



29. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1989/1990

Aufgaben und Lösungen





29. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

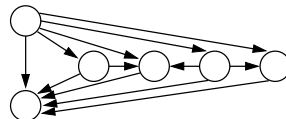
Aufgabe 290611:

Peter möchte aus einer Kanne, in der sich mehr als 13 Liter Milch befinden, genau 13 Liter abmessen. Das genaue Fassungsvermögen der Kanne ist nicht bekannt, und es ist auch nicht bekannt, wieviel Milch genau in der Kanne ist. Außer der Kanne stehen noch genau zwei weitere Gefäße zur Verfügung. Das eine hat ein Fassungsvermögen von genau 5 Liter, das andere ein Fassungsvermögen von genau 17 Liter. (Eine Skaleneinteilung oder ähnliche Möglichkeiten zum Abmessen anderer Mengen gibt es jedoch nicht.)

Beschreibe, wie Peter allein mit diesen Hilfsmitteln genau 13 Liter Milch abmessen kann!

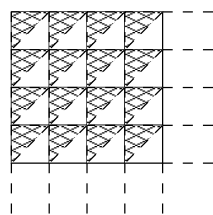
Aufgabe 290612:

- a) Trage in die sechs Kreise des Bildes je eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, 6, 12 so ein, daß jeder Pfeil von einer Zahl zu einem ihrer Teiler führt! Dabei soll jede der genannten Zahlen genau einmal verwendet werden.



- b) Ergänze die Figur durch einen weiteren Kreis mit der Zahl 18 und mit den entsprechend zu erklärenden Pfeilen!
- c) Zeichne eine neue Figur, wieder bestehend aus Kreisen und entsprechend zu erklärenden Pfeilen, in der die Zahl 75 und alle ihre Teiler vorkommen!

Aufgabe 290613:



Ein rechteckiger Fußboden, der 3,6 m lang und 2,7 m breit ist, soll mit zwei Sorten gleichgroßer, aber verschiedenfarbiger dreieckiger Teppichfliesen so ausgelegt werden, daß ein Muster entsteht, wie es durch Fortsetzen des Musters des Bildes zu erhalten ist.

Je zwei solcher dreieckigen Fliesen einer Farbe sollen durch einmaliges Zerschneiden einer quadratischen Fliese mit der Seitenlänge 30 cm hergestellt werden.

Wie viele quadratische Teppichfliesen werden von jeder der beiden Sorten insgesamt benötigt?



Aufgabe 290614:

Von den 25 Schülern einer Klasse gehören genau 20 einer Sportgruppe an. An der AG Mathematik nehmen genau 12 Schüler dieser Klasse teil. Genau 3 Schüler dieser Klasse gehören weder einer Sportgruppe noch der AG Mathematik an.

Zeige, wie man aus diesen Angaben erhalten kann, daß es auf folgende Fragen eindeutig bestimmte Zahlenangaben als Antworten gibt! Gib diese Antworten an!

- a) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an?
- b) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören zwar einer Sportgruppe, aber nicht der AG Mathematik an?
- c) Wie viele Schüler dieser Klasse insgesamt gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an?



29. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.

Lösung 290611:

Peter kann folgendermaßen verfahren:

Er entnimmt zuerst durch Füllen des kleinen Gefäßes mit anschließendem Umgießen in das große Gefäß dreimal je 5 Liter aus der Kanne. Wegen $3 \cdot 5 = 15$ enthält das große Gefäß dann genau 15 Liter; wegen $17 - 15 = 2$ passen noch genau 2 Liter Milch hinein. Diese werden aus dem noch einmal gefüllten kleinen Gefäß in das große Gefäß gegossen, so daß nun in dem kleinen Gefäß wegen $5 - 2 = 3$ noch genau 3 Liter sind.

Danach wird das große Gefäß wieder durch Zurückgießen in die Kanne entleert, und die 3 Liter werden anschließend in das große Gefäß gegossen. Gießt man nun noch zweimal je 5 Liter Milch hinzu, so enthält das große Gefäß wegen $3 + 2 \cdot 5 = 13$ genau 13 Liter Milch, wie es verlangt war.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 290612:

a), b), c) siehe Abbildungen a, b, c.

Hinweis: Der folgenden Tabelle kann man gemeinsame Eigenschaften der beiden Zahlen 12 und 75 entnehmen:

	Primfaktorzerlegung	Sämtliche Teiler					
12	$2 \cdot 2 \cdot 3$	1	2	3	$2 \cdot 2 = 4$	$2 \cdot 3 = 6$	$2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$
75	$5 \cdot 5 \cdot 3$	1	5	3	$5 \cdot 5 = 25$	$5 \cdot 3 = 15$	$5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$

Daher kommt man zu einer Lösung der Aufgabe c), indem man einfach die Zahlen aus der Lösung von a) durch die in der Tabelle darunterstehenden Zahlen ersetzt.

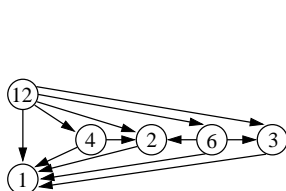


Abbildung a

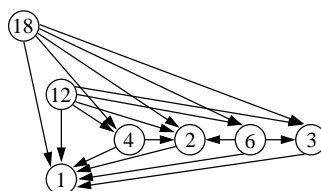


Abbildung b

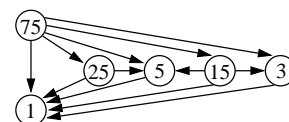


Abbildung c

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 290613:

Wegen $3,6 \text{ m} = 360 \text{ cm}$, $2,7 \text{ m} = 270 \text{ cm}$, $360 : 30 = 12$, $270 : 30 = 9$ und $12 \cdot 9 = 108$ läßt sich der Fußboden mit insgesamt 108 quadratischen Fliesen auslegen. Das bleibt auch so, wenn man diese Fliesen



zerschneidet und zu dem gewünschten Muster umordnet. Da dieses Muster die Fliesen beider Farben in einander gleichen Mengen enthält, werden von jeder der beiden Sorten quadratischer Teppichfliesen wegen $108 : 2 = 54$ insgesamt je 54 Stück benötigt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 290614:

Aus der ersten Angabe des Aufgabentextes folgt wegen $25 - 20 = 5$:

Genau 5 Schüler der Klasse gehören nicht einer Sportgruppe an. Unter diesen müssen sich die 3 in der dritten Angabe des Aufgabentextes genannten Schüler befinden, die außerdem auch nicht der AG Mathematik angehören. Damit folgt wegen $5 - 3 = 2$ als Antwort zu a): Insgesamt 2 Schüler der Klasse gehören zwar der AG Mathematik, aber nicht einer Sportgruppe an.

Diese 2 Schüler müssen zu den 12 in der zweiten Angabe des Aufgabentextes genannten Schülern gehören. Wegen $12 - 2 = 10$ folgt damit als Antwort zu c): Insgesamt 10 Schüler der Klasse gehören sowohl der AG Mathematik als auch einer Sportgruppe an.

Hieraus und aus der ersten Angabe des Aufgabentextes folgt wegen $20 - 10 = 10$ als Antwort zu b): Insgesamt 10 Schüler der Klasse gehören zwar einer Sportgruppe an, aber nicht der AG Mathematik.

Hinweis: Zur Probe kann man die Anzahlen in das Diagramm Abbildung a eintragen und damit durch $10 + 10 + 2 + 3 = 25$, $10 + 10 = 20$, $10 + 2 = 12$ bestätigen, daß die Angaben des Aufgabentextes erfüllt sind.

Eine andere Lösungsdarstellung ergibt sich z.B., indem man sogleich ein Diagramm (Abbildung b) heranzieht, worin die Anzahlen a , b , c unbekannt sind. Die Angaben des Aufgabentextes lauten mit diesen Bezeichnungen

$$a + b + c + 3 = 25, \tag{1}$$

$$b + c = 20, \tag{2}$$

$$a + c = 12. \tag{3}$$

Aus (1) und (2) folgt $a = 2$; hieraus und aus (3) folgt $c = 10$; hieraus und aus (2) folgt $b = 10$.

Eine Probe ist (zwar zur Sicherheit vor Rechenfehlern nützlich, aber) zu einer vollständigen Lösung nicht erforderlich, da man dem Aufgabentext entnehmen kann, daß seine sämtlichen Angaben erfüllbar sind.

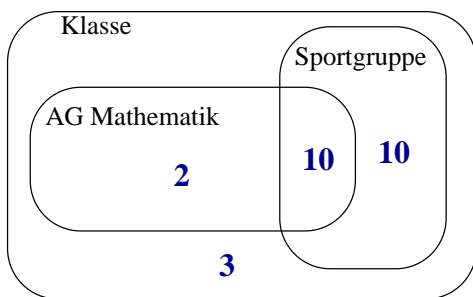


Abbildung a

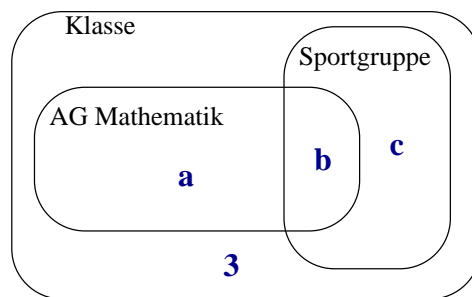


Abbildung b

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)



Quellenverzeichnis

(31) Broschüre vom Volk und Wissen Verlag (VWV)