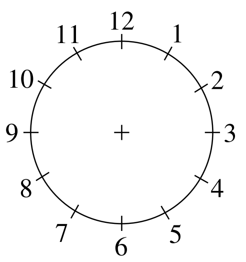
# 27. Mathematik Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 7
# Saison 1987/1988

Aufgaben und Lösungen

# 27. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 7
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

## Aufgabe 270711:




Klaus ließ versehentlich seinen Wecker zu Boden fallen. Dabei zersprang das Zifferblatt in drei Flächenstücke. Nachdem der erste Schreck über das Mißgeschick vorüber war, bemerkte Klaus, daß keine der 12 Zahlen beim Zerspringen des Zifferblattes auseinandergerissen worden war. Er berechnete für jedes der drei Flächenstücke die Summe derjenigen Zahlen, die auf diesem Flächenstück standen. Dabei stellte er fest, daß sich in allen drei Fällen dieselbe Summe ergab.

Wie könnte das Zifferblatt zersprungen sein? Gib eine Möglichkeit hierfür an und überprüfe, daß die von Klaus gemachte Feststellung für deine Angabe zutrifft!

## Aufgabe 270712:

In einer Kiste befinden sich genau 100 Kugeln, und zwar 30 rote, 30 blaue, 30 grüne sowie 10 Kugeln, von denen nur bekannt ist, daß sie schwarz oder weiß sind und daß mindestens eine schwarze Kugel dabei ist. Durch das Tastgefühl lassen sich verschiedenfarbige Kugeln nicht voneinender unterscheiden.

Untersuche, ob es trotzdem möglich ist, mit geschlossenen Augen eine jeweils geeignete Anzahl von Kugeln, aber nicht alle, so herauszugreifen, daß man mit Sicherheit vorhersagen kann:

a) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 12 Kugeln von gleicher Farbe.

b) Unter den herausgegriffenen Kugeln befindet sich mindestens eine schwarze Kugel.

c) Unter den herausgegriffenen Kugeln befinden sich mindestens 5 weiße Kugeln.

## Aufgabe 270713:

In einen Dreieck seien die Maßzahlen der in Zentimeter gemessenen Längen aller Seiten ganzzahlig, gerade und untereinander verschieden. Bekannt ist $a = 6$ cm und $b = 4$ cm.

Untersuche, ob aus diesen Angaben der Umfang des Dreiecks eindeutig ermittelt werden kann! Ist dies der Fall, dann gib den Umfang an!

## Aufgabe 270714:

Bekanntlich hat jedes Viereck genau zwei Diagonalen.

a) Ermittle die Anzahl der Diagonalen eines Fünfecks und eines Sechsecks!

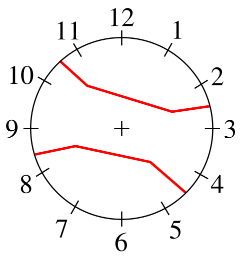
b) Finde eine Formel für die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks in Abhängigkeit von der Eckenzahl n des Vielecks! Die Formel soll für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gelten. Begründe diese Formel!

c) Welchen Wert gibt diese Formel, wenn man sie für $n = 3$ anwendet? Läßt sich auch dieser Wert in eine geometrisch anschauliche Aussage fassen?

# 27. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 7
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 270711:




Das Zifferblatt könnte so zersprungen sein, wie die Abbildung zeigt. Dies überprüft man, indem man bestätigt, daß $11 + 12 + 1 + 2 = 3 + 4 + 9 + 10 = 5 + 6 + 7 + 8 = 26$ gilt.

*Hinweis:* Man kann das Aufsuchen dieser Lösung mit folgander Überlegung beginnen: Da die Summe aller Zahlen des Zifferblattes 78 beträgt, muß die Summe auf jedem der drei Teilstücke $73 : 3 = 26$ betragen.

Durch systematisches Erfassen aller möglichen Fälle kann man dann sogar zeigen, daß die angegebene Aufteilung der 12 Zahlen in drei Mengen (die auf drei Flächenstücken des Zifferblattes stehen können) die einzige ist, für die die von Klaus gemachte Feststellung zutrifft.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 270712:

a) Ein solches Herausgreifen ist möglich.

   Die größtmögliche Anzahl herausgegriffener Kugeln, unter denen sich keine 12 von gleicher Farbe befinden, ergibt sich nämlich, indem man 11 rote, 11 blaue, 11 grüne und alle 10 schwarzen oder weißen Kugeln herausgreift, das sind 43 Kugeln. Greift man also (mindestens) 44 Kugeln heraus, so kann man folglich mit Sicherheit vorhersagen, daß sich darunter mindestens 12 von gleicher Farbe befinden müssen.

b) Ein solches Herausgreifen ist nicht möglich.

   Denn greift man, wie verlangt, nicht alle Kugeln heraus, so ist (unter den angegebenen Voraussetzungen) auch der Fall möglich, daß sich von Anfang an überhaupt nur eine schwarze Kugel in der Kiste befand und daß (mindestens) gerade diese Kugel nicht mit herausgegriffen wird.

c) Auch ein solches Herausgreifen ist nicht möglich.

   Denn es ist (unter den angegebenen Voraussetzungen) auch der Fall möglich, daß sich von Anfang an weniger als 5 weiße Kugeln in der Kiste befanden und folglich bei keinem Herausgreifen 5 weiße genommen werden.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 270713:

In jedem Dreieck gilt: Eine Seite ist stets kleiner als die Summe und stets größer als die Differenz der beiden anderen Selten.

Folglich gilt laut Aufgabe 2 cm $< c <$ 10 cm, wobei $c$ die Länge der dritten Seite des betrachteten Dreiecks ist.

Da nach Voraussetzung die Maßzahl von $c$ gerade und von 4 und 6 verschieden ist, erfüllt nur $c = 8$ cm alle Bedingungen.

Der Umfang $u$ des Dreiecks läßt sich somit eindeutig ermitteln, und es gilt: $u = 6\text{ cm}+4\text{ cm}+8\text{ cm} = 18\text{ cm}$.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 270714:

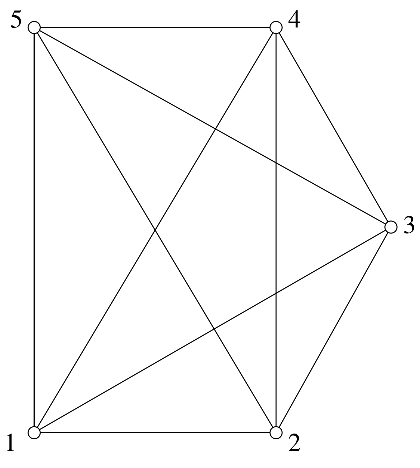
a) Das Fünfeck hat genau fünf und das Sechseck genau neun Diagonalen, wie man z.B. der Abbildung entnehmen kann.

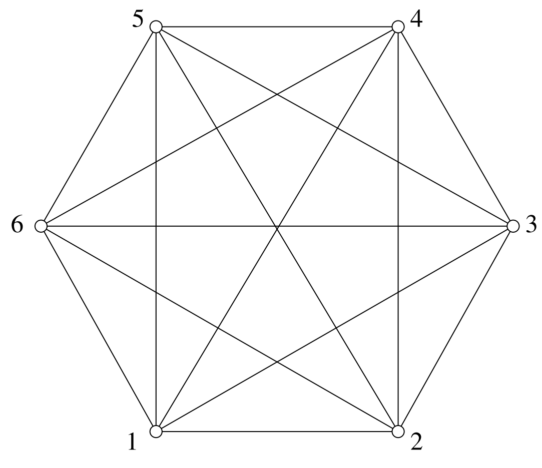
b) Um in einem $n$-Eck alle Diagonalen zu erfassen, kann man für jeden der $n$ Eckpunkte die Verbindungsstrecke zu jedem anderen Eckpunkt außer den beiden benachbarten Eckpunkten betrachten. Damit hat man insgesamt $n \cdot (n-3)$mal eine Strecke betrachtet, und zwar jede Diagonale des $n$-Ecks genau 2mal.

Bezeichnet man die Anzahl der Diagonalen mit $x$, so gilt demzufolge $x = \frac{n\cdot(n-3)}{2}$

c) Für $n = 3$ gibt diese Formel den Wert $x = \frac{3\cdot(3-3)}{2} = \frac{3\cdot 0}{3} = 0$.

Er läßt sich in die Aussage fassen, daß bei jedem Dreieck die Anzahl der Diagonalen gleich Null ist.




*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

# Quellenverzeichnis

**(25)** Offizielle Lösung der Aufgabenkommission