24. Mathematik Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Saison 1984/1985

Aufgaben und Lösungen

24. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Aufgaben

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Aufgabe 240731:

Bei der Friedensfahrt ergab sich auf einer Etappe folgende Rennsituation:

Genau 14 Fahrer, darunter jedoch kein DDR-Fahrer, waren hinter das Hauptfeld zurückgefallen. Genau 90% der nicht zurückgefallenen Fahrer bildeten das Hauptfeld; darin fuhren einige, aber nicht alle DDR-Fahrer. Die Fahrer vor dem Hauptfeld bildeten eine Spitzengruppe; sie umfaßte genau ein Zwölftel aller Fahrer der Etappe. In der Spitzengruppe war die tschechoslowakische Mannschaft als einzige am schwächsten vertreten, die sowjetische Mannschaft als einzige am stärksten.

Untersuche, ob sich aus diesen Angaben eindeutig ermitteln läßt, welche Mannschaften insgesamt in der Spitzengruppe fuhren und mit wieviel Fahrern sie dort vertreten waren! Wenn dies zutrifft, gib diese Anzahlen an!

Aufgabe 240732:

a) Es sei M die Menge aller derjenigen Zahlen x, die die folgenden Eigenschaften (1), (2), (3) haben:

(1) x ist eine sechsstellige natürliche Zahl.

(2) x hat die Quersumme 29.

(3) x ist durch 11 teilbar.

Ermittle das größte Element der Menge M!

b) Es sei M' die Menge aller derjenigen Zahlen x, die außer den Eigenschaften (1), (2), (3) auch noch die folgende Eigenschaft (4) haben:

(4) Keine zwei Ziffern von x sind einander gleich.

Ermittle das größte Element der Menge M'!

Aufgabe 240733:

Konstruiere zwei zueinander nicht kongruente Dreiecke ABC, die folgende Bedingungen erfüllen:

Die Seite AB hat die Länge $c = 5\,\text{cm}$, die auf der Geraden durch A und C senkrechte Höhe des Dreiecks ABC hat die Länge $h_b = 4,5\,\text{cm}$, der Winkel $\sphericalangle ABC$ hat die Größe $\beta = 35°$.

Gefordert wird eine Zeichnung (Konstruktion der beiden Dreiecke) und eine Konstruktionsbeschreibung hierzu. (Eine Begründung wird nicht verlangt.)

Aufgabe 240734:

Beweise folgenden Satz!

Wenn in einem Dreieck a und b die Längen zweier Seiten sowie h_a und h_b die Längen der zugehörigen Höhen sind, dann gilt $a : b = h_b : h_a$.

Aufgabe 240735:

In dem Schema 4 3 □ 1 □ 5 □ ist jede der Leerstellen □ so mit einer Ziffer auszufüllen, daß die entstehende siebenstellige Zahl durch 75 teilbar ist.

Gib an, wieviel siebenstellige Zahlen es insgesamt gibt, die auf diese Weise entstehen können!

Aufgabe 240736:

Ein Viereck $ABCD$ habe folgende Eigenschaften:

(1) $AB \parallel DC$ und $AD \nparallel BC$,

(2) $\overline{AD} = \overline{BC} = 3 \cdot \overline{DC} = a$, wobei a eine gegebene Länge ist,

(3) $\sphericalangle BAD = 60°$.

Ermittle den Umfang u dieses Vierecks in Abhängigkeit von a!

24. Mathematik-Olympiade
3. Stufe (Bezirksolympiade)
Klasse 7
Lösungen

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatikalisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen. Nur wenn eine so zu verwendende Aussage aus dem Schulunterricht oder aus Arbeitsgemeinschaften bekannt ist, genügt es ohne Beweisangabe, sie als bekannten Sachverhalt anzuführen.*

Lösung 240731:

Wenn genau x Fahrer an der Etappe teilnahmen, so waren genau $x-14$ Fahrer nicht zurückgefallen, und genau 10% hiervon, also $\frac{1}{10}(x-14)$ Fahrer, bildeten die Spitzengruppe. Da dies auch $\frac{x}{12}$ Fahrer waren, folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{10}(x-14) &= \frac{x}{12},\\ 6(x-14) &= 5x,\\ x &= 84.\end{aligned}$$

Somit bestand wegen $84 : 12 = 7$ die Spitzengruppe aus genau 7 Fahrern. Darunter waren auch DDR-Fahrer, und zwar mindestens 2, da sich auch CSSR-Fahrer in der Spitzengruppe befanden, aber mindestens einer weniger als DDR-Fahrer. Wären es mindestens 3 DDR-Fahrer gewesen, so mindestens 4 sowjetische Fahrer, im Widerspruch dazu, daß unter den 7 Fahrern der Spitzengruppe nicht nur die DDR- und die UdSSR-Mannschaft vertreten waren. Also läßt sich eindeutig ermitteln: In der Spitzengruppe waren

genau 2 DDR-Fahrer, (1)

ferner genau 1 CSSR-Fahrer. (2)

Ferner folgt, daß die sowjetische Mannschaft mit 3 oder 4 Fahrern vertreten war. Wären es genau 3 gewesen, so folgte der Widerspruch, daß eine weitere Mannschaft genau einen Fahrer in der Spitzengruppe gehabt hätte, also die CSSR-Mannschaft nicht als einzige am schwächsten dort vertreten gewesen wäre. Damit ergibt sich eindeutig: In der Spitzengruppe waren genau die Mannschaften der UdSSR, DDR und CSSR vertreten, darunter (außer den in (1),(2) genannten Fahrern)

genau 4 sowjetische Fahrer.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 240732:

a) Unter allen Zahlen, die (1) und (2) erfüllen, findet man die größte, indem man mit so vielen Ziffern 9 beginnt, wie dies möglich ist, ohne die Summe 29 zu überschreiten (d.s. genau 3 Ziffern 9), sodann eine möglichst große Ziffer anschließt, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 2), wonach nur noch die Möglichkeit verbleibt, zwei Ziffern 0 anzuschließen. Die größte Zahl x, die (1) und (2) erfüllt, ist also 999 200.

   Die nächstkleinere Zahl, die (1) und (2) erfüllt, ergibt sich, indem man die Ziffer 2 durch 1 ersetzt, dann wieder eine möglichst große Ziffer anschließt, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 1), wonach nur noch eine Ziffer 0 verbleibt. So ergibt sich als zweitgrößte Zahl, die (1) und (2) erfüllt, 999 110.

Entsprechend ergibt sich die nächstkleinere Zahl mit (1) und (2), indem man die zweite Ziffer 1 durch 0 ersetzt, wonach 999 101 verbleibt. Die nächstkleinere Zahl mit (1) und (2) ist entsprechend 999 020.

Die Forderung (3) wird von 999 200, 999 110 und 999 102 nicht erfüllt, wohl aber von 999 020. Damit ist bewiesen: Das größte Element der Menge M ist 999 020.

b) Unter allen Zahlen, die (1),(2) und (4) erfüllen, findet man die größte, indem man mit 9 beginnt, die größte von 9 verschiedene Ziffer (d.i. die Ziffer 8) anschließt, sodann die größte von 9 und 8 verschiedene Ziffer (d.i. 7) und dann die größte von 9, 8 und 7 verschiedene Ziffer, ohne 29 zu überschreiten (d.i. die Ziffer 5), wonach 987 500 verbleibt. Die nächstkleineren Zahlen mit (1),(2) und (4) ergeben sich, indem man die Ziffer 5 durch 4 ersetzt, wonach (der Größe nach geordnet) 987 410 und 987 401 verbleiben.

Sodann hat man 4 durch 3 zu ersetzen. Um hiernach für die letzten beiden Ziffern die Summe 2 unter Einhaltung von (4) zu erreichen, verbleiben 987 320 und 987 302.

Wird weiter 3 durch 2 ersetzt, so verbleiben entsprechend 987 230 und 987 203;

wird 2 durch 1 ersetzt, so ergibt sich als größtmöglich: 987 140.

Die Forderung (3) wird von 987 500, 987 410, 987 401, 987 320, 987 302, 987 230 und 987 203 nicht erfüllt, wohl aber von 987 140.

Damit ist bewiesen: Das größte Element der Menge M' ist 987 140.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 240733:

Konstruktionsbeschreibung:

(1) Konstruktion einer Strecke DB der Länge h_b.

(2) Konstruktion der Senkrechten g in D auf DB.

(3) Konstruktion des Kreises k um B mit c; er schneidet g in zwei Punkten A_1, A_2.

(4) Antragen eines Winkels der Größe β in B an BA_1; sein zweiter Schenkel schneidet g in C_1.

(5) Antragen des Winkels der Größe β in B an BA_2 in gleichem Drehsinn wie der in (4) konstruierte Winkel. Der zweite Schenkel des in (5) konstruierten Winkels schneidet g in C_2.

A_1BC_1 und A_2BC_2 sind zwei Dreiecke der geforderten Art.

Bemerkung: In Konstruktionsschritt (4) hat man zwei Möglichkeiten des Antragens. Eine ist in Abbildung a dargestellt; die andere entsteht (bis auf die Bezeichnung) durch Spiegelung beider Dreiecke A_1BC_1, A_2BC_2 an der Geraden durch B und D. Diese Angaben werden nicht vom Schüler verlangt.

2. Lösungsweg: (1),(2) wie oben.

Statt (3): Aus den beiden Schnittpunkten von k und g wählt man einen als A.

Anschließend (4): Antragen der beiden Winkel der Größe β in B an BA; ihre (jeweils) zweiten Schenkel schneiden g in C_1 und C_2.

ABC_1 und ABC_2 sind zwei Dreiecke der geforderten Art.

Bemerkung: In (3) hat man zwei Möglichkeiten der Auswahl. Die eine entsteht aus der anderen durch Spiegelung an der Geraden durch B und D.

Weitere Lösungswege ergeben sich, indem man AB und den Thaleskreis k_1 darüber konstruiert und zum Schnitt bringt mit dem Kreis k_2 um B mit h_b. Die beiden Schnittpunkte D_1, D_2 verbindet man mit A und bringt die Geraden durch A, D_1 bzw. durch A, D_2 zum Schnitt C_1 bzw. C_2 mit dem zweiten Schenkel eines in B an AB angetragenen Winkels der Größe β (zwei Möglichkeiten). (Abbildung b)

Man kann aber auch einen der beiden Schnittpunkte von k_1, k_2 als D auswählen (zwei Möglichkeiten) und die Gerade durch A, D zum Schnitt C_1 bzw. C_2 bringen mit dem (jeweils) zweiten Schenkel der beiden in B an AB angetragenen Winkel der Größe β.

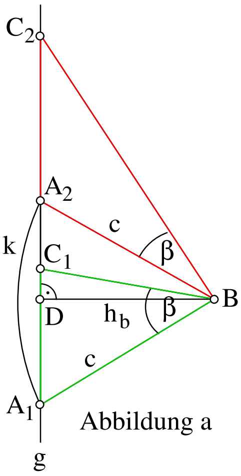


Abbildung a

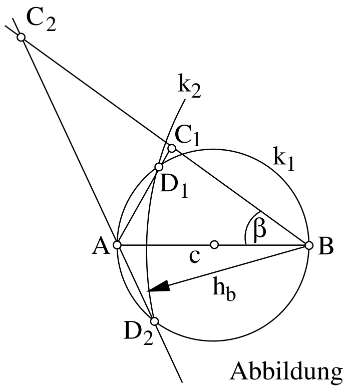


Abbildung b

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 240734:

Für jedes Dreieck gilt mit den genannten Bezeichnungen, daß der Flächeninhalt F des Dreiecks sowohl die Gleichung $F = \frac{1}{2}ah_a$ als auch die Gleichung $F = \frac{1}{2}bh_b$ erfüllt. Daher gilt $ah_a = bh_b$, also $a : b = h_b : h_a$. $\square$

Bemerkung: Für Schüler, die (aus außerunterrichtlicher Tätigkeit) Kenntnisse der Ähnlichkeitslehre haben, ist auch ein Beweis vermittels $\Delta BCH_b \approx \Delta ACH_a$ möglich (H_a, H_b die Fußpunkte der zu den Dreiecksseiten BC bzw. CA senkrechten Höhen). Der hierzu erforderliche Nachweis von $\overline{\sphericalangle BCH_b} = \overline{\sphericalangle ACH_a}$ ergibt sich daraus, daß diese Winkel im Fall $\overline{\sphericalangle ACB} < 90°$ übereinstimmende Winkel und im Fall $\overline{\sphericalangle ACB} > 90°$ Scheitelwinkel sind. Der Fall $\overline{\sphericalangle ACB} = 90°$ ist gesondert zu betrachten, da die genannten Dreiecke in diesem Fall entarten. Die Behauptung folgt in diesem Fall einfach aus $a = h_b$, $b = h_a$.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 240735:

Die in die Leerstellen einzutragenden Ziffern seien so mit a, b und c bezeichnet, daß die entstehenden Zahlen die Zifferndarstellung $43a1b5c$ haben.

Eine solche Zahl ist genau dann durch 75 teilbar, wenn sie sowohl durch 3 als auch durch 25 teilbar ist, da 3 und 25 teilerfremd sind. Durch 25 ist sie genau dann teilbar, wenn $c = 0$ ist.

Durch 3 ist sie genau dann teilbar, wenn ihre Quersumme $(4 + 3 + a + 1 + b + 5 + c =)13 + a + b$ durch 3 teilbar ist.

Wegen $0 \leq a \leq 9$ und $0 \leq b \leq 9$ gilt $0 \leq a + b \leq 18$. Für die genannte Quersumme gilt daher $13 \leq 13 + a + b \leq 31$. Sie ist folglich genau dann durch 3 teilbar, wenn sie eine der Zahlen 15, 18, 21, 24, 27, 30 ist, d.h. genau dann, wenn die Summe s aus den beiden Ziffern a und b eine der Zahlen 2, 5, 8, 11, 14, 17 ist. Die folgende Tabelle enthält alle Ziffernpaare $(a; b)$, die eine dieser Summen $s = a + b$ besitzen:

Ziffernsumme s	Alle Ziffernpaare $(a; b)$ mit $a + b = s$	Anzahl der Ziffernpaare
2	(0;2), (1;1), (2;0)	3
5	(0;5), (1;4), (2;3), (3;2), (4;1), (5;0)	6
8	(0;8), (1;7), (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2), (7;1), (8;0)	9

11	(2;9), (3;8), (4;7), (5;6), (6;5), (7;4), (8;3), (9;2)	8
14	(5;9), (6;8), (7;7), (8;6), (9;5)	5
17	(8;9), (9;8)	2

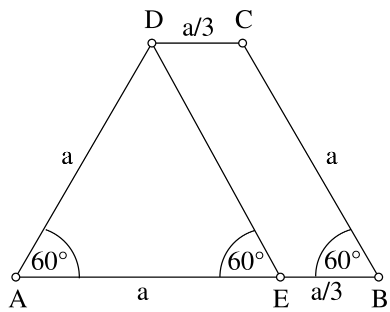
Daher ist mit $3 + 6 + 9 + 8 + 5 = 33$ die gesuchte Anzahl gefunden.

Hinweis zur Korrektur: Werden die Überlegungen nicht als logische Äquivalenzen formuliert, sondern als Schlüsse in einer Richtung, von den geforderten Eigenschaften auf die (Anzahl der) entstehenden Zahlen, so ist außerdem die Angabe der umgekehrten Schlußrichtung erforderlich, z.B. als "Probe", d.h. als Feststellung, daß alle aufgezählten Einsetzungen zu Zahlen mit den geforderten Eigenschaften führen.

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Lösung 240736:

Wegen (1) und (2) ist $ABCD$ ein gleichschenkliges Trapez. Wegen (3) gilt daher



(4) $\overline{\sphericalangle CBA} = 60°$.

Die Parallele zu BC durch D schneide AB in E. Da Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen gleichgroß sind, folgt hieraus und aus (4)

(5) $\overline{\sphericalangle DEA} = 60°$.

Hieraus und aus (3) (sowie dem Winkelsummensatz) folgt dann, daß das Dreieck AED gleichseitig ist. Wegen (2) gilt daher

(6) $\overline{AE} = \overline{AD} = a$.

Da $BC \parallel ED$ und wegen (1) auch $EB \parallel DC$ gilt, ist $EBCD$ ein Parallelogramm. Hieraus und aus (2) folgt dann

(7) $\overline{EB} = \overline{DC} = \frac{a}{3}$.

Für den Umfang u des Vierecks $ABCD$ gilt daher

$$u = \overline{AE} + \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = a + \frac{a}{3} + a + \frac{a}{3} + a = \frac{11}{3}a.$$

Aufgeschrieben von Manuela Kugel – Quelle: (25)

Quellenverzeichnis

(25) Offizielle Lösung der Aufgabenkommission