26. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Saison 1986/1987

Aufgaben und Lösungen

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 260521:

Auf der DDR-Olympiade Junger Mathematiker treffen sich Andreas, Britta, Dirk und Kerstin. Sie kommen jeder aus einer anderen Stadt, und zwar aus Berlin, Dresden, Halle und Schwerin. Wir wissen folgendes über sie:

(1) Andreas und der Teilnehmer aus Berlin sind von den vier Schülern die beiden einzigen, die schon im Vorjahr auf der DDR-Olympiade waren;

(2) die beiden anderen, nämlich Kerstin und der Teilnehmer aus Dresden sind zum ersten Mal bei der DDR-Olympiade anwesend.

(3) Dirk ist älter als der Teilnehmer aus Berlin.

(4) Kerstin ist jünger als der Teilnehmer aus Schwerin.

Welcher Teilnehmer kommt aus welcher Stadt? Wer sind die beiden, die schon in Vorjahr an der DDR-Olympiade teilgenommen haben?

Aufgabe 260522:

Fritz hat drei rot und drei blau angestrichene kreisförmige Spielmarken. Keine zwei von diesen sechs Spielmarken sind in der Größe einander gleich.

a) Fritz legt zuerst nur die drei verschieden großen roten Spielmarken nebeneinander auf den Tisch. Zeichne alle möglichen Anordnungen dieser drei Spielmarken auf! Wie viele Anordnungsmöglichkeiten sind dies insgesamt?

b) Nun möchte Fritz alle sechs Spielmerken so nebeneinander legen, daß sich stets die Farben der Spielmarken abwechseln. Wie viele Anordnungsmöglichkeiten der Spielmarken gibt es hierfür insgesamt? Nenne die Anzahl und erkläre, warum es genau diese Anzahl der Anordnungsmöglichkeiten gibt!

Aufgabe 260523:

Zeichne eine Strecke AB der Länge 15 cm! Auf dem Strahl, der den Ausgangspunkt A hat und durch B geht, sollen nun zwei weitere Punkte C und D so eingezeichnet werden, daß $4 \cdot \overline{AC} = \overline{AD}$ und $\overline{CB} = \overline{BD}$ gilt.

Wie groß sind dafür $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ zu wählen?

Erkläre, wie man zur Berechnung dieser beiden Längen $\overline{AC}$ und $\overline{AD}$ kommen kann, und zeichne dann die Punkte C und D!

Aufgabe 260524:

Du kannst die mit zwei Würfeln von jemandem geworfenen beiden Augenzahlen nennen, ohne sie gesehen zu haben, wenn du folgende Rechenschritte (1) bis (4) ausführen und dir nur das Endergebnis nach Schritt (4) ansagen läßt:

(1) Die mit dem einen Würfel geworfene Augenzahl ist zu verdoppeln.

(2) Hierzu ist 5 zu addieren.

(3) Die erhaltene Summe ist mit 5 zu multiplizieren.

(4) Zum Produkt ist die mit dem anderen Würfel geworfene Augenzahl zu addieren.

Wenn du nämlich vom Ergebnis des Schrittes (4) die Zahl 25 subtrahierst, so erhältst du diejenige Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen Würfels und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels bezeichnet.

a) Überprüfe dies an einem selbstgewählten Beispiel!

b) Weise nach, daß das für jeden mit zwei Würfeln möglichen Wurf gilt!

26. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 5
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 260521:

Aus (2) und (4) folgt, daß Kerstin nicht aus Dresden, aber auch nicht aus Schwerin sein kann. Wegen (1) und (2) ist Kerstin auch nicht aus Berlin, also folgt:

(5) Kerstin kommt aus Halle.

Aus (1) und (2) folgt, daß Andreas nicht aus Berlin, aber auch nicht aus Dresden kommt. Daraus und wegen (5) folgt:

(6) Andreas kommt aus Schwerin.

Aus (3), (5) und (6) ergibt sich:

(7) Dirk kommt aus Dresden.

Weiter folgt:

(8) Britta kommt aus Berlin.

Aus (1) und (8) ergibt sich:

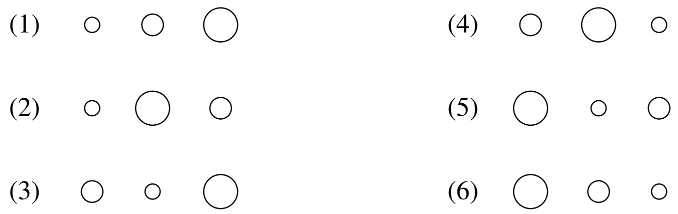
Andreas und Britta nahmen schon im Vorjahr an der DDR-Olympiade teil.

Hinweis zur Korrektur: Auch bei anderen Lösungsmöglichkeiten (z.B. mit Hilfe einer Tabelle) ist nur dann die volle Punktzahl zu erteilen, wenn aus der Lösungsdarstellung ersichtlich ist, wie geschlußfolgert wurde. Andernfalls sind anteilige Punkte in angemessenem Umfang zu vergeben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 260522:

a) Es gibt genau sechs derartige Anordnungen für die drei roten Spielmarken, und zwar:



b) Ebenso wie für die drei roten Spielmarken gibt es genau sechs Anordnungsmöglichkeiten für die drei blauen Spielmarken. Da die Farben sich abwechseln sollen und sich jede Anordnung der roten Spielmarken mit jeder Anordnung der blauen Spielmarken zu einer neuen Reihe vereinigen läßt, gibt es wegen $6 \cdot 6 = 36$ insgesamt 36 Anordnungen, die mit einer roten Spielmarke beginnen, und ebensoviele Anordnungen, die mit einer blauen Spielmarke beginnen. Folglich gibt es insgesamt 72 unterschiedliche Anordnungen der geforderten Art für die drei roten und die drei blauen Spielmarken.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 260523:

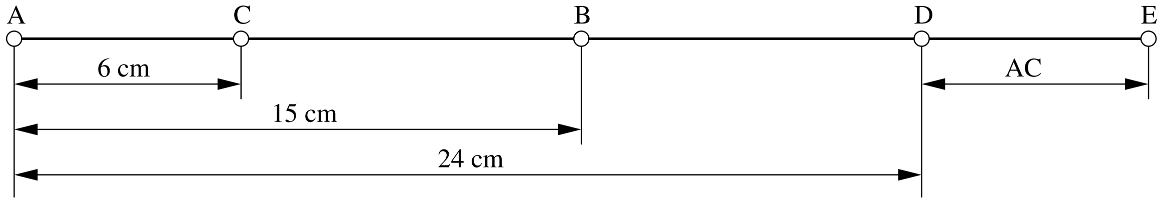
Aus der Forderung $4 \cdot \overline{AC} = \overline{AD}$ folgt, daß C auf dem genannten Strahl näher bei A liegen muß als D. Wegen der Forderung $\overline{CB} = \overline{BD}$ muß B der Mittelpunkt der Strecke CD sein.

Verlängert man AD über D hinaus nochmals um die Länge $\overline{AC}$ bis zu einem Punkt E, so ist folglich B auch der Mittelpunkt der Strecke AE. Wegen $\overline{AB} = 15$ cm ergibt sich somit $\overline{AE} = 30$ cm. Andererseits folgt

$$\begin{aligned} \overline{AE} &= \overline{AD} + \overline{DE} \\ &= 4 \cdot \overline{AC} + \overline{AC} \\ &= 5 \cdot \overline{AC}. \end{aligned}$$

Wegen $30 : 5 = 6$ und $4 \cdot 6 = 24$ muß daher $\overline{AC} = 6$ cm und $\overline{AD} = 24$ cm gewählt werden.

Die Abbildung zeigt die verlangte Zeichnung (aus technischen Gründen in verkleinertem Maßstab; das Einzeichnen von E und von Maßpfeilen wird nicht vom Schüler verlangt).



Anderer Lösungsweg:

Wie oben erhält man, daß C näher bei A liegt als D und daß B der Mittelpunkt der Strecke CD ist. Daher ist $\overline{AC}$ eine Länge, die kleiner als $\overline{AB}$ ist. Durch probeweises Berechnen von $\overline{AD}$ zu verschiedenen Möglichkeiten für $\overline{AC}$ (Erfüllung der Forderung $\overline{CB} = \overline{BD}$) erhält man, daß auch die Forderung $4 \cdot \overline{AC} = \overline{AD}$ erfüllt wird, wenn man $\overline{AC} = 6$ cm wählt (siehe die folgende Tabelle). Zeichnung wie in obiger Abbildung (ohne E).

$\overline{AC}$	Abstand von C bis B, also auch Verlängerung von AB bis D	$\overline{AD}$
... 4 cm 5 cm	... 11 cm 10 cm	... 26 cm 25 cm
6 cm	9 cm	24 cm
7 cm ...	8 cm ...	23 cm ...

Hinweis zur Korrektur: Der 1. Lösungsweg verzichtet auf die Probe (den Schluß, daß mit $\overline{AC} = 6$ cm, $\overline{AD} = 24$ cm die Forderungen der Aufgabe erfüllt werden), der 2. Lösungsweg auf den Nachweis, daß es nur diese Lösung gibt. Beides ist als Lösung ausreichend.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 260524:

a) Wählt man zum Beispiel die Augenzahlen 3 und 5, dann führt die Ausführung der Schritte (1) bis (4) zu folgenden Ergebnissen:

(1) $2 \cdot 3 = 6$,

(2) $6 + 5 = 11$,

(3) $11 \cdot 5 = 55$,

(4) $55 + 5 = 60$.

Wenn man von 60 die Zahl 25 subtrahiert, erhält man wie behauptet mit 35 eine Zahl, deren eine Ziffer die Augenzahl des einen und deren andere Ziffer die Augenzahl des anderen Würfels angibt.

b) Für jeden möglichen Wurf sind die mit zwei Würfeln geworfenen Augenzahlen zwei natürliche Zahlen a und b, für die $1 \leq a \leq 6$ und $1 \leq b \leq 6$ gilt. Damit führt die Ausführung der Schritte (1) bis (4) zu folgenden Ergebnissen:

(1) $2 \cdot a$,

(2) $2 \cdot a + 5$,

(3) $5 \cdot (2 \cdot a + 5) = 10 \cdot a + 25$,

(4) $10 \cdot a + 25 + b$.

Wenn man von $10 \cdot a + 25 + b$ die Zahl 25 subtrahiert, so erhält man wie behauptet mit $10 \cdot a + b$ diejenige Zahl, deren eine Ziffer a die Augenzahl des einen und deren andere Ziffer b die Augenzahl des anderen Würfels angibt.

Hinweis: Als möglicher (wenn auch umständlicher) Lösungsweg ist auch das Ausführen der Rechenschritte (1) bis (4) für alle 36 möglichen Würfe zu akzeptieren.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission