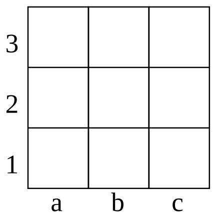
25. Mathematik Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Saison 1985/1986

Aufgaben und Lösungen

25. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250621:



Auf einem (3×3)-Spielbrett (siehe Abbildung) sind sechs Spielsteine so aufzustellen, daß jede waagerechte und jede senkrechte Reihe genau zwei Steine enthält. Auf jedem Feld des Spielbrettes darf höchstens ein Spielstein stehen.

Zeichne alle möglichen Stellungen für diese sechs Spielsteine! Eine Begründung wird nicht verlangt.

Aufgabe 250622:

Gesucht sind vier Zahlen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Die Summe der vier Zahlen beträgt 60.

(2) Es ergibt sich viermal dasselbe Ergebnis, wenn man

  (2.1.) zur ersten Zahl 4 addiert,
  (2.2.) zur zweiten Zahl 3 addiert,
  (2.3.) von der dritten Zahl 2 subtrahiert,
  (2.4.) von der vierten Zahl 1 subtrahiert.

Ermittle aus diesen Forderungen vier solche Zahlen! Überprüfe, ob die von dir gefundenen Zahlen die geforderten Eigenschaften haben!

Aufgabe 250623:

Es sei $ABCD$ ein Quadrat mit der Seitenlänge 14 cm. Die Punkte E, F, G und H seien die Mittelpunkte der Quadratseiten. Dabei liege E auf AB, F auf BC, G auf CD, H auf DA.

a) Konstruiere dieses Quadrat und verbinde die Mittelpunkte E und F, F und G, G und H sowie H und E durch Strecken!

b) Ermittle den Flächeninhalt der Fläche $EFGH$!

Aufgabe 250624:

Anke, Bernd und Claudia wollen 21 Limonadeflaschen, von denen 7 voll, 7 halbvoll und 7 leer sind, untereinander verteilen. Dabei soll jedes Kind die gleiche Anzahl Flaschen und auch gleich viel Limonade erhalten, und es soll nichts umgegossen werden. Ferner soll Anke nicht weniger volle Flaschen als Bernd bekommen, und Bernd soll nicht weniger volle Flaschen als Claudia bekommen.

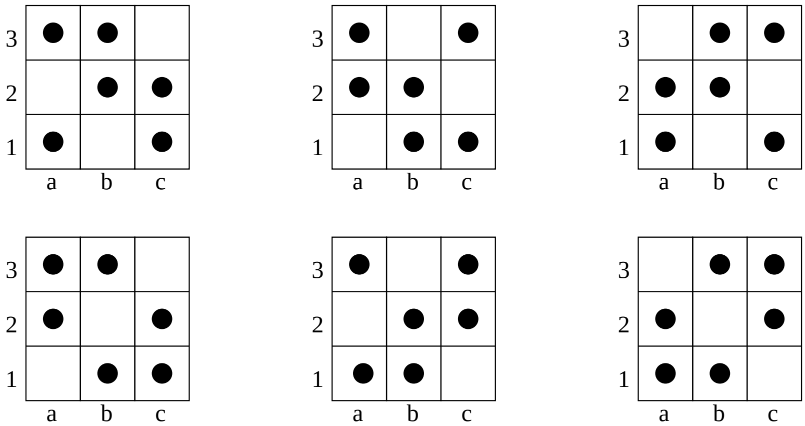
a) Gib zwei Verteilungen an, die diese Bedingungen erfüllen!

b) Weise nach, daß es keine weiteren Verteilungen geben kann, die diese Bedingungen erfüllen!

25. Mathematik-Olympiade
2. Stufe (Kreisolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 250621:



Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 250622:

I. Wenn vier Zahlen die geforderten Eigenschaften haben und dabei e das in (2) genannte Ergebnis ist, so ist

$e - 4$ die erste Zahl,
$e - 3$ die zweite Zahl,
$e + 2$ die dritte Zahl,
$e + 1$ die vierte Zahl.

Nach (1) gilt daher

$$\begin{aligned} e - 4 + e - 3 + e + 2 + e + 1 &= 60, \\ 4e - 4 &= 60, \\ 4e &= 64, \\ e &= 16; \end{aligned}$$

also lauten die vier gesuchten Zahlen: 12, 13, 18, 17.

II. Für die Zahlen gilt $12 + 13 + 18 + 17 = 60$, also ist (1) erfüllt, und es gilt

$$12 + 4 = 16, \qquad 13 + 3 = 16, \qquad 18 - 2 = 16, \qquad 17 - 1 = 16,$$

also ist (2) erfüllt.

Anderer Lösungsweg:

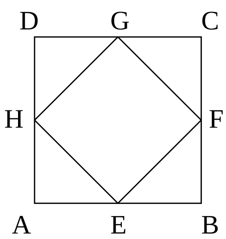
I. Addiert man anstelle von vier Zahlen, die die geforderten Eigenschaften haben, die vier in (2) a) bis d) genannten Ergebnisse, so erhält man wegen $4 + 3 - 2 - 1 = 4$ eine um 4 größere Summe als 60, d. h. die Summe 64. Weil nach (2) diese vier Ergebnisse einander gleich sind, betragen sie $64 : 4 = 16$. Daher sind die gesuchten Zahlen 12, 13, 18 und 17.

II. Wie oben.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 250623:

a)



b) Die Strecken EG und FH zerlegen das Quadrat $ABCD$ in vier inhaltsgleiche Quadrate. Jedes dieser Quadrate wird durch die eingezeichnete Diagonale in zwei (gleichschenklig-rechtwinklige) inhaltsgleiche Dreiecke zerlegt.

Das Quadrat $ABCD$ ist aus acht solchen Dreiecken zusammengesetzt, die Fläche $EFGH$ aus vier solchen Dreiecken; ihr Flächeninhalt ist daher halb so groß wie der von $ABCD$.

Wegen $14 \cdot 14 = 196$ hat $ABCD$ den Flächeninhalt $196\,\text{cm}^2$.

Wegen $196 : 2 = 98$ hat somit $EFGH$ den Flächeninhalt $98\,\text{cm}^2$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 250624:

a) Die in den folgenden Tabellen genannten Verteilungen erfüllen alle gestellten Bedingungen; denn bei diesen Verteilungen bekommt jedes der drei Kinder genau 7 Flaschen und soviel Limonade, wie in $3\frac{1}{2}$ Flaschen paßt. Außerdem ist ersichtlich, daß jeweils 7 volle, 7 halbvolle und 7 leere Flaschen verteilt werden und daß für die Anzahlen der an Anke, Bernd und Claudia verteilten vollen Flaschen $3 \geq 3 \geq 1$ bzw. $3 \geq 2 \geq 2$ gilt.

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	3	1	3
C	1	5	1

	voll	halbvoll	leer
A	3	1	3
B	2	3	2
C	2	3	2

b) Für jede Verteilung, die die geforderten Bedingungen erfüllt, gilt: Da 21 Flaschen und der Inhalt von $7 + \frac{7}{2} = \frac{21}{2}$ Flaschen Limonade zu verteilen sind, bekommt jedes Kind 7 Flaschen und den Inhalt von $\frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$ Flaschen Limonade.

Daher folgt weiter: Anke könnte höchstens 3 volle Flaschen erhalten, da sie sonst mehr Limonade bekommen würde, als in $3\frac{1}{2}$ Flaschen paßt. Anke kann aber auch nicht weniger als 3 volle Flaschen erhalten, weil dann eines der beiden anderen Kinder von den verbleibenden mindestens 5 vollen Flaschen mehr Flaschen bekommen müßte als Anke.

Also muß Anke genau 3 volle Flaschen erhalten. Als einzige Möglichkeiten, die restlichen 4 vollen Flaschen so zu verteilen, daß von ihnen Anke nicht weniger als Bernd und Bernd nicht weniger als Claudia bekommt, ergeben sich die Verteilungen gemäß $4 = 3 + 1$ und $4 = 2 + 2$ (Spalte "voll" der obigen Tabellen).

Aus den Anzahlen der vollen und halbvollen Flaschen, die jedes Kind erhält, ergibt sich schließlich eindeutig, wieviel leere Flaschen es bekommen muß, um insgesamt 7 Flaschen zu erhalten (Spalte "leer").

Damit ist gezeigt, daß nur die beiden in a) angegebenen Verteilungen alle Bedingungen der Aufgabe erfüllen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission