# 26. Mathematik Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 7
# Saison 1986/1987

Aufgaben und Lösungen

# 26. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 7
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260731:

Herr Anders fuhr mit seinem Pkw auf der Autobahn mit einer Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$ an einer Tankstelle ($A$) vorbei. Nach einer weiteren Fahrstrecke von 175 km mußte Herr Anders den Benzinhahn auf Reserve stellen. Da die nächste Tankstelle ($B$) von dieser Stelle aus auf der Autobahn noch 45 km entfernt liegt, verringerte Herr Anders seine Geschwindigkeit auf 60 $\frac{km}{h}$, um weniger Benzin zu verbrauchen.

Mit welcher Durchschnittsgeschwindigkeit legte Herr Anders die Strecke zwischen $A$ und $B$ zurück?

(Der kurze Bremsweg, auf dem die Geschwindigkeit von 100 $\frac{km}{h}$ auf 60 $\frac{km}{h}$ herabgesetzt wurde, soll in der Rechnung nicht berücksichtigt werden, da er die gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit nur unwesentlich beeinflußt.)

Aufgabe 260732:

Über die Feriengäste in einem Ferienheim ist folgendes bekannt:

> Die Anzahl der Mädchen ist gleich der Hälfte der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Mädchen sind.
>
> Die Anzahl der Jungen ist gleich einem Drittel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Jungen sind.
>
> Die Anzahl der Frauen ist gleich einem Viertel der Anzahl derjenigen Feriengäste, die keine Frauen sind.
>
> Außer diesen Mädchen, Jungen und Frauen sind in diesem Ferienheim als Feriengäste noch genau 26 Männer.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig die Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben! Wenn dies der Fall ist, gib diese Anzahlen an!

Aufgabe 260733:

Es sei $ABC$ ein spitzwinkliges Dreieck; sein Umkreis $k$ habe den Mittelpunkt $M$. Der Strahl aus $A$ durch $M$ schneide $k$ in $D$, der Strahl aus $B$ durch $M$ schneide $k$ in $E$, der Strahl aus $C$ durch $M$ schneide $k$ in $F$.

Ermittle das Verhältnis der Flächeninhalte des Sechsecks $AFBDCE$ und des Dreiecks $ABC$!

Aufgabe 260734:

Ermittle alle diejenigen Paare $(m; n)$ natürlicher Zahlen, die folgende Bedingungen erfüllen!

(1) $m$ und $n$ sind dreistellige Zahlen.

(2) Es gilt $m - n = 889$.

(3) Für die Quersumme $Q(m)$ und $Q(n)$ von $m$ und $n$ gilt $Q(m) - Q(n) = 25$.

Aufgabe 260735:

Bekanntlich haben in jedem gleichseitigen Dreieck die drei Seitenhalbierenden, die zugleich auch die drei Winkelhalbierenden und die drei Höhen sind, einen gemeinsamen Schnittpunkt.

Gibt es Dreiecke $ABC$, die nicht gleichseitig sind und bei denen wenigstens die Seitenhalbierende von $BC$, die Winkelhalbierende von $\sphericalangle ABC$ und die zur Seite $AB$ senkrechte Höhe einen gemeinsamen Schnittpunkt haben? Wenn es solche Dreiecke gibt, so konstruiere ein derartiges Dreieck und beschreibe deine Konstruktion! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 260736:

Es sei $ABCDEFGH$ ein Würfel mit $AE \parallel BF \parallel CG \parallel DH$; dabei sei $EFGH$ eine Seitenfläche des Würfels; der Schnittpunkt ihrer Diagonalen $EG$ und $FH$ sei $S$.

a) Beweise, daß der Winkel $\sphericalangle ESA$ kein rechter Winkel ist!

b) Beweise, daß der Winkel $\sphericalangle DSE$ ein rechter Winkel ist!

# 26. Mathematik-Olympiade
# 3. Stufe (Bezirksolympiade)
# Klasse 7
# Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 260731:

Die Fahrstrecke von $A$ bis zu der Stelle, an der die Geschwindigkeit herabgesetzt wurde, beträgt $s_1 = 175\,\mathrm{km}$, die Fahrstrecke von dieser Stelle bis $B$ beträgt $s_2 = 45\,\mathrm{km}$, die Gesamtstrecke von $A$ bis $B$ also

$$s = s_1 + s_2 = 220\,\mathrm{km}. \tag{1}$$

Die Geschwindigkeit, mit der die erste Teilstrecke zurückgelegt wurde, beträgt $v_1 = 100\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Da diese Geschwindigkeit konstant war, ergibt sich als Fahrzeit für diese Strecke

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{175}{100}\,\mathrm{h} = \frac{7}{4}\,\mathrm{h}.$$

Die Geschwindigkeit, mit der die zweite Teilstrecke zurückgelegt wurde, beträgt $v_2 = 60\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Da auch diese Geschwindigkeit konstant war, ergibt sich als Fahrzeit für diese Strecke

$$t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{45}{60}\,\mathrm{h} = \frac{3}{4}\,\mathrm{h}.$$

Also ist die gesamte Fahrzeit von $A$ nach $B$

$$t = t_1 + t_2 = \frac{10}{4}\,\mathrm{h} = \frac{5}{2}\,\mathrm{h}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) ergibt sich als gesuchte Durchschnittsgeschwindigkeit

$$v = \frac{s}{t} = \frac{200}{\frac{5}{2}}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{440}{5}\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 88\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}.$$

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 260732:

Es sei $m$ die Anzahl der Mädchen, $j$ die Anzahl der Jungen und $f$ die Anzahl der Frauen. Die Anzahl aller Feriengäste in dem Ferienheim sei $x$. Dann gilt nach Aufgabenstellung

$$m = \frac{1}{2}(x - m), \text{ also}$$
$$2m = x - m \text{ und somit}$$
$$m = \tfrac{x}{3}.\ ^{*)} \tag{1}$$

Entsprechend folgt aus $j = \frac{1}{3}(x - j)$, also $3j = x - j$, die Beziehung

$$j = \tfrac{x}{4}. \tag{2}$$

und aus $f = \frac{1}{4}(x - f)$, also $4f = x - f$, die Beziehung

$$f = \tfrac{x}{5}. \tag{3}$$

Nach Aufgabenstellung gilt weiterhin

$$x = m + j + f + 26.$$

Hieraus folgt wegen (1), (2), (3)

$$\begin{aligned} x &= \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} + 26, \\ \frac{13x}{60} &= 26, \\ x &= 120. \end{aligned}$$

Nochmals nach (1), (2), (3) folgt hieraus

$$m = 40, \qquad j = 30, \qquad f = 24.$$

Damit ist gezeigt, daß sich aus den Angaben eindeutig diese Anzahlen der Mädchen, Jungen und Frauen ergeben.

*Hinweis zur Korrektur:* Da die Existenz der gesuchten Anzahlen dem Aufgabentext entnommen werden kann, ist eine Probe nicht für eine vollständige Lösung erforderlich.

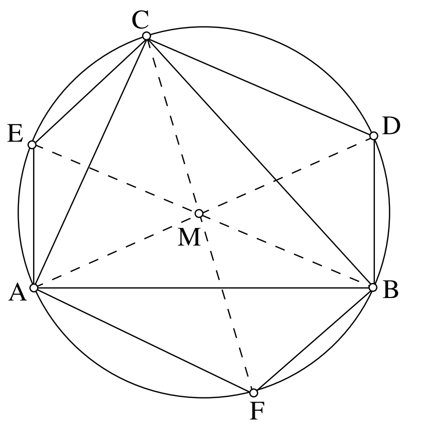
Als Begründung nicht ausreichend ist dagegen hier die Feststellung, daß $m = \frac{x}{3}$ die Bedingung der Aufgabe erfüllt ("da $\frac{x}{3}$ die Hälfte von $\frac{2}{3}x$ ist"); denn allein aus dieser Feststellung folgt noch nicht die nachzuweisende Eindeutigkeit (also die Aussage, daß kein anderer Wert als $m = 40$ die Bedingung erfüllt).

*) Andere Darstellungsmöglichkeiten dieses Lösungsteils: Addiert man zu der Anzahl ($m$) der Mädchen das Doppelte dieser Anzahl, so erhält man nach Aufgabenstellung die Anzahl ($x$) aller Feriengäste. Also gilt $3m = x$ und somit (1).

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 260733:

Da die Dreiecke $MFA$ und $MCA$ in den Seitenlängen $\overline{MF}$, $\overline{MC}$ (Radien von $k$) und in der Länge der zugehörigen Höhe (Lot von $A$ auf den Durchmesser $FC$) übereinstimmen, gilt mit der Bezeichnung: Ist $PQR$ ein Vieleck, so bezeichnet $J(PQR)$ seinen Flächeninhalt:




$$J(MFA) = J(MCA).$$

Entsprechend erhält man

$$\begin{aligned} J(MCD) &= J(MCA), \\ J(MFB) &= J(MCB), \\ J(MCE) &= J(MCB), \\ J(MDB) &= J(MAB), \\ J(MAE) &= J(MAB). \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen ergibt sich

$$J(AFBDCE) = 2 \cdot J(ABC).$$

Das gesuchte Verhältnis beträgt folglich 2:1.

*Hinweis:* Man kann auch z.B. aus der Zentralsymmetrie $J(ADCE) = J(ADBF)$ erhalten und dann (durch Verwendung nur dreier der obigen Gleichungen) etwa $J(ADCE) = J(ABC)$ nachweisen.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 260734:

I. Wenn ein Paar $(m; n)$ natürlicher Zahlen die Bedingungen erfüllt, so folgt: Wegen (1) gilt

$$1 \leq Q(m) \leq 27, \qquad 1 \leq Q(n) \leq 27.$$

Daher kann (3) nur so erfüllt werden, daß

$$\begin{array}{ll} \text{entweder} & Q(m) = 27, \quad Q(n) = 2 \\ \text{oder} & Q(m) = 26, \quad Q(n) = 1 \end{array}$$

gilt.

Die einzige dreistellige Zahl $m$ mit der Quersumme $Q(m) = 27$ ist aber $m = 999$; nach (2) ergibt sich hierfür weiter $n = m - 889 = 110$. Die einzige dreistellige Zahl $n$ mit der Quersumme $Q(n) = 1$ ist $n = 100$; nach (2) ergibt sich hierfür weiter $m = 889 + n = 989$. Also können nur die Paare

$$(999;\ 110) \text{ und } (989;\ 100) \tag{4}$$

die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

II. Sie erfüllen diese Bedingungen; denn 999, 110 und 989, 100 sind dreistellige natürliche Zahlen; es gilt $999 - 110 = 889$ und $989 - 100 = 889$, und für die Quersummen 27, 2 bzw. 26, 1 gilt $27 - 2 = 25$ und $26 - 1 = 25$.

Mit I. und II. ist gezeigt, daß genau die beiden in (4) genannten Paare die Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 260735:

Es gibt derartige Dreiecke. Eine Konstruktion eines solchen Dreiecks ist z.B. die folgende:

(1) Man konstruiert eine beliebige Strecke $BC$ und ihren Mittelpunkt $D$.

(2) In $B$ trägt man an $BC$ einen beliebigen spitzen Winkel an, dessen Größe von 60° verschieden ist; der zweite Schenkel dieses Winkels sei $u$.

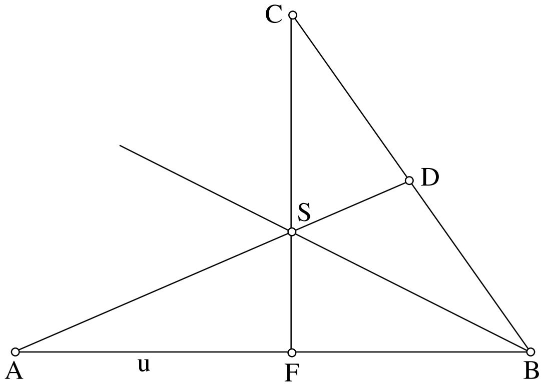
(3) Man fällt das Lot von $C$ auf $u$; der Lotfußpunkt sei $F$.

(4) Man konstruiert die Winkelhalbierende von $\sphericalangle CBF$; sie schneidet $CF$ in einem Punkt $S$.

(5) Man konstruiert die Gerade durch $D$ und $S$; sie schneidet[1]) $u$ in $A$.

[1]) Der genannte Schnittpunkt $A$ existiert (bei jeder Wahlmöglichkeit in (1) und (2)); denn der in (4) konstruierte Punkt $S$ liegt zwischen $u$ und der Parallelen durch $D$ zu $u$, weil die Konstruktion auf $\overline{BD} = \overline{DC}$, aber $\overline{FS} < \overline{SC}$ führt.

Diese Feststellungen (insbesondere ein Beweis für $\overline{FS} < \overline{SC}$) werden nicht vom Schüler verlangt.




*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 260736:

(a) Da $ABCDEFGH$ ein Würfel ist, steht die Kante $AE$ auf der Fläche $EFGH$ senkrecht. Da die Strecke $SE$ in dieser Fläche liegt, steht $AE$ auch auf $SE$ senkrecht.

Folglich ist $ASE$ ein Dreieck, das bei $E$ einen rechten Winkel hat. Nach dem Innenwinkelsatz folgt hieraus, daß der Winkel $\sphericalangle ESA$ kleiner als ein rechter Winkel ist.

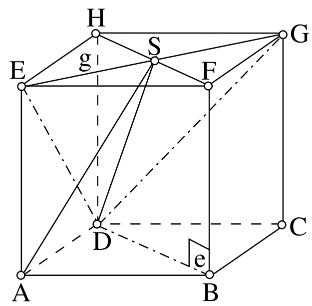
(b) Da $ABCDEFGH$ ein Würfel ist, sind die Flächendiagonalen $ED$, $DG$ und $GE$ einander gleichlang (als Diagonalen der zueinander kongruenten Quadrate $ADHE$, $DCGH$ bzw. $EFGH$).

Da $S$ der Schnittpunkt der Diagonalen des Quadrates $EFGH$ ist, wird die Diagonale $EG$ von $S$ halbiert.

Also ist $DEG$ ein gleichseitiges Dreieck, und darin ist $DS$ eine Seitenhalbierende. Somit ist $DS$ auch Höhe in diesem Dreieck; d.h., $DS$ steht senkrecht auf $EG$. Damit ist bewiesen, daß $\sphericalangle DSE$ ein rechter Winkel ist.

*Andere Lösunqsmöglichkeit:*

Man wendet die folgenden beiden Sätze an, in denen $g$ eine Gerade durch einen Punkt $S$ bedeutet und $e$ eine Ebene durch $S$ bedeutet:




(1) Wenn $g$ auf $e$ senkrecht steht, so steht $g$ auf allen und nur denjenigen Geraden durch $S$ senkrecht, die in $e$ liegen.

(2) Wenn $g$ auf zwei verschiedenen in $e$ liegenden Geraden durch $S$ senkrecht steht, so steht $g$ auf $e$ senkrecht.

Auf der Ebene durch $E$, $F$, $G$, $H$ stehen die Kanten $BF$ und $DH$ und daher auch die zu ihnen parallele Gerade durch $S$ senkrecht. Nach Satz (1) steht diese Gerade also auch auf der Geraden $g$ durch $E$, $G$ senkrecht.

Auch die Gerade durch $F$ und $H$ steht auf $g$ senkrecht (Diagonalen im Quadrat $EFGH$). Nach Satz (2) stehen somit $g$ und die Ebene $e$ durch $B$, $F$, $H$, $D$ aufeinander senkrecht. Daraus folgt nach Satz (1):

(b) Da $DS$ in $e$ liegt, steht $DS$ auf $EG$ senkrecht.

(a) Da $AS$ nicht in $e$ liegt, steht $AS$ nicht auf $EG$ senkrecht.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

## Quellenverzeichnis

**(25)** Offizielle Lösung der Aufgabenkommission