28. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Saison 1988/1989

Aufgaben und Lösungen

28. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 280511:

	9	

In jedes der acht freien Felder der Figur ist genau eine natürliche Zahl so einzutragen, daß die Summe der drei in jeder waagerechten und jeder senkrechten Reihe stehenden Zahlen jeweils 39 beträgt.

Finde eine derartige Eintragung, bei der neun Zahlen vorkommen, von denen keine zwei einander gleich sind!

Aufgabe 280512:

Aus den Ziffern 1, 2 und 3 sollen dreistellige Zahlen gebildet werden.

a) Jede dieser drei gegebenen Ziffern soll in jeder der zu bildenden Zahlen genau einmal vorkommen.

   Schreibe alle dreistelligen Zahlen auf, die sich auf diese Art und Weise bilden lassen!

b) In weiteren dreistelligen Zahlen aus den drei gegebenen Ziffern dürfen Ziffern auch mehr als einmal auftreten; dafür brauchen sie nicht alle vorzukommen.

   Schreibe alle diejenigen dreistelligen Zahlen auf, die nun zusätzlich zu den in a) aufgezählten Zahlen noch gebildet worden können!

Aufgabe 280513:

Vier gleich große Kisten mit gleichem Inhalt haben zusammen eine Masse von 132 kg.

Welche Masse hat dann der Inhalt einer Kiste, wenn die Masse aller vier leeren Kisten zusammen 12 kg beträgt?

Aufgabe 280514:

a) Zeichne in ein Koordinatensystem die Punkte $A(1;9)$, $B(4;6)$ und $C(6;10)$!

   Verbinde je zwei dieser drei Punkte durch eine Strecke!

   Wieviel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?

b) Zeichne zwei weitere Punkte D und E; wähle sie so, daß jede Verbindungsstrecke von zwei der fünf Punkte A, B, C, D, E keinen weiteren der fünf Punkte enthält! Verbinde je zwei der fünf Punkte durch eine Strecke!

   Wieviel Verbindungsstrecken sind das insgesamt?

c) Man kann die in b) gesuchte Anzahl von Verbindungsstrecken auch durch eine Überlegung ermitteln, ohne die Punkte und die Strecken zu zeichnen.

   Beschreibe eine solche Überlegung!

d) Ermittle auf die in c) beschriebene Weise die Anzahl aller Verbindungsstrecken zwischen je zwei von zehn Punkten, für die dasselbe wie in b) gilt!

28. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 280511:

10	14	15
17	9	13
12	16	11

Eine mögliche Eintragung, die die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, zeigt die Abbildung. Es gibt noch weitere derartige Eintragungen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280512:

a) Die gesuchten Zahlen sind 123, 132, 213, 231, 312 und 321.

b) Die zusätzlich zu den in a) schon aufgezählten Zahlen noch zu bildenden Zahlen sind:

111, 112, 113, 121, 122, 131, 133,

211, 212, 221, 222, 223, 232, 233,

311, 313, 322, 323, 331, 332, 333.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280513:

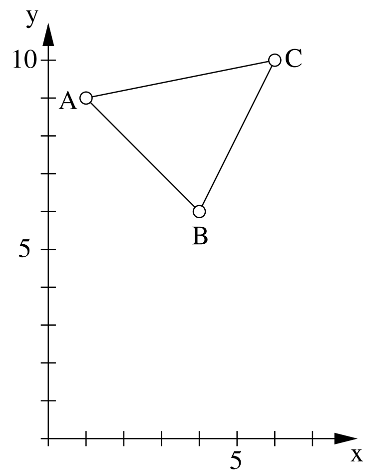
Wegen $132 - 12 = 120$ beträgt die Gesamtmasse des Inhalts der vier Kiston 120 kg.

Folglich beträgt wegen $120 : 4 = 30$ die Masse des Inhalts je einer Kiste 30 kg.

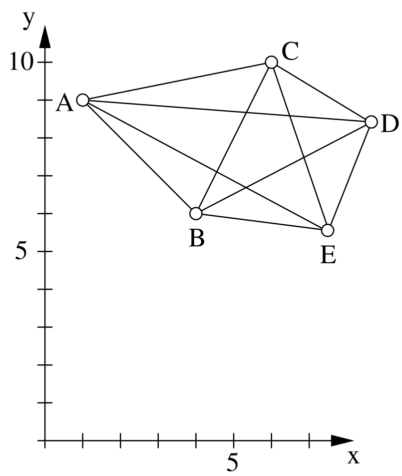
Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 280514:

a) Es gibt genau 3 solcher Verbindungsstrecken.



b) Eine mögliche Lage der Punkte D und E, bei der die geforderten Bedingungen erfüllt sind, zeigt die Abbildung. Es gibt genau 10 solcher Verbindungsstrecken.



c) Eine mögliche Überlegung dafür, daß es bei der geforderten Lage der Punkte A, B, C, D, E genau 10 Verbindungsstrecken gibt, wäre: Von A aus lassen sich genau 4 Strecken zu den von A verschiedenen Punkten zeichnen, von B aus dann noch genau 3 Strecken zu den von A und von B verschiedenen Punkten, von C aus noch genau 2 Strecken zu den von A, B und C verschiedenen Punkten und von D aus noch genau eine Strecke zu dem von A, B, C und D verschiedenen Punkt E. Das sind wegen $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ insgesamt genau 10 Strecken.

Eine andere Überlegung wäre: Jeder Punkt läßt sich durch Strecken mit genau vier anderen Punkten verbinden. Das ergibt für die fünf Punkte wegen $4 \cdot 5 = 20$ dann 20 Strecken, wenn man jede Strecke doppelt zählt (also nicht berücksichtigt, daß z.B. die Strecke AB gleich der Strecke BA ist). Tatsächlich sind es wegen $20 : 2 = 10$ genau 10 Strecken, die sich auf die geforderte Weise einzeichnen lassen.

d) Durch entsprechende Überlegungen wie in c) erhält man, daß es unter den angeführten Bedingungen wegen

$$9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 45$$

(bzw. wegen $9 \cdot 10 = 90$ und $90 : 2 = 45$) genau 45 Strecken gibt, die die zehn Punkte auf die geforderte Weise miteinander verbinden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission