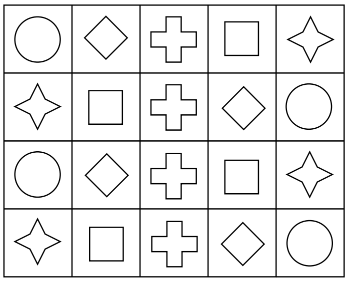
27. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Saison 1987/1988

Aufgaben und Lösungen

27. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 270511:



Jemand will die abgebildete Figur in genau vier Teile zerschneiden. Keines der 20 kleinen Quadrate soll dabei zerschnitten werden. Die vier Teile sollen sich so übereinander legen lassen, daß sie sich dann völlig gleichen (gleiche Gestalt und gleiche Verteilung der Muster).

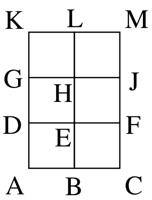
Es gibt fünf Möglichkeiten für eine derartige Zerlegung. Zeichne diese fünf Zerlegungen! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 270512:

Eine Strecke von 240 mm Länge soll in zwei Teilstrecken zerlegt werden. Die größere Teilstrecke soll genau 47mal so lang sein wie die kleinere.

Wie lang muß dann die kleinere Teilstrecke sein und wie lang die größere? Begründe deine Antwort!

Aufgabe 270513:



Die Abbildung zeigt ein Rechteck $ACMK$, das aus sechs kleinen Quadraten zusammengesetzt ist. Man kann in der Abbildung außer diesem Rechteck noch weitere Rechtecke finden, die sich aus solchen kleinen Quadraten zusammensetzen und die selbst keine Quadrate sind. Zum Beispiel ist $DFJG$ ein derartiges Rechteck.

Nenne alle derartigen Rechtecke außer $ACMK$!

Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 270514:

a) Die Figur der Abbildung a soll so "in einem Zuge" gezeichnet werden, daß dabei keine Linie zweimal durchlaufen wird.

Ein solcher "Zug" kann z.B. im Punkt L beginnen und über die Punkte M, J, K, L, B, A, H, G, H, J, F, G, F, M, D, F, E, D, C, B, H, K, B, C, D nach Punkt L zurückführen.

Suche mindestens einen weiteren derartigen "Zug" und schreibe ihn wie im Beispiel mit Hilfe der bei ihm zu durchlaufenden Punkte auf!

b) Auch die Figur der Abbildung b läßt sich in einem Zuge so zeichnen, daß jede Linie genau einmal durchlaufen wird. Gib mindestens einen derartigen "Zug" an!

c) Vergleiche Anfangs- und Endpunkt der von dir in den Abbildungen a und b gefundenen Wege! Was stellst du fest?

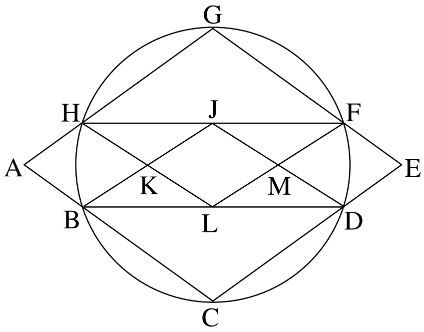


Abbildung a

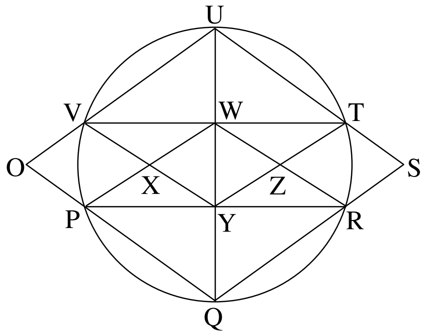


Abbildung b

27. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 270511:
Siehe Abbildungen a bis e

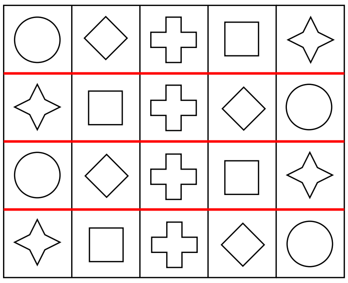


Abbildung a

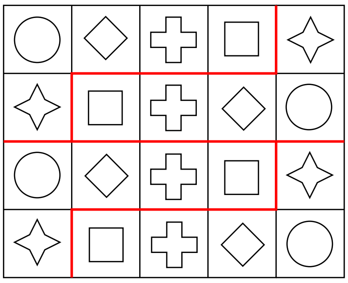


Abbildung b

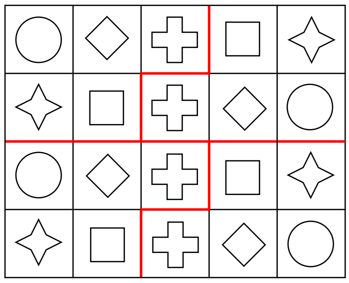


Abbildung c

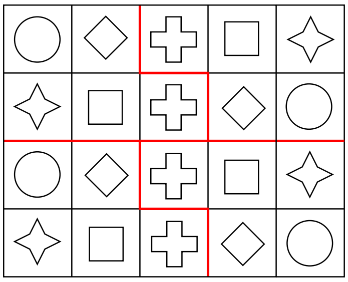


Abbildung d

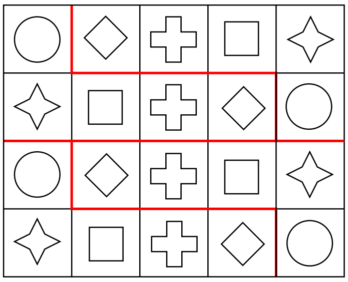


Abbildung e

Hinweis: Durch systematisches Erfassen der Zerlegungen kann man feststellen, daß es keine weiteren gibt.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 270512:
Da die größere Teilstrecke genau 47mal so lang sein soll wie die kleinere, müssen genau 48 solcher kleinen Teile zusammengesetzt eine Strecke ergeben, die genau so lang ist wie die ganze Strecke.

Wegen $240 : 48 = 5$ muß also die kleinere Teilstrecke 5 mm lang sein, und wegen $240 - 5 = 235$ muß die größere Teilstrecke 235 mm lang sein.

Hinweis: Eine Überprüfung (im Aufgabentext nicht gefordert) zeigt, daß diese beiden Längen alle Forderungen erfüllen: Es gilt $5 + 235 = 240$ und $5 \cdot 47 = 235$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 270513:
Alle derartigen Rechtecke sind

$$ABHG,\ ABLK,\ ACFD,\ BCJH,\ BCML,\ DELK,\ DFJG,\ EFML,\ GJMK.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 270514:
Es gibt zu a) und b) jeweils mehrere Lösungen, z.B.

a) J, M, L, K, J, H, A, B, C, B, L, D, C, D, M, F, D, E, F, G, H, B, K, H, G, F, J,

b) U, V, U, W, V, X, W, Y, X, P, O, V, P, Y, Q, P, Q, R, S, T, R, Z, T, U, T, W, Z, Y, R, Q.

Für alle Lösungen gelten die Aussagen zu c).

c) Jeder Zug bei a) endet im gewählten Anfangspunkt. (Man sagt dafür auch: Der Zug ist ein "geschlossener Weg". Dabei kann jeder Punkt Anfangs- und damit auch Endpunkt sein.)

   Die Züge bei b) beginnen alle entweder im Punkt U oder im Punkt Q und enden je nachdem im Punkt Q oder im Punkt U. Anfangs- und Endpunkt fallen also bei b) nicht zusammen, es handelt sich um einen "offenen Weg".

Hinweis: Es gibt Merkmale, an denen man von vornherein erkennen kann, ob sich eine Figur in einem Zuge zeichnen läßt und ob dabei der durchlaufene Weg geschlossen oder offen ist. Man betrachtet dazu die Punkte der Figur und unterscheidet bei ihnen *gerade* und *ungerade* Punkte, je nachdem, ob sich in ihnen eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Linien trifft.

Die folgenden Aussagen lassen sich beweisen:

(1) Jede Figur *ohne* ungerade Punkte läßt sich in einem Zug zeichnen. Dabei kann jeder ihrer Punkte als Anfangspunkt gewählt werden und ist dann auch Endpunkt. Eine Figur kann, falls überhaupt, nur eine gerade Anzahl ungerader Punkte haben.

(2a) Hat sie genau zwei ungerade Punkte, so läßt sie sich in einem Zuge zeichnen, sofern einer der beiden ungeraden Punkte als Anfangspunkt gewählt wird; der andere ungerade Punkt ist dann Endpunkt.

(2b) Besitzt die Figur mehr als zwei ungerade Punkte, kann sie *nicht* in einem Zug gezeichnet werden.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission