dem Außenwinkelsatz, angewandt auf Dreieck $P'Q'S$, folgt daher $\alpha + \gamma = \beta$ und somit $\gamma = \beta - \alpha$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 290724:

a) Die Quersumme von 331 beträgt $3 + 3 + 1 = 7$. Durch Anfügen einer vierten Ziffer entsteht genau dann eine Zahl, deren Quersumme durch 3 teilbar ist, wenn diese Ziffer 2 beträgt oder sich von 2 um ein Vielfaches von 3 unterscheidet.

   Nach der Teilbarkeitsregel, daß eine Zahl genau dann durch 3 teilbar ist, wenn ihre Quersumme durch 3 teilbar ist, ist damit bewiesen: alle gesuchten Möglichkeiten für die anzufügende vierte Ziffer sind 2, 5, 8.

b) Da 6 durch 3 teilbar ist, entsteht aus der Quersumme 7 durch ein- oder mehrmaliges Addieren von 6 stets wieder eine Summe, die ebenso wie 7 nicht durch 3 teilbar ist. Also kann man durch Anfügen von einer Ziffer 6 oder von mehreren Ziffern 6 an die Zahl 331 keine durch 3 teilbare Zahl erhalten.

c) Wegen $7+7+7+7=28$ entsteht aus einer Zahl durch Anfügen von vier Ziffern 7 dann eine durch 3 teilbare Zahl, wenn die Quersumme der Zahl, an die die vier Ziffern 7 angefügt wurden, 2 beträgt oder sich von 2 um ein Vielfaches von 3 unterscheidet. Eine solche Zahl ist zum Beispiel 101, also ist 1 017 777 durch 3 teilbar.

Hat man eine derartige Zahl, wie 101 es war, so kann man eine weitere finden, indem man 3 addiert; denn für die Zahl mit den vier angehängten Ziffern 7 bedeutet das ein Addieren von 30 000, und dabei entsteht aus der bereits durch 3 teilbaren vorigen Zahl wieder eine solche.

Addiert man zu 101 (mindestens) 250 mal 3, so erhält man (mindestens) $101+3=104$, $101+2\cdot 3=107$, ..., $101+250\cdot 3=851$. Es gibt folglich mehr als 250 dreistellige Zahlen mit der in c) genannten Eigenschaft.

d) Für jede dreistellige Zahl liegt einer der folgenden Fälle vor:

1. Fall: Die Quersumme der Zahl ist durch 3 teilbar. In diesen Fall entsteht durch Anfügen von drei Ziffern 7 wieder eine durch 3 teilbare Zahl.

2. Fall: Die Quersumme der Zahl ist von der Form $3n+1$ mit einer natürlichen Zahl n. In diesem Fall entsteht durch Anfügen von zwei Ziffern 7 eine Zahl, deren Quersumme $3n+1+7+7=3n+15$ durch 3 teilbar ist.

3. Fall: Die Quersumme der Zahl ist von der Form $3n+2$. In diesem Fall entsteht durch Anfügen einer Ziffer 7 eine Zahl, deren Quersumme $3n+2+7=3n+9$ durch 3 teilbar ist.

Damit ist für jeden möglichen Fall der verlangte Beweis geführt. *Bemerkung:* Es gibt mehrere z.T. einfachere Varianten der Beweisführungen. So kann man z.B. in c) sogleich ohne heuristische Hinführung mit der Feststellung beginnen, daß 1 017 777 durch 3 teilbar, also 101 eine im Sinne der Aufgabenstellung geeignete Zahl ist, und (statt des Motivs, auf die Addition von 30 000 zu schließen) für das Auffinden weiterer Zahlen die Variante der Teilbarkeitsregel heranziehen, daß jeweils eine Zahl und ihre Quersumme bei Division durch 3 den gleichen Rest lassen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission