25. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Saison 1985/1986

Aufgaben und Lösungen

25. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250711:

In einer Tüte befindet sich 1 kg Zucker. Mit Hilfe einer Balkenwaage mit zwei Waagschalen (jede ausreichend groß für 1 kg losen Zucker) und genau einem 50 g-Wägestück sollen 300 g Zucker abgewogen werden.

Zeige, daß das mit nur drei Wägungen möglich ist!

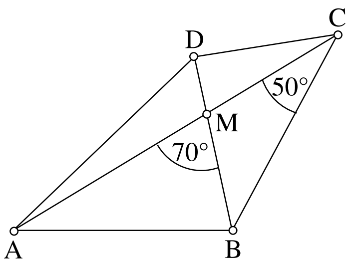
Aufgabe 250712:

Ermittle alle zweistelligen natürlichen Zahlen, die folgenden Bedingungen genügen:

(1) Die Differenz der beiden Ziffern beträgt 5.

(2) Vertauscht man Zehnerziffer und Einerziffer miteinander, so entsteht eine zweistellige Zahl, deren Doppeltes um 4 größer ist als die ursprüngliche Zahl.

Aufgabe 250713:



Die Schüler Gerd und Uwe diskutieren über folgende Forderungen, die an ein konvexes Viereck $ABCD$ gestellt werden (siehe Abbildung).

Es soll $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AD}$ gelten, und wenn M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen AC und BD ist, so soll der Winkel $\sphericalangle BMA$ die Größe 70° und der Winkel $\sphericalangle BCM$ die Größe 50° haben.

Gerd behauptet, daß durch diese Forderungen die Größe des Winkels $\sphericalangle DAM$ eindeutig bestimmt ist. Uwe vertritt die Meinung, daß es konvexe Vierecke gibt, die diese Forderungen erfüllen, aber unterschiedliche Größen des Winkels $\sphericalangle DAM$ aufweisen.

Wer hat recht?

Aufgabe 250714:

Von einem Rechteck ist bekannt:

(1) Die beiden längeren Seiten des Rechtecks sind jeweils 5 cm länger als die kürzeren.

(2) Wenn man jede Seite des Rechtecke um 10 cm verlängert, wird der Flächeninhalt des Rechtecks um 430 cm^2 größer.

Ermittle die Seitenlängen des ursprünglichen Rechtecks!

25. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 250711:

Man halbiert zunächst ohne Wägestück das Kilogramm Zucker und erhält zweimal 500 g. Auf die gleiche Art halbiert man die 500 g Zucker und erhält zweimal 250 g. Mit Hilfe des 50 g-Wägestückes ermittelt man 50 g Zucker und gibt sie zu den 250 g dazu. Somit hat man 300 g Zucker.

Anderer Lösungsweg:

Mit dem 50 g-Wägestück ermittelt man 50 g Zucker. Mit diesen 50 g und dem 50 g-Wägestück ermittelt man (aus dem restlichen Zucker) in einer zweiten Wägung 100 g Zucker, der mit den 50 g Zucker zusammen 150 g Zucker ergibt.

Mit diesen 150 g Zucker ermittelt man nochmals 150 g Zucker, so daß die Inhalte der zwei Waagschalen zusammen 300 g Zucker ergeben.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 250712:

Die Bedingung (1) wird genau von den in der 1. Spalte der folgenden Tabelle genannten zweistelligen Zahlen erfüllt, wobei jedoch die Zahl 50 sogleich weggelassen wurde, da aus ihr durch Vertauschen der Ziffern keine zweistellige Zahl entsteht.

In der 2. Spalte steht jeweils die durch Vertauschen der Ziffern entstehende Zahl, in der 3. Spalte das Doppelte der Zahl in der 2. Spalte. In der 4. Spalte steht die um 4 vergrößerte ursprüngliche (d.h. in der 1. Spalte stehende) Zahl.

16	61	122	20
27	72	144	31
38	83	166	42
49	94	188	53
61	16	32	65
72	27	54	76
83	38	76	87
94	49	98	98

Genau für die Zahl 94 der 1. Spalte ergibt sich Gleichheit in der 3. und 4. Spalte. Daher erfüllt genau die Zahl 94 beide Bedingungen (1), (2).

Anderer Lösungsweg:

Wenn a und b die Zehner- bzw. Einerziffer einer Zahl sind, die den Bedingungen der Aufgabe genügt, so folgt:

Die Zahl lautet $10a+b$, die durch Vertauschen der Ziffern entstehende Zahl lautet $10b+a$, und nach (2) gilt:

$$\begin{aligned} 2\cdot(10b+a) &= 10a+b+4,\\ 20b+2a &= 10a+b+4,\\ 19b &= 8a+4,\\ 19b &= 4\cdot(2a+1). \end{aligned}$$

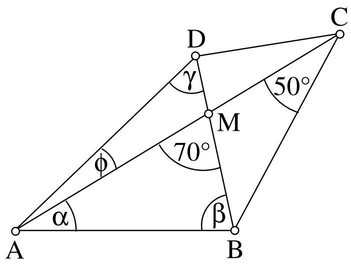
Da 19b das Produkt aus 4 und der ungeraden Zahl $2a+1$ ist und da 19 und 4 teilerfremd sind, ist folglich b durch 4, aber nicht durch 8 teilbar. Die einzige Zahl mit diesen Eigenschaften ist $b=4$, und es folgt weiter

$$\begin{aligned} 2a+1 &= 19,\\ a &= 9. \end{aligned}$$

Daher kann nur die Zahl 94 die Bedingungen der Aufgabe erfüllen. Sie erfüllt diese Bedingungen; denn es gilt $9-4=5$ und $2\cdot 49=98=94+4$. Also genügt die Zahl 94 den Bedingungen der Aufgabe.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 250713:



In jedem konvexen Viereck $ABCD$, das die Forderungen erfüllt, gelten für die Winkelgrößen

$$\begin{aligned} \overline{\sphericalangle BAC} &= \overline{\sphericalangle BAM} = \alpha,\\ \overline{\sphericalangle ABD} &= \overline{\sphericalangle ABM} = \beta,\\ \overline{\sphericalangle ADB} &= \overline{\sphericalangle ADM} = \gamma,\\ \overline{\sphericalangle DAM} &= \overline{\sphericalangle DAC} = \varphi \end{aligned}$$

folgende Aussagen:

Da $\sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle BCA$ ($=\sphericalangle BCM$) Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABC sind, ist $\alpha=50°$.

Nach dem Innenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck ABM, folgt daher $\beta=180°-70°-\alpha=60°$.

Da $\sphericalangle ADB$ und $\sphericalangle ABD$ Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck ABD sind, ist $\gamma=\beta=60°$.

Nach dem Außenwinkelsatz, angewandt auf das Dreieck ADM, folgt $\gamma+\varphi=70°$, also $\varphi=70°-\gamma=10°$.

Diese Winkelgröße ist somit durch die Forderungen eindeutig bestimmt; Gerd hat recht, Uwe nicht.

Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Lösung 250714:

$ABCD$ sei ein Rechteck, das (1) erfüllt, und es gelte

$$\begin{aligned} \overline{AD} &= \overline{BC} = x\text{ cm sowie}\\ \overline{AB} &= \overline{DC} = (x+5)\text{ cm}. \end{aligned}$$

$EFGD$ sei ein Rechteck, dessen Seiten jeweils 10 cm länger als die des Rechtecks $ABCD$ sind (siehe Abbildung). Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{ED} &= \overline{FG} = (x+10)\text{ cm und}\\ \overline{EF} &= \overline{DG} = \overline{AH} = (x+15)\text{ cm}. \end{aligned}$$

Der Flächeninhaltszuwachs läßt sich als Summe der Flächeninhalte der Rechtecke $AEFH$ und $BHGC$ darstellen, und es gilt wegen (2):

$$10 \cdot (x + 15) + 10 \cdot x = 430.$$

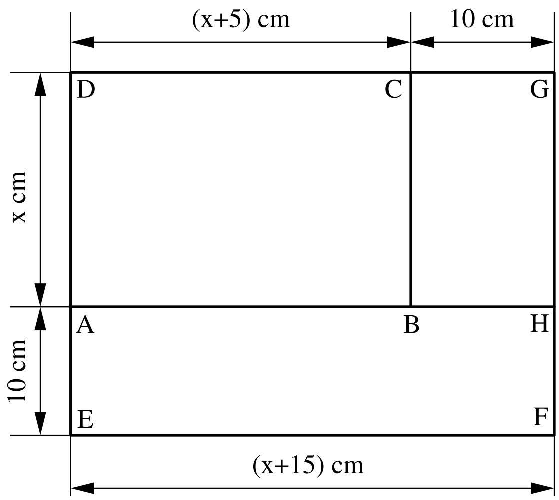
Formt man die linke Seite der Gleichung mit Hilfe des Distributivgesetzes um, so folgt

$$10x + 150 + 10x = 430.$$

Wegen $10x + 10x = 20x$ folgt weiter

$$20x = 280,$$
$$x = 14.$$

Die gesuchten Seitenlängen betragen daher 14 cm und 19 cm.



Aufgeschrieben von Christiane Reiß – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission