26. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Saison 1986/1987

Aufgaben und Lösungen

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260821:

In der Kleinstadt A hat der Fleischer jeden Montag geschlossen, das Haushaltswarengeschäft jeden Dienstag und der Schuhmacher jeden Donnerstag. Der Optiker hat nur montags, mittwochs und freitags geöffnet. Am Sonntag sind alle Geschäfte geschlossen.

Eines Tages gingen die Freundinnen Anja, Ilka, Katrin und Susann, jede in ein anderes dieser vier Geschäfte. Als sie sich unterwegs trafen, sagten sie:

(1) Anja: "Susann und ich wollten eigentlich schon eher in dieser Woche einkaufen gehen, aber da gab es keinen Tag, an dem wir beide hätten unsere Besorgungen machen können."

(2) Ilka: "Ich wollte heute eigentlich nicht einkaufen, aber morgen hat das Geschäft geschlossen, in dem ich einkaufen will."

(3) Katrin: "Ich hätte auch schon gestern oder vorgestern alles besorgen können."

(4) Susann: "Ich hätte ebenso gestern oder auch morgen meinen Einkauf erledigen können."

Untersuche, ob diese Angaben miteinander vereinbar sind und ob dann aus ihnen eindeutig folgt,

(a) wer von den genannten Mädchen in welchem der angegebenen Geschäfte war.

(b) an welchem Wochentag das Gespräch stattgefunden hat!

Ist dies der Fall, dann gib die entsprechenden Antworten auf die Fragen (a) und (b)!

Aufgabe 260822:

Es sei k ein Halbkreis über dem Durchmesser AB. Eine Gerade schneide k in zwei von A und B verschiedenen Punkten D und C sowie die Verlängerung von AB über B hinaus in einem Punkt E derart, daß C zwischen D und E liegt. Außerdem gelte

(1) $\overline{BD} = \overline{BE}$ und

(2) $\sphericalangle DAC = 27°$.

Ermittle die Größe α des Winkels $\sphericalangle ACD$!

Aufgabe 260823:

Es sei $ABCDEFGHJKLM$ ein gerades sechsseitiges Prisma, in dem die sechs Seitenflächen $ABHG$, $BCJH$, $CDKJ$, $DELK$, $EFML$, $FAGM$ sowie die Grund- und Deckfläche $ABCDEF$ und $GHJKLM$ sämtlich einander umfangsgleich sind. Gegeben sei die Länge h der Strecke AG.

Ermittle in Abhängigkeit von h die Längen der Strecken AB, BC, CD, DE, EF und FA!

Aufgabe 260824:

a) Ermittle alle diejenigen zweistelligen natürlichen Zahlen z, die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die beiden Ziffern von z eine dritte Ziffer, so entsteht eine dreistellige Zahl, die 29mal so groß ist wie z.

b) Gib an, wie man weitere natürliche Zahlen z' bilden kann, die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer, so entsteht eine neue Zahl, die 29mal so groß ist wie z'.

c) Ermittle alle diejenigen natürlichen, nicht durch 10 teilbaren Zahlen z'', die folgende Bedingung erfüllen:

Setzt man vor die sämtlichen Ziffern von z' eine weitere Ziffer oder mehrere weitere Ziffern, so entsteht eine neue Zahl, die 29mal so groß ist wie z''.

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 8
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 260821:

Wie der nachfolgende Öffnungsplan zeigt, muss das Gespräch der Freundinnen entweder am Mittwoch oder am Freitag stattgefunden haben, da nur an diesen beiden Tagen die vier genannten Geschäfte gleichzeitig geöffnet hatten (x bedeutet geschlossen):

	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
Fleischer	x						x
Haushaltwaren		x					x
Schuhmacher				x			x
Optiker		x		x		x	x

Wegen (1) kann das Gespräch nicht an einem Freitag stattgefunden haben, denn alle Besorgungen, die Anja und Susann am Freitag hätten machen können, wären auch am Mittwoch zu erledigen gewesen. Also fand das Gespräch an einem Mittwoch statt, und es folgt weiter:
Wegen (4) muss Susann zum Fleischer gegangen sein, wegen (3) Katrin zum Schuhmacher. Hiernach und wegen (2) war Ilka beim Optiker und folglich Anja im Haushaltwarengeschäft, und bei dieser Verteilung ist auch (1) erfüllt.
Daher sind die Angaben miteinander vereinbar, und aus ihnen folgt eindeutig:

(a) Anja war im Haushaltwarengeschäft, Ilka beim Optiker, Katrin beim Schuhmacher, Susann beim Fleischer.

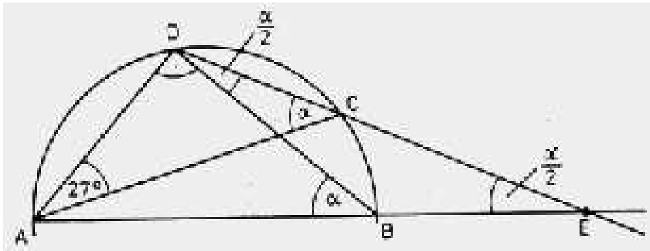
(b) Das Gespräch fand am Mittwoch statt.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)

Lösung 260822:

Das Dreieck EDB ist wegen (1) gleichschenklig, also ist
$$\overline{\sphericalangle EDB} = \overline{\sphericalangle BED}.$$
Die Winkel $\sphericalangle ABD$ und $\sphericalangle ACD$ sind Peripheriewinkel über dem gleichen Bogen $\widehat{AD}$, also ist
$$\overline{\sphericalangle ABD} = \overline{\sphericalangle ACD} = \alpha.$$
Der Winkel $\sphericalangle ABD$ ist Außenwinkel des Dreiecks EDB. Also ist
$$\overline{\sphericalangle BED} + \overline{\sphericalangle EDB} = \overline{\sphericalangle ABD} \text{ und wegen (3)}$$
$$\overline{\sphericalangle BED} = \overline{\sphericalangle EDB} = \frac{\alpha}{2}.$$
Der Winkel $\sphericalangle BDA$ ist als Peripheriewinkel über dem Durchmesser ein rechter Winkel.
Im Dreieck ACD gilt nach dem Innenwinkelsatz und wegen (2):
$$27^\circ + \alpha + \frac{\alpha}{2} + 90^\circ = 180^\circ, \text{ also}$$

$$\frac{3}{2}\alpha = 63°,$$



$$\alpha = 42°.$$

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)

Lösung 260823:

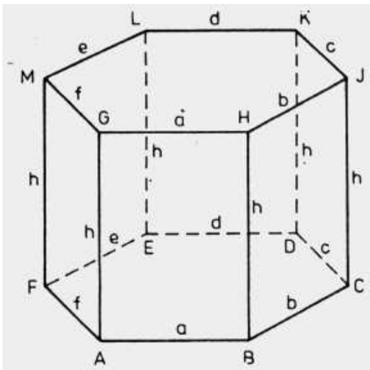
Da die Seitenflächen jedes geraden Prismas Rechtecke sind, also jeweils gleichlange Gegenseiten haben, ist die gegebene Länge

$h = \overline{AG} = \overline{BH} = \overline{CJ} = \overline{DK} = \overline{EL} = \overline{FM}$, und für die gesuchten Längen gilt
$a = \overline{AB} = \overline{GH}$, $b = \overline{BC} = \overline{HJ}$, $c = \overline{CD} = \overline{JK}$,
$d = \overline{DE} = \overline{KL}$, $e = \overline{EF} = \overline{LM}$, $f = \overline{FA} = \overline{MG}$.

Aus der Umfangsgleichheit aller sechs Seitenflächen folgt
$2a + 2h = 2b + 2h = 2c + 2h = 2d + 2h = 2e + 2h = 2f + 2h$, also
$a = b = c = d = e = f$;

und aus der Umfangsgleichheit der Grundfläche mit jeder Seitenfläche folgt somit
$6a = 2a + 2h$, also
$a = \frac{h}{2}$.

Daher sind die gesuchten Längen
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = \frac{h}{2}.$$



Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)

Lösung 260824:

a) Wenn z zusammen mit einer davorzusetzenden Ziffer a die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt, so gilt

$$100a + z = 29z,$$
$$100a = 28z,$$
$$z = \frac{25a}{7}, \qquad (1)$$

ferner ist z eine natürliche Zahl, also $25a$ durch 7 teilbar. Da 25 zu 7 teilerfremd ist, muss a durch 7 teilbar sein. Außerdem gilt $a \neq 0$ (denn aus $a = 0$ ergäbe sich $z = 0$ im Widerspruch zur Zweistelligkeit von z). Die einzige von 0 verschiedene durch 7 teilbare Ziffer ist aber $a = 7$. Damit folgt aus (1), dass nur

$$z = 25$$

den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen kann, und zwar zusammen mit der davorzusetzenden Ziffer $a = 7$. In der Tat werden damit diese Bedingungen erfüllt; denn es gilt $725 = 29 \cdot 25$

b) Man kann Zahlen z' mit der geforderten Eigenschaft z.B. dadurch bilden, dass man an die eben gefundene Zahl 25 eine beliebige Anzahl Nullen anhängt; denn es gilt $72500...0 = 29 \cdot 2500...0$.

c) Wenn z'' zusammen mit einer davorzusetzenden Ziffernfolge, die für sich genommen die natürliche Zahl b darstellt, die Bedingungen der Aufgabenstellung erfüllt und wenn z'' eine n-stellige natürliche Zahl ist, so gilt

$$10^n + b + z'' = 29z'',$$
$$10^n \cdot b = 28z'',$$
$$z'' = \frac{10^n \cdot b}{28}. \qquad (2)$$

Ferner ist z'' eine natürliche Zahl, also $10^n \cdot b$ durch (28 und folglich durch) 7 teilbar. Da 10^n zu 7 teilerfremd ist, muss b durch 7 teilbar sein. Ferner ist

$$b \neq 0;$$

denn aus $b = 0$ ergäbe sich $z'' = 0$ im Widerspruch zu der in der Aufgabenstellung enthaltenen Bedingung, dass z'' nicht durch 10 teilbar sein soll.

Daraus, dass z'' eine n-stellige Zahl ist, folgt $z'' < 10^n$; hieraus und aus (2) ergibt sich

$$\frac{b}{28} < 1, \text{ also } b < 28.$$

Somit muss b eine der Zahlen 7, 14, 21 sein. In diesen drei Fällen ergibt sich

$$z'' = \frac{10^n}{4} = 10^{n-1} \cdot 25 \text{ bzw. } z'' = \frac{10^n}{2} = 10^{n-1} \cdot 5 \text{ bzw. } z'' = \frac{10^n \cdot 3}{4} = 10^{n-2} \cdot 75$$

Das ist jeweils nur dann eine nicht durch 10 teilbare natürliche Zahl, wenn

$$n = 2 \text{ bzw. } n = 1 \text{ bzw. } n = 2$$

gilt. Dies führt jeweils auf

$$z'' = 25 \text{ bzw. } z'' = 5 \text{ bzw. } z'' = 75.$$

Also können nur diese Zahlen den Bedingungen der Aufgabenstellung genügen, und zwar nur zusammen mit der davorzusetzenden Ziffernfolge

$$b = 7 \text{ bzw. } b = 14 \text{ bzw. } b = 21.$$

In der Tat werden damit die Bedingungen erfüllt, denn die genannten Zahlen z'' sind nicht durch 10 teilbar, und es gilt

$$725 = 29 \cdot 25 \text{ bzw. } 145 = 29 \cdot 5 \text{ bzw. } 2175 = 29 \cdot 75.$$

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (0)

Quellenverzeichnis

(0) Unbekannt