# 26. Mathematik Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 7
# Saison 1986/1987

Aufgaben und Lösungen

# 26. Mathematik-Olympiade
# 1. Stufe (Schulolympiade)
# Klasse 7
# Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260711:

Ermittle für jede der nachfolgenden Teilaufgaben a) bis e) jeweils alle diejenigen natürlichen Zahlen $n$, die die angegebene Forderung erfüllen!

a) Die Summe $\left(\frac{7}{12}+\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.

b) Die Summe $\left(\frac{7}{12}+\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch, der sich nicht mehr durch Kürzen vereinfachen läßt.

c) Die Aufgabe, die Differenz $\left(\frac{7}{12}-\frac{n}{12}\right)$ zu berechnen, ist im Bereich der gebrochenen Zahlen nicht lösbar.

d) Die Differenz $\left(\frac{7}{12}-\frac{n}{12}\right)$ ist ein echter Bruch.

e) Die Summe $\left(\frac{7}{12}+\frac{n}{12}\right)$ ist eine natürliche Zahl.

Aufgabe 260712:

In der Materialausgabe eines Betriebes sind durch ein Mißgeschick die Schlüssel von zwölf Vorhängeschlössern durcheinandergekommen. Da zu jedem Vorhängeschloß von den insgesamt zwölf Schlüsseln nur einer paßt und zu jedem Schlüssel nur eines der Vorhängeschlösser, die sich äußerlich nicht voneinander unterscheiden, muß herausgefunden worden, welcher Schlüssel zu welchem Schloß gehört.

Lehrling Bernd, der mit dieser Aufgabe betreut wurde, dachte: "Jetzt muß ich zwölf Schlüssel an zwölf Schlössern ausprobieren, muß also, wenn ich Pech habe, $12 \cdot 12 = 144$ Proben ausführen." Sein Freund Uwe meinte jedoch, daß man mit viel weniger Proben auskommt.

Ermittle die kleinste Anzahl von Proben, mit der man mit Sicherheit (d.h. auch noch im ungünstigsten Fall) zu jedem Vorhängeschloß den passenden Schlüssel findet!

Aufgabe 260713:

Für die Klassen 2, 3 und 4 einer Schule steht ein Schulgarten mit einem Flächeninhalt von genau 800 Quadratmetern zur Verfügung. Ein Viertel dieser Fläche wird für einen Spielplatz und für das Anlegen von Wegen vorgesehen, die übrige Fläche soll zur Bearbeitung auf die drei Klassen aufgeteilt worden. Da den einzelnen Klassen unterschiedlich viele Schüler angehören, nämlich der 2. Klasse 25 Schüler, der 3. Klasse 20 Schüler und der 4. Klasse 30 Schüler, wird vereinbart, daß jedem Schüler der genannten Klassen eine gleich große Fläche zur Bearbeitung zugewiesen wird.

Wieviel Quadratmeter Gartenland hat demnach jede der drei Klassen zu bearbeiten?

Aufgabe 260714:

Ein *Junger Mathematiker* zeichnet ein Rechteck und halbiert die Seiten. Er vermutet, daß die vier Seitenmittelpunkte Eckpunkte eines Rhombus sind.

Untersuche, ob diese Vermutung für jedes Rechteck wahr ist!

# 26. Mathematik-Olympiade
## 1. Stufe (Schulolympiade)
## Klasse 7
## Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 260711:

a) Für jede natürliche Zahl $n$ gilt $\frac{7}{12} + \frac{n}{12} = \frac{7+n}{12}$; diese Summe ist genau dann ein echter Bruch, wenn $7 + n < 12$ gilt. Das trifft genau für $n = 0; 1; 2; 3; 4$ zu.

b) Aus den unter a) ermittelten $n$ erfüllen genau diejenigen auch die Forderung b), die nach Addition von 7 eine zu 12 teilerfremde Zahl ergeben. Dies trifft genau für $n = 0; 4$ zu.

c) Die Aufgabe, die Differenz $\left(\frac{7}{12} - \frac{n}{12}\right)$ zu berechnen, ist genau dann in Bereich der gebrochenen Zahlen lösbar, wenn $n \leq 7$ gilt. Daher wird die Forderung c) genau von allen natürlichen Zahlen $n > 7$ erfüllt.

d) Für alle natürlichen Zahlen $n \leq 7$ gilt $\frac{7}{12} - \frac{n}{12} = \frac{7-n}{12}$. Diese Differenz ist genau dann ein echter Bruch, wenn $7 - n < 12$ gilt. Dies trifft genau für alle natürlichen Zahlen $n \leq 7$ (d.h. $n = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7$) zu.

e) Die Summe $\frac{7+n}{12}$ ist genau dann eine natürliche Zahl, wenn $(7 + n)$ ein ganzzahliges Vielfaches von 12 ist; d.h. genau dann, wenn $n$ eine der Zahlen $n = 5; 17; 29; ...$ ist. (Diese Zahlen lassen sich in der Form $n = 12k + 5$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ da darstellen.)

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 260712:

Von den insgesamt zwölf Vorhängeschlössern paßt zu jedem Schlüssel genau eines. Nehmen wir einen der zwölf Schlüssel und probieren, zu welchem von den zwölf Vorhängeschlössern er paßt, so kann es im ungünstigsten Fall vorkommen, daß bei elfmaligen Probieren noch nicht das Schloß probiert wurde, zu dem der Schlüssel paßt. Da der Schlüssel aber zu einem der Schlösser gehört, muß er zu den Schloß passen, das beim Probieren noch nicht berücksichtigt wurde, und er kann ohne eine weitere Probe zu diesem Schloß gelegt werden. Bei zwölf Vorhängeschlössern finden wir also mit Sicherheit nach höchstens elfmaligem Probieren den Schlüssel, der zu einem der Schlösser paßt.

Ein weniger als elfmaliges Probieren dieses Schlüssels kann aber in ungünstigen Fällen die Frage nach dem passenden Schloß noch offen lassen. Für die noch verbleibenden elf Vorhängeschlösser und ihre Schlüssel gelten die entsprechenden Überlegungen, so daß wir nach höchstens zehnmaligem weiteren Probieren mit Sicherheit den Schlüssel zu einem dieser elf Vorhängeschlösser angeben können, während weniger als zehn Proben in ungünstigen Fällen nicht ausreichen.

Setzt man diese Überlegungen analog fort, dann folgt, daß nach höchstens $10+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 66$ Versuchen zu jedem der zwölf Vorhängeschlösser der passende Schlüssel gefunden werden kann und daß dies auch die gesuchte kleinste Anzahl von Proben ist.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 260713:

Die Fläche für Wege und Spielplatz beträgt $\frac{1}{4}$ von $800\,\mathrm{m}^2$, das sind $200\,\mathrm{m}^2$.

Zur Bearbeitung verbleiben somit $800\,\mathrm{m}^2 - 200\,\mathrm{m}^2 = 600\,\mathrm{m}^2$.

Die Gesamtschülerzahl der drei Klassen beträgt $25 + 20 + 30 = 75$. Somit hat

Klasse 2 $\frac{25}{75}$ von $600\,\mathrm{m}^2$, das sind $200\,\mathrm{m}^2$,

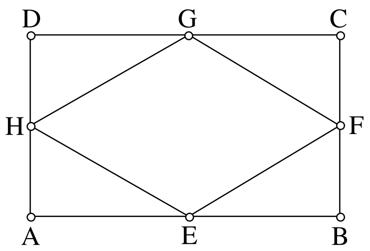
Klasse 3 $\frac{20}{75}$ von $600\,\mathrm{m}^2$, das sind $160\,\mathrm{m}^2$ und

Klasse 4 $\frac{30}{75}$ von $600\,\mathrm{m}^2$, das sind $240\,\mathrm{m}^2$

zu bearbeiten.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

Lösung 260714:




Die Eckpunkte des Rechtecks seien $A$, $B$, $C$, $D$, die Mittelpunkte der Seiten $E$, $F$, $G$, $H$ (siehe Abbildung).

Da gegenüberliegende Seiten des Rechtecks einander gleichlang sind und da alle Seiten des Rechtecks halbiert werden, gilt: $\overline{AE} = \overline{EB} = \overline{DG} = \overline{GC}$ und $\overline{AH} = \overline{HD} = \overline{BF} = \overline{FC}$

Außerdem sind alle Innenwinkel des Rechtecks $ABCD$ gleich groß. Demzufolge sind die Dreiecke $HAE$, $EBT$, $FCG$ und $GDH$ nach (sws) kongruent.

Nach den Eigenschaften kongruenter Dreiecke folgt: $\overline{HE} = \overline{EF} = \overline{FG} = \overline{GH}$, also sind alle Seiten des Vierecks $EFGH$ gleichlang, somit ist es ein Rhombus.

*Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)*

# Quellenverzeichnis

**(25)** Offizielle Lösung der Aufgabenkommission