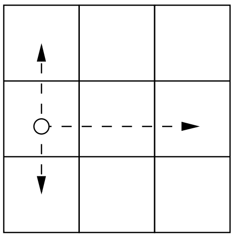
25. Mathematik Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Saison 1985/1986

Aufgaben und Lösungen

25. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 250611:



Auf einem (3×3)-Felderbrett sollen drei Spielsteine so aufgestellt werden, daß sie sich gegenseitig nicht bedrohen. Dabei soll ein Spielstein genau diejenigen Felder bedrohen, die in der gleichen waagerechten oder in der gleichen senkrechten Reihe wie er liegen.

a) Zeichne alle möglichen Stellungen der geforderten Art für drei solche Spielsteine!

b) Wie viele verschiedenartige Stellungen gibt es, wenn je zwei Stellungen genau dann als verschiedenartig gelten, wenn die eine nicht aus der anderen durch Drehung um das Mittelfeld hervorgehen kann?

Aufgabe 250612:

$$
\begin{array}{cccccc}
 & m & a & t & h & e \\
+ & & o & l & y & m \\
+ & & & & p & i \\
+ & & & a & d & e \\
\hline
k & l & a & s & s & e
\end{array}
$$

In dem abgebildeten Kryptogramm sind für die Buchstaben Ziffern (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) so einzutragen, daß für gleiche Buchstaben gleiche Ziffern stehen und die Aufgabe richtig gerechnet ist.

Ferner wird folgendes gefordert:

(1) Es gilt $o = m$ und $p = t$ und $y = a$, während sonst für verschiedene Buchstaben stets verschiedene Ziffern einzusetzen sind.

(2) a ist zwei Drittel von m.

(3) e ist zwei Drittel von a.

(4) Die Summe von a und s ist gleich m.

(5) d ist kleiner als h.

a) Zeige, daß es genau eine Eintragung gibt, die alle diese Forderungen erfüllt, und gib diese Eintragung an!

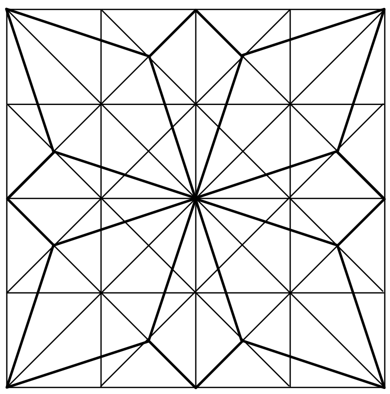
b) Wieviel solche Eintragungen gibt es, wenn man auf Forderung (5) verzichtet?

Aufgabe 250613:

Dirk und Jörg trafen sich in der Erfassungsstelle für Sekundärrohstoffe. Jörg hat sein Altpapier in mehrere Päckchen zu je 5 kg gebündelt und außerdem noch 3 kg loses Papier. Dirk liefert 32 kg Papier ab. Als beide ihr Sammelergebnis vergleichen, stellen sie auch fest, daß sie zusammen mehr als 50 kg Altpapier gesammelt hatten.

Wie viele Bündel zu je 5 kg kann Jörg abgeliefert haben, wenn wir außerdem noch wissen, daß Dirk mehr Altpapier als Jörg hatte? Gib alle Möglichkeiten an!

Aufgabe 250614:



In dem Bild ist - auf einem (mit dünnen Linien gezeichneten) Hintergrund von Quadraten und ihren Diagonalen - mit dicken Linien ein Ornament gezeichnet. Überprüfe mit durchsichtigem Papier (oder Folie), ob das Ornament axialsymmetrisch ist! Überprüfe ferner, ob es Drehungen gibt, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!

Ist beides der Fall, so nenne

a) die Anzahl aller Symmetrieachsen des Ornaments,

b) alle diejenigen Drehungen, bei denen das Ornament sich selbst als Bild hat!

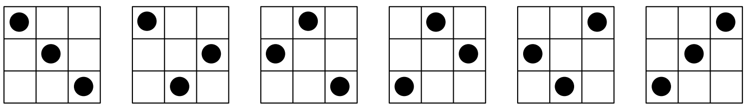
Zu Aufgabe a) zeichne auch das Ornament und alle seine Symmetrieachsen!

25. Mathematik-Olympiade
1. Stufe (Schulolympiade)
Klasse 6
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 250611:

a) Es gibt genau folgende sechs Stellungen der geforderten Art:



(a) (b) (c) (d) (e) (f)

b) Da in Stellung (a) das Mittelfeld besetzt ist, in Stellung (b) dagegen nicht, kann es keine Drehung um das Mittelfeld geben, bei der eine dieser beiden Stellungen aus der anderen hervorgeht.

Die Stellung (c), (d) bzw. (e) geht aus der Stellung (b) durch Drehung um 180°, 90° bzw. 270° um das Mittelfeld hervor.

Die Stellung (f) geht aus der Stellung (a) durch Drehung um 180° um das Mittelfeld hervor.

Folglich gibt es genau zwei verschiedenartige Stellungen (nämlich die Stellungen (a) und (b)).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 250612:

a) Wenn eine Eintragung alle Forderungen der Aufgabe erfüllt, so folgt:

Wegen (2) und (3) ist sowohl m als auch a durch 3 teilbar, wobei a zwei Drittel von m beträgt. Folglich ist m sogar durch 9 teilbar. Da m als Anfangsziffer nicht 0 ist, gilt somit $m = 9$. Wegen (2) und (3) folgt hieraus $a = 6$ und $e = 4$. Wegen (4) gilt dann $6 + s = 9$, also $s = 3$. Offensichtlich gilt $k = 1$ und $l = 0$ (da die Summe kleiner als $96\,994 + 9\,969 + 99 + 694 = 107\,756$ ist). Unter Beachtung von (1) erhält man daher:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 9 & 6 & \mathrm{t} & \mathrm{h} & 4 \\
+ & & & 9 & 0 & 6 & 9 \\
+ & & & & & \mathrm{t} & \mathrm{i} \\
+ & & & & 6 & \mathrm{d} & 4 \\
\hline
 & 1 & 0 & 6 & 3 & 3 & 4
\end{array}$$

Nur für $i = 7$ endet die Summe der Einerziffern auf 4, wobei ein Übertrag von 2 entsteht.

Für h, t und d bleiben noch die Ziffern 2, 5 und 8, deren Summe 15 beträgt, so daß die Summe aus den

Zehnerziffern und dem Übertrag 2 insgesamt 23 ergibt. Unter Beachtung des sich aus 23 ergebenden neuen Übertrags folgt aus der Summe der Hunderterziffern, daß $t = 5$ gilt. Damit ist entweder $d = 2$ und $h = 8$ oder $d = 8$ und $h = 2$. (*)

Wegen (5) entfällt der letztgenannte Fall. Folglich kann nur die Eintragung

$$\begin{array}{r} 96524 \\ +\quad 9069 \\ +\quad 57 \\ +\quad 684 \\ \hline 106334 \end{array}$$

alle Forderungen der Aufgaben erfüllen. Da man für diese Eintragung in der Tat alle Forderungen bestätigt, ist damit bewiesen, daß es genau diese eine Eintragung der geforderten Art gibt.

b) Verzichtet man auf die Forderung (5), dann können beide in (*) genannten Fälle eintreten, und es gibt genau zwei Lösungen des Kryptogramms.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 250613:

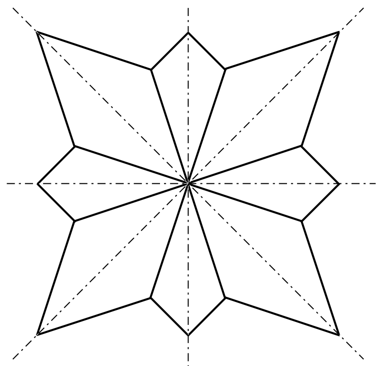
Jörg hat weniger als (die von Dirk gebrachten) 32 kg abgeliefert. Wegen $50 - 32 = 18$ hat er aber mehr als 18 kg abgeliefert. Hätte er drei oder weniger Bündel zu 5 kg gebracht, so hätte er wegen $3 \cdot 5 + 3 = 18$ nur 18 kg oder weniger geliefert. Hätte er sechs oder mehr Bündel zu 5 kg gebracht, so hätte er wegen $6 \cdot 5 + 3 = 33$ mehr als 32 kg geliefert. Also kann er nur vier oder fünf Bündel zu 5 kg gebracht haben.

Diese beiden Fälle sind in der Tat möglich, da sie auf $4 \cdot 5 + 3 = 23$ bzw. $5 \cdot 5 + 3 = 28$ führen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Lösung 250614:

Die Überprüfung ergibt, daß das Ornament sowohl axialsymmetrisch als auch drehsymmetrisch ist.



a) Das Ornament hat genau vier Symmetrieachsen (siehe Abbildung).

b) Das Ornament hat genau bei den Drehungen um seinen Mittelpunkt um 90°, 180° und 270° sich selber als Bild, außerdem natürlich bei der Drehung um 0° (d. h. bei derjenigen Drehung, bei der jeder Punkt der Ebene sich selbst als Bild hat).

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (31)

Quellenverzeichnis

(31) Broschüre vom Volk und Wissen Verlag (VWV)