28. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Saison 1988/1989

Aufgaben und Lösungen

28. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280721:

Im Mathematikunterricht einer Klasse wurden über eine natürliche Zahl, die zwischen 100 und 200 liegt, durch Schüler folgende Aussagen getroffen.

(1) André: "Die Zahl ist durch 11 teilbar."

(2) Birgit: "Die Zahl ist eine Primzahl."

(3) Christian: "Die Zahl ist eine zusammengesetzte Zahl."

(4) Doris: "Die Zahl ist eine Quadratzahl."

Der Mathematiklehrer stellt fest, daß genau eine dieser vier Aussagen falsch ist.

Untersuche, ob die Zahl durch diese Feststellungen eindeutig bestimmt ist! Ist dies der Fall, dann gib die Zahl an!

Aufgabe 280722:

Es sei ABC ein Dreieck, darin sei CD die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ACB$. Die Parallele durch B zu CD schneide die Verlängerung von AC über C hinaus in einem Punkt E.

Beweise, daß unter diesen Voraussetzungen stets das Dreieck BEC gleichschenklig ist!

Aufgabe 280723:

Es sei $ABCD$ ein Trapez mit $AB \parallel CD$, das folgende Bedingungen erfüllt:

(1) Die Längen der Seiten AB und CD verhalten sich wie $5:4$.

(2) Die Mittellinie des Trapezes hat eine Länge von $5,4$ cm.

(3) Die Höhe des Trapezes ist halb so groß wie die Länge der Seite AB.

Untersuche, ob durch diese Angaben der Flächeninhalt des Trapezes $ABCD$ eindeutig bestimmt ist. Ist dies der Fall, dann gib den Flächeninhalt des Trapezes in Quadratzentimetern an!

Aufgabe 280724:

a) Ermittle die Summe der Quersummen aller zweistelligen, durch 5 teilbaren Zahlen!

b) Ermittle die Summe der Quersummen aller natürlichen Zahlen von 0 bis 1 000!

28. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 280721:

Da eine Primzahl weder zusammengesetzte Zahl noch Quadratzahl sein kann, muß die Aussage (2) falsch sein, denn sonst wären (3) und (4) falsch, was der Feststellung des Mathematiklehrers widersprechen würde.

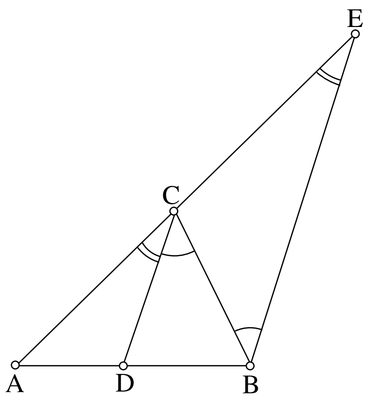
Nochmals wegen dieser Feststellung ist (2) die einzige falsche der Aussagen (1) bis (4), also sind (1) und (4) wahr.

Die gesuchte Zahl ist somit eine durch 11 teilbare Quadratzahl. Da 11 eine Primzahl ist, muß diese durch 11 teilbare Quadratzahl sogar durch $11^2 = 121$ teilbar sein. Die einzige durch 121 teilbare Zahl zwischen 100 und 200 ist aber die Zahl 121 selbst.

Damit ist gezeigt, daß die gesuchte Zahl eindeutig bestimmt ist; sie lautet 121.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280722:



$$\begin{aligned}
\overline{\sphericalangle CBE} &= \overline{\sphericalangle BCD} && (CD \parallel BE \text{ und Wechselwinkelsatz}). && (1)\\
\overline{\sphericalangle BCD} &= \overline{\sphericalangle ACD} && (\text{Halbierung } \sphericalangle ACB \text{ durch } CD) && (2)\\
\overline{\sphericalangle ACD} &= \overline{\sphericalangle CEB} && (CD \parallel BE \text{ und Stufenwinkelsatz}). && (3)\\
\overline{\sphericalangle CBE} &= \overline{\sphericalangle CEB} && (\text{aus (1), (2) und (3)}). && (4)
\end{aligned}$$

Nach der Umkehrung des Basiswinkelsatzes ist somit das Dreieck BEC (mit $\overline{BC} = \overline{EC}$) gleichseitig. □

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280723:

Wegen (1) gilt $\overline{AB} : \overline{CD} = 5 : 4$, also

$$\overline{CD} = \frac{4}{5}\overline{AB}. \qquad (4)$$

Da die Länge der Mittellinie im Trapez gleich der Hälfte der Summe der Längen der beiden parallelen Seiten ist, gilt wegen (2)

$$\frac{1}{2}\,(\overline{AB}+\overline{CD}) = 5,4\,\text{cm}$$

Hieraus und aus (4) folgt

$$\frac{1}{2}\,(\overline{AB}+\frac{4}{5}\,\overline{AB}) = 5,4\,\text{cm}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{9}{5}\,\overline{AB} = 5,4\,\text{cm}$$

$$0,9\,\overline{AB} = 5,4\,\text{cm}$$

$$\overline{AB} = 6\,\text{cm}$$

Nach (3) folgt hieraus: Die Höhenlänge des Trapezes beträgt 3 cm. Daraus und aus (2) ergibt sich nach der Formel für den Flächeninhalt des Trapezes, daß dieser (wegen $5,4\cdot 3 = 16,2$) durch die Angaben (1) bis (3) eindeutig bestimmt ist; er beträgt $16,2\,\text{cm}^2$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280724:

a) Für jede mögliche Zehnerziffer gibt es genau zwei durch 5 teilbare Zahlen, nämlich eine, die auf O, und eine, die auf 5 endet. Die Summe der Zehnerziffern aller zweistelligen durch 5 teilbaren Zahlen ist somit $2\cdot(1+2+3+...+9) = 90$, und die Summe ihrer Einerziffern erhält man mit $9\cdot 5+9\cdot 0 = 45$. Also beträgt die gesuchte Summe der genannten Quersummen $90+45 = 135$.

b) Betrachtet man alle natürlichen Zahlen von 0 bis 999, so erkennt man, daß jede der Ziffern von 0 bis 9 in der Hunderterstelle genau 100mal auftritt.

   Lassen wir die Hunderterstelle unverändert, so tritt in der Zehnerstelle jede der Ziffern genau zehnmal auf, beim Durchlaufen aller zehn Ziffern der Hunderterstelle insgesamt also $10\cdot 10 = 100$ mal. Läßt man die Zehnerstelle und die Hunderterstelle unverändert, so tritt in der Einerstelle jede der Ziffern genau einmal auf, insgesamt $1\cdot 10\cdot 10 = 100$ mal. Die Zahl 1000 hat die Quersumme 1.

Aus den vorgenannten Feststellungen folgt: Die gesuchte Summe der genannten Quersummen beträgt

$$300\cdot 1+300\cdot 2+...+300\cdot 9+1 = 300\cdot 45+1 = 13\,501.$$

Hinweis zur Korrektur: Wird in der Lösung statt verbaler Begründungen mehr mit Aufzählungen (z.B. in a: aller zweistelligen, durch 5 teilbaren Zahlen) gearbeitet, so ist zur Wertung zu berücksichtigen, ob aus der Darstellung (z.B. der Systematik) hervorgeht, daß die Vollständigkeit und kein mehrfaches Vorkommen in der Aufzählung erwiesen ist.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission